

VISIT...

LANZAROTE
Caliente.COM

У. Саслау

ГРАВИТАЦИОННАЯ ФИЗИКА ЗВЕЗДНЫХ И ГАЛАКТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Перевод с английского
канд. физ.-мат. наук М.М. РОМАНОВОЙ,
Т.С. ФЕТИСОВОЙ
под редакцией д-ра физ.-мат. наук
И.Д. НОВИКОВА



Москва «Мир» 1989

ВВЕДЕНИЕ

Глендаур: Я духов вызывать из тьмы умею.
Готспер: И я, как впрочем, каждый человек.
Все дело в том, появятся ли духи?

Шекспир

Дух, таящийся почти в каждом астрономическом явлении, — это гравитация. Нетрудно понять причину, по которой она оказывается главной движущей силой для значительной части Вселенной. Во Вселенной нас прежде всего интересует ее структура, включая нас самих. А физической причиной существования этой структуры является гравитация. С ней связано даже наше собственное происхождение. Появление тяжелых элементов в результате ядерных реакций обусловлено силой гравитации в массивных звездах. Именно она приводит в конце концов к взрыву звезды и рассеянию по всей галактике составляющих ее элементов. Некоторые из них собираются в новые звезды и планеты не без участия более мягких гравитационных механизмов. И вот, наконец, появляется человечество! Конечно, его масса, сколь бы значительной ни казалась она нам самим, составляет всего 10^{-41} массы видимой части Вселенной. Другими словами, наш вклад в постоянную Хаббла составляет около 10^{-19} км/(с · Мпс).

Как гравитация определила наше собственное происхождение через образование и эволюцию звезд, так она определяет уже более непосредственным образом динамику других астрономических структур: звездных скоплений, форму и эволюцию галактик и движение всей системы галактик. В XVII в. Ричард Хукер считал, что связь человеческой жизни с гравитационными явлениями еще теснее:

«Если основа, на которой зиждется воздвигнутый над нашими головами небесный свод, потеряет твердость и распадется, если небесные сферы забудут привычные пути и по странной прихоти начнут вращаться, повинувшись лишь своим изменчивым желаниям, если первое из светил, что стремится сейчас свой неустанный бег подобно гиганту, начнет останавливаться, уступая внезапной слабости и желанию отдыха, если луна собьется с торной своей дороги и хаос воцарится там, где раньше был строгий порядок в чередовании дня и ночи, лета и зимы, если ветры испустят последний вздох, облака перестанут

проливаться дождем и земля будет беззащитной перед вызовом небес, что станет тогда с человеком, которому служат сейчас все стихии? Разве не понимаем мы ясно теперь, что повиновение всего сущего закону природы есть один из столпов мироздания?»

Итак, вы видите, сколь ужасны последствия такого непонимания!

Цели гравитационной физики многих тел и ее применения к астрономическим системам чрезвычайно разнообразны. Чтобы шире взглянуть на проблему, рассмотрим два основных отличия гравитационной задачи от исследований в других областях физики многих тел, таких, как сверхтекучесть, конденсированные ядерные среды, аморфные твердые тела. Во-первых, в нашей области уже был свой Ньютон, поэтому здесь изначально известным оказывается «микроскопическое» описание физических явлений. Гравитационный гамильтониан был записан — Гамильтоном — более 150 лет назад. Наша задача, таким образом, сводится обычно к тому, чтобы найти адекватное макроскопическое описание явления. Исторически такое положение противоположно тому, которое сложилось в других областях физики, где макроскопическое описание предшествовало микроскопическому. Например: развитие термодинамики привело к появлению статистической механики, за механикой жидкостей и газов последовала кинетическая теория, а описание макроскопических свойств твердых тел предшествовало нашему пониманию их молекулярной и атомной структуры.

Полное понимание микроскопических взаимодействий точечных частиц, подчиняющихся законам Ньютона (даже когда эти частицы представляют собой галактики диаметром 100 000 парсек!), делает возможным проведение с этими частицами численных экспериментов на мощных ЭВМ. Таким образом, мы имеем возможность моделировать естественные астрономические системы (огромная аналоговая ЭВМ находится у нас над головой) и одновременно проверять свое понимание свойств систем многих тел. Деятельность этого рода была одним из преимущественных направлений в развитии астрономии за последнее время, и некоторые ее результаты будут включены в последующее обсуждение.

Записав гамильтониан гравитационной системы, мы тут же поймем и второе ее отличие от других систем многих тел. Гамильтониан системы гравитационно взаимодействующих частиц с импульсами p_i и постоянными массами m_i представляет собой полную энергию этой системы:

$$H = \sum_i \frac{p_i^2}{2m_i} - G \sum_{\substack{\text{пары} \\ \text{с } i \neq j}} \frac{m_i m_j}{r_{ij}}.$$

Он является простой, но сильно нелинейной функцией расстояний r_{ij} между частицами. Уравнения движения тоже оказываются нелинейными, и поскольку любые две частицы притягиваются друг к другу, стационарное состояние, в отличие от случая в среднем нейтральной плазмы, здесь не достигается. Уже на этой стадии рассуждений возможна догадка о том, что гравитирующие си-

системы стремятся к эволюции в сторону все более конденсированных фаз — ко все большей по абсолютной величине отрицательной гравитационной энергии. Отсюда, однако, не следует, что система целиком переходит в сингулярное состояние с $r_{ij} \rightarrow 0$ для любых i и j . Поскольку H — величина постоянная, малые значения r_{ij} должны быть сбалансированы большими значениями импульсов. Таким образом, некоторые частицы приобретают большую скорость и, поскольку система конечна, покидают ее.

Итак, часть системы может конденсироваться, а другая — расширяться, что сохраняет полную энергию системы; при этом среднее гармоническое расстояние между частицами, пропорциональное

$$1 / \sum_{\substack{\text{пары} \\ c \neq j}} r_{ij}^{-1},$$

становится очень малым. Эта тенденция к образованию подскоплений будет так или иначе отмечаться в предстоящем обсуждении гравитирующих систем.

Несмотря на то, что гравитационный гамильтониан был записан в 1834 г., в течение более чем 70 лет он применялся в основном к орбитам двух или трех тел, подверженным обычным в небесной механике возмущениям. В первом десятилетии нашего века возник интерес к задаче многих тел в связи с наблюдениями большого числа звезд в нашей Галактике. К концу второго десятилетия появилось несколько классических работ Шарлье, Эддингтона, Джинса и других, в которых эта проблема рассматривалась с точки зрения кинетической теории газов Максвелла — Больцмана. Основное отличие такого подхода заключается в отсутствии близких столкновений между звездами, поэтому в нем использовалось бесстолкновительное приближение Больцмана. В 30-х и 40-х гг. значительные усилия были направлены на определение с помощью бесстолкновительного уравнения Больцмана гравитационного потенциала и структуры нашей Галактики, исходя из наблюдений распределения звезд в ней и предположения о том, что распределение скоростей может быть параметризовано гауссовым эллипсоидом. Такой подход представлял собой так называемую обратную задачу Джинса. Он оказался не очень результативным для понимания структуры Галактики и уступил место измерениям на частоте 1420 МГц распределения нейтрального водорода. В 1940-х гг. производились также расчеты испарения звезд из скоплений, а в 1950-х и 1960-х гг. многие астрономы начали применять к гравитационной задаче те или иные методы, развитые в физике плазмы.

В последние два десятилетия возродился интерес ко многим аспектам проблемы. Это возрождение объясняется в основном наблюдениями *квазаров* и бурной активности в ядрах *галактик*, состоящих из сильно сконцентрированных звездных систем, новыми результатами, касающимися сгущения галактик, интерпретацией *спиральной структуры* галактик как гравитационных волн плотности, наблюдениями *трехосных эллиптических* галактик и открытием рентгеновского излучения *шаровых скоплений* звезд в нашей Галактике, которые ранее считались вполне устойчивыми и не слишком интересными астрономическими объектами, а теперь доказали свою активность.



Рис. Скопление галактик в южном созвездии Павлова, удаленное от нас примерно на 300 млн. св. лет. Показаны галактики нескольких типов: спиральные, эллиптические и спиральные с перемычками. Гигантская галактика в центре, возможно, образовалась в результате слияния галактик меньшего размера или же сформировалась первой, а затем притянула другие галактики, которые сгруппировались в скопление. (Оригинальный негатив получен на телескопе системы Шмидта. Фотоснимок публикуется с разрешения Эдинбургской обсерватории, Великобритании.)

ИДЕАЛИЗИРОВАННЫЕ ОДНОРОДНЫЕ СИСТЕМЫ — ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И МЕДЛЕННАЯ РЕЛАКСАЦИЯ



В действительности мы не воспринимаем ничего истинного, но то, что изменяется в зависимости от состояния нашего тела и входящих в него и оказывающих ему противодействий.

Демокрит

Чтобы понять некоторые наиболее важные свойства гравитирующих систем, отвлечемся на время от эффектов, связанных с наличием в них градиентов плотности и скорости, с различием масс и размеров составляющих их объектов и с существованием действующих на них внешних сил. Представим себе идеализированную изолированную однородную гравитирующую систему частиц. Обычно при обсуждении физики такой системы мы будем для краткости называть ее частицы звездами, хотя нередко в зависимости от контекста это могут быть галактики или даже скопления галактик. В одних случаях эти идеализированные системы конечны, в других — бесконечны. В последующих разделах мы покажем, что в обоих случаях однородные системы оказываются неустойчивыми. Здесь, однако, мы не будем останавливаться на этом аспекте, а рассмотрим лишь наиболее существенные свойства гравитирующих систем.

1. СРЕДНИЕ И ФЛУКТУИРУЮЩИЕ ГРАВИТАЦИОННЫЕ ПОЛЯ

Малое к малому рождает удивительное.

Эзон

Самосогласованное движение всех звезд или галактик в изолированном скоплении полностью определяется их гравитационными взаимодействиями, если только каждый объект можно рассматривать как точечную массу. Для системы объектов, имеющих радиус d , последнее условие означает, что занимаемый ими объем должен быть мал по сравнению с объемом системы, чтобы частота физических столкновений в этой системе была невелика. Два сферических объекта радиуса d имеют эффективный радиус касательного столкновения $2d$ и, следовательно, эффективное сечение $\sigma = 4\pi d^2$. Для объектов, хаотически движущихся в однородной сферической системе радиуса R , средняя длина свободного пробега λ_G относительно геометрических столкновений составляет

$$\lambda_G \approx 1/n\sigma = \frac{R^3}{3Nd^3}d, \quad (1.1)$$

где n — плотность числа объектов в системе, в N — их полное число. Из этого соотношения видно, что число собственных диаметров, которое объект успевает пройти между двумя последовательными столкновениями, представляет собой по существу отношение объема скопления к суммарному объему объектов. Кроме того, число радиусов скопления, пройденных между столкновениями, — это фактически отношение площади проекции скопления к суммарной площади проекций объектов.

В скоплениях галактик, где $N \approx 10^3$, $R \approx 3$ Мпс и $d \approx 0,01$ Мпс, отношение характерных размеров составляет $\lambda_G/d \approx 10^4$ и $\lambda_G/R \approx 30$. В шаровых скоплениях, где $N \approx 10^5$, $R \approx 10$ пс и $d \approx 3 \cdot 10^{-8}$ пс, эти величины приблизительно равны $\lambda_G/d \approx 10^{20}$ и $\lambda_G/R \approx 3 \cdot 10^{11}$, а в случае умеренно плотных ядер галактик, где $N \approx 10^6$, $R \approx 0,1$ пс и $d \approx 3 \cdot 10^{-8}$ пс, имеем $\lambda_G/d \approx 10^{13}$ и $\lambda_G/R \approx 3 \cdot 10^6$. Таким образом, во всех этих случаях прямые столкновения практически не влияют на движение большинства галактик или звезд. Из этого, однако, не следует, что прямые столкновения всегда несущественны для эволюции скопления как целого; ниже мы рассмотрим, что получается, когда они доминируют.

Условие изолированности системы означает, что межзвездные силы (градиенты потенциала) внутри системы намного превосходят силы, действующие со стороны внешних источников. Внешняя масса M_e , находящаяся на расстоянии l от объекта, действует на единицу его массы с силой $\sim GM_e/l^2$, если, конечно, она достаточна сферична и мультипольные вклады незначительны. Силы, действующие на звезду внутри системы, имеют двоякое происхождение: с одной стороны, это усредненная сила, действующая со стороны большого числа удаленных звезд, с другой — флуктуирующая сила, вызванная гравитационным полем малого числа соседних звезд. Оценим приближенное соотношение между различными силами, действующими на звезду в однородном сферическом скоплении (более точная оценка будет получена позже). Пусть звезда находится на расстоянии r от центра системы. Внутри сферы с таким радиусом суммарная масса составит $M(r) = (4/3)\pi mnr^3$, а созданная ею средняя гравитационная сила $\sim GM(r)/r^2 \approx 4Gmnr$.

Таким образом, усредненная внутренняя сила превосходит внешнюю, если

$$\frac{r}{R} \gtrsim \frac{R^2 M_e}{l^2 M}, \quad (1.2)$$

где $M = M(R)$. Вклад от небольшого числа ближайших соседей, который не может быть усреднен, поскольку в этом случае временные флуктуации силы одного порядка величины с ее мгновенным значением, приблизительно равен массе m ближайшей звезды, умноженной на G и деленной на квадрат расстояния между частицами, т. е. $Gmn^{2/3} \approx GmN^{2/3}R^{-2}$. Эта флуктуирующая сила

превосходит среднюю силу при условии $r/R \leq N^{-1/3}$, а внешнюю — при

$$N^{-1/3} \gtrsim \frac{R^2 M_c}{l^2 M}. \quad (1.3)$$

В качестве первого примера рассмотрим силы, действующие на звезды внутри шарового скопления с теми же параметрами (масса каждой звезды предполагается равной массе Солнца), находящегося на краю сферической галактики радиуса 10 кпс, которая содержит $10^{11} M_{\odot}$. Из неравенства (1.2) находим, что в центральной области скопления внешняя сила превосходит усредненную внутреннюю примерно на порядок величины, а вблизи края скопления они приблизительно одинаковы. Соотношение (1.3) показывает, что в этом случае внутренние флуктуирующие силы значительно меньше внешней силы. Далее рассмотрим силы, действующие на звезды в галактике, которая взаимодействует с другой галактикой такой же массы, находящейся на расстоянии $l \approx 10R$. Здесь ситуация иная. Теперь преобладает усредненная внутренняя сила, за исключением областей, где отношение r/R мало. Это противоречие связано с тем, что плотность в центре предполагается постоянной, что приводит к появлению гармонической возвращающей силы. В реальных галактиках такая идеализация неприменима.

В предыдущем примере с шаровым скоплением может показаться, что при анализе внутренней динамики скопления его нельзя отделять от галактики. Это, однако, верно лишь отчасти. В самом деле, если внешняя сила одинакова для всего скопления, то она будет определять движение лишь его центра масс, т. е. орбиту скопления в галактике. Только приливная сила, действующая на скопление дифференциально, затрагивает его внутреннюю динамику. Разность между силами, действующими со стороны внешней массы на периферийную и центральную области скопления, составляет

$$F(R) - F(0) \approx \frac{\partial F}{\partial r} \Delta r \approx \frac{F}{l} R. \quad (1.4)$$

В примере с шаровым скоплением это соотношение означает, что приливная сила меньше внешней гравитационной силы в $l/R \approx 10^{-3}$ раз. Таким образом, галактика не определяет внутреннюю динамику скопления, за исключением области вблизи приливного радиуса.

Интересен случай, когда галактика может сильно влиять на внутреннюю динамику шарового скопления, даже если приливные силы малы. Если внешнее поле изменяется в пространстве достаточно резко, оно может сообщить толчок или импульс скоплению всякий раз, когда орбита последнего проходит вблизи этой особенности. Хотя каждый из таких толчков сам по себе может быть довольно малым, их суммарное воздействие при повторных прохождениях способно привести к тому, что скопление получит энергию, достаточную для его разрушения. Подробнее этим вопросом мы займемся в ч. IV, а пока рассматриваются лишь изолированные системы.

Одно из отмеченных выше очень важных положений состоит в том, что внутреннее поле можно разделить на случайно флуктуирующее поле ближай-

ших соседей и относительно медленно меняющееся усредненное поле более удаленных звезд. Эту идею часто используют в приближенных методах решения задачи многих тел; поэтому исследуем ее более подробно.

Начнем со статического случая. Рассмотрим какую-либо звезду из одно-родного случайного распределения. Сила, действующая на нее со стороны N звезд, заключенных в пространственной ячейке малого объема, находящейся на расстоянии r от этой звезды, пропорциональна N/r^2 . Чтобы аналогичные ячейки, находящиеся на различных расстояниях, создавали одинаковую силу, они должны содержать $N \sim r^2$ звезд. При однородном случайном распределении величина N представляет собой среднее число звезд в ячейке; однако при переходе от одной ячейки к другой эта величина флуктуирует, причем относительная флуктуация составляет $\Delta N/N \approx N^{-1/2} \sim r^{-1}$. Таким образом, относительная величина флуктуаций в ячейках, создающих одинаковую гравитационную силу, обратно пропорциональна их расстоянию до рассматриваемой звезды.

Возможен и другой подход. Предположим, что интересующая нас звезда находится в центре сферического скопления. Если бы распределение вещества скопления в пространстве было сплошным и однородным, то на звезду не действовали бы никакие силы. Однако на самом деле вещество сконцентрировано в звезды, следовательно, его распределение дискретно, и эта дискретность приводит к существованию результирующей силы. Окружающий звезду сферический слой будет содержать в среднем $N_{\text{слой}} = 4\pi r^2 n \Delta r$ звезд, а созданная им флуктуирующая компонента силы составит таким образом (в случае положительной величины флуктуации числа звезд в слое)

$$\Delta F_{\text{слой}} \approx - \frac{2\pi^{1/2} G m^2 n^{1/2} (\Delta r)^{1/2}}{r}. \quad (1.5)$$

Такая сила возникает, в частности, если половина слоя будет содержать приблизительно $(N + \sqrt{N})/2$ звезд. Тогда, поскольку слой уже не будет строго сферическим, звезда отклоняется от центрального положения. Результирующая сила, действующая на звезду, создается всеми сферическими слоями, число которых равно $R/\Delta r$. Каждый из них, однако, отклоняет звезду в случайном направлении, поэтому результирующее действие всех слоев приблизительно пропорционально корню квадратному из их числа, т. е. $R^{1/2}/(\Delta r)^{1/2}$. Таким образом, полная флуктуирующая сила приблизительно равна

$$\Delta F_{\text{полн}} \approx \Delta F_{\text{слой}} R^{1/2} (\Delta r)^{-1/2} \approx - 2\pi^{1/2} G m^2 n^{1/2} R^{1/2} \langle r^{-1} \rangle \approx - \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{G m^2 N^{1/2}}{R^2}, \quad (1.6)$$

где $\langle r^{-1} \rangle$ — усредненный обратный радиус

$$\langle r^{-1} \rangle = \frac{3}{4\pi R^3} \int_0^R \frac{1}{r} 4\pi r^2 dr = \frac{3}{2R}, \quad (1.7)$$

который может быть получен интегрированием флуктуирующей силы по всей системе.

Заметим, что толщина слоя не входит в конечную формулу и ее значение оказывается, таким образом, несущественным. В действительности все происходит так, как если бы $N^{1/2}$ звезд системы были помещены примерно в одно место на середине расстояния от центра и именно они вызывали характерную флуктуацию гравитационной силы. По мере увеличения числа звезд среда постепенно превращается в сплошную и отношение флуктуирующей силы к усредненной падает как $N^{-1/2}$.

Эти флуктуации приводят к возникновению случайной составляющей скорости звезды, которая складывается со скоростью, обусловленной усредненным гравитационным полем. Используемая нами до сих пор простая статическая модель не подходит для вычисления этой случайной составляющей. Кроме того, поскольку звезда находится в состоянии движения, флуктуации гравитационной силы от окружающих звезд претерпевают изменения как по величине, так и по направлению. Более того, движение звезды внутри системы может привести к коллективным эффектам, при которых положения и скорости соседних звезд перестают быть случайными и становятся коррелированными. Таким образом, мы приходим к необходимости перейти от статической модели к динамической.

2. МЕДЛЕННАЯ РЕЛАКСАЦИЯ: ХАРАКТЕРНЫЕ ВРЕМЕНА

Я шел последовательно то по одному пути, то по другому, то по одному — то по другому, но все же больше по первому из них.

Мервин Пик

Поскольку гравитация представляет собой парное взаимодействие, отклонение звезды, будучи обусловлено всей совокупностью взаимодействий в системе, является по существу результатом сложения всех парных взаимодействий, в которых она участвует. Динамический эффект каждого взаимодействия состоит в отклонении орбиты звезды от первоначального положения. В случае слабого рассеяния это отклонение можно легко оценить. Рассмотрим звезду с большой массой m_1 , которая отклонит, как это показано на рис. 1, звезду с намного меньшей массой m_2 , движущуюся первоначально со скоростью v , перпендикулярно направлению, соответствующему прицельному параметру (расстояние до ближайшей точки неотклоненной орбиты) b . Гравитационное ускорение Gm_1/b^2 действует в течение эффективного времени $2b/v$ и создает компоненту скорости

$$\Delta v \approx \frac{2Gm_1}{bv}, \quad (2.1)$$

приблизительно перпендикулярную к начальной скорости. Поскольку $\Delta v \ll v$, этот эффект линеен, а угол рассеяния есть $\psi \approx \Delta v/v$. В этом заключается физическая суть явления, точное же вычисление орбиты (его можно найти в большинстве учебников по классической механике) показывает, что в более об-

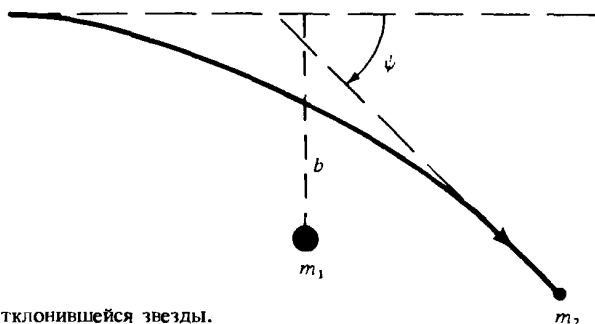


Рис. 1. Орбита отклонившейся звезды.

шем случае

$$\operatorname{tg} \frac{\psi}{2} = \frac{G(m_1 + m_2)}{v^2 b}, \quad (2.2)$$

$$\frac{\Delta v}{v} = 2 \sin \frac{\psi}{2}. \quad (2.3)$$

При $m_2 \ll m_1$ и $\psi \ll 1$ уравнения (2.2) и (2.3) сводятся к (2.1). К звездным системам эти уравнения были впервые применены Джинсом (Jeans, 1913), который провел аналогию с кинетической теорией газов Максвелла. В дальнейшем между кинетической теорией газов, а позже физикой плазмы, с одной стороны, и задачей многих тел в теории гравитации — с другой, не раз происходил плодотворный обмен в плане как методологии, так и результатов.

Приведенные выше формулы показывают, что изменение скорости и угол рассеяния становятся значительными в том случае, когда расстояние между объектами в момент сближения настолько мало, что потенциальная энергия их взаимодействия сравнима с кинетической. Насколько типичны такие тесные сближения? Будем характеризовать типичное сближение прицельным параметром, приблизительно равным среднему расстоянию между частицами $b \approx RN^{-1/3}$, средней массой $m_1 \approx M/N$ и начальной скоростью, соответствующей дисперсии скоростей в системе, близкой к состоянию равновесия: $v^2 \approx GM/R$ [см. (9.30)]. Тогда при $N \gg 1$ получим

$$\frac{\Delta v}{v} \approx \psi \approx N^{-2/3} \quad (2.4)$$

Таким образом, в близкой к равновесию системе типичное взаимодействие соседних звезд сопровождается лишь незначительным обменом энергией и импульсом между ними. Конечно, к каждому скоплению всегда имеется небольшое число звезд с малыми относительными скоростями. Обычно это звезды вблизи поворотных точек орбит, вычисленных в предположении усредненного потенциала и находящихся в периферийных областях скопления, прохождение через которые сильно замедлено. В этом положении они особенно подверже-

ны заметным отклонениям. Впрочем, вероятность сближения с такой же медленной звездой достаточно мала, поэтому существенные отклонения редки. В одном случае, однако, они начинают играть заметную роль: в неоднородных скоплениях с объектами различной массы наиболее массивные из этих объектов скапливаются в центре и сильно изменяют орбиты друг друга. Более подробно этот случай рассматривается в части III. ■

Несмотря на малую величину каждого отклонения в отдельности, их кумулятивный эффект может быть значительным. Это можно показать несколькими способами. Самый простой из них заключается в следующем. Предположим, что при характерном сближении угол отклонения орбиты ψ и скорость v изменяются на величину, которую можно найти по формулам (2.2) и (2.3), а направление этого изменения совершенно случайно. Таким образом, происходит случайное блуждание величин v и ψ , а корень из их среднеквадратичных значений растет пропорционально корню квадратному из числа рассеяний. Среднее число рассеяний данной звезды ближайшими звездами, скорость которых заключена в интервале между v и $v + dv$, а прицельный параметр — между b и $b + db$, за время dt составит

$$2\pi b f(v, t) v dt db dv, \quad (2.5)$$

где $f(v, t)dv$ — число звезд со скоростью от v до $v + dv$ в момент t , причем функция $f(v, t)$ нормирована так, что интеграл от нее по всему пространству скоростей дает полную плотность числа звезд n . В стационарном состоянии $f(v)$ не зависит от t ; кроме того, то обстоятельство, что она зависит лишь от абсолютной величины v , означает изотропность распределения по скоростям в любой точке пространства.

Чтобы оценить среднеквадратичную величину изменения скорости в результате сближения, умножим число сближений на квадрат изменения скорости $(\Delta v)^2$, который можно найти из соотношений (2.2) и (2.3), положив $\Delta v \ll v$, $m_1 = m_2$ и $f(v, t) = f(v)$. Полученное произведение проинтегрируем по dt , db и dv . Хотя этот метод ведет к переоценке эффекта нескольких последних рассеяний, величина отклонения в каждом из них незначительна, и такая переоценка не повлияет существенно на результат.

Поскольку каждое отклонение мало и не коррелирует с другими отклонениями, изменение скорости $(\Delta v)^2$ в результате отдельного рассеяния просто складывается с суммой предыдущих изменений. Для стационарного состояния интеграл по времени тривиален. Интеграл же по скоростям

$$\int_0^\infty v^{-1} f(v) dv = n \langle v^{-1} \rangle \quad (2.6)$$

представляет собой просто усредненную обратную скорость. При интегрировании по прицельному параметру

$$\int_{b_1}^{b_2} \frac{db}{b} = \ln \frac{b_2}{b_1} \quad (2.7)$$

возникают трудности иного рода. Этот интеграл расходится как при очень больших значениях b_2 , так и при очень малых значениях b_1 , поэтому необходимо ввести «обрезание» обоих пределов конечными величинами. В случае верхнего предела это нетрудно сделать следующим образом. С физической точки зрения существование конечного верхнего предела обусловлено дальностью действующей природой гравитационного потенциала; этот предел представляет собой максимальное расстояние, на которое могут передаваться возмущения в системе. В конечных системах такое расстояние можно принять приблизительно равным радиусу системы R . В бесконечных системах им является расстояние, на котором еще существует корреляция между отдельными возмущениями; в части II мы увидим, что эта величина сопоставима с «джинсовской длиной», на которой кинетическая и потенциальная энергии возмущения приблизительно равны. В физике плазмы аналогом джинсовской длины является дебаевский радиус.

Обрезание снизу возникает из-за того, что рассеяния при очень тесных сближениях изменяют v в сильно нелинейном режиме. Такие рассеяния с большим углом отклонения редки и исключаются приравнением b_1 прицельному параметру, характеризующему рассеяние на угол, например, 90° . Из соотношения (2.2) в этом случае получим $b_1 = 2Gm/v^2$ — расстояние, на котором кинетическая и потенциальная энергии равны. Таким образом, $\ln(b_2/b_1) \approx \ln(Rv^2/2Gm)$. Для близкой к равновесию системы конечных размеров из теоремы вириала (изложенной в разд. 9) следует, что $v^2 \approx GmN/R$, т. е. средняя кинетическая энергия звезды составляет примерно половину ее потенциальной энергии. Логарифмический множитель равен поэтому приблизительно $\ln(N/2)$. Другой возможный подход состоит в том, чтобы принять за нижний предел расстояние, на котором гравитационная сила со стороны соседней звезды равна средней силе, действующей со стороны скопления: $m/b_1^2 \approx M/R^2$. В этом случае $\ln(b_2/b_1) \approx 1/2 \ln N$. И наконец, третья возможность заключается в том, чтобы принять за нижний предел расстояние между ближайшими соседями: $b_1 \approx (4\pi R^3/3N)^{1/3}$. Хотя величина b_1 определяется неоднозначно, что зависит от выбора того или иного физического подхода, ее крайне слабое влияние на результат позволяет утверждать, что эта неоднозначность не представляет серьезного препятствия для понимания медленной релаксации.

Выполнив все три интегрирования, получим выражение для суммарного среднеквадратичного изменения скорости

$$\left(\frac{\Delta v}{v}\right)^2 \approx 32\pi G^2 m^2 n v^{-3} \ln(N/2)t. \quad (2.8)$$

Помимо неоднозначности логарифмического множителя, основная неопределенность этой формулы заключается в отождествлении $\langle v^{-1} \rangle$ с величиной, обратной дисперсии скоростей в системе. В полученное выражение следует поэтому включить постоянный множитель (его величина составляет обычно от 0,1 до 1,0), который зависит от функции распределения скоростей. Например, более подробное исследование (Chandrasekhar, 1960) показывает, что при

максвелловском распределении этот множитель равен приблизительно 0,2 для пробных звезд, скорости которых близки по величине к дисперсии скоростей. В действительности эту неопределенность существенно превосходят неопределенности астрономически наблюдаемых величин m , n , v и t . Поэтому для проверки теории звездных отклонений численные эксперименты дают больше, чем астрономические наблюдения.

Лекар и Крус-Гонсалес (*Lecar and Cruz-González*, 1972) разработали численный эксперимент по проверке независимости и линейности отдельных отклонений. Сто звезд были равномерно и случайно распределены внутри сферы и предполагались неподвижными. Затем в систему была введена пробная звезда с пренебрежимо малой массой и с начальной скоростью, направленной вдоль диаметра системы, и вычислена ее орбита. Далекие и тесные сближения с неподвижными звездами поля повернули вектор ее скорости на угол ψ за время t . Результаты были усреднены по совокупности экспериментов с различным случайным распределением звезд. Это дало возможность экспериментально получить величину $\langle t^{-1} \sin^2 \psi \rangle$. Кроме того, для каждого эксперимента были вычислены отклонения ψ_i под действием каждой из отдельно взятых звезд поля, как если бы все остальные отсутствовали; в результате была получена сумма $\langle t^{-1} \Sigma \sin^2 \psi_i \rangle$. Вся процедура была повторена для нескольких значений начальной скорости пробной звезды, различающихся в шесть раз.

Для каждого значения начальной скорости эти два способа вычисления среднего отклонения дают результаты, различающиеся между собой на одно-два стандартных отклонения (вычисленного как дисперсия по всей совокупности полученных результатов). Значения $\langle t^{-1} \Sigma \sin^2 \psi_i \rangle$ также хорошо согласуются с теоретическими результатами [см. соотношение (2.8)]. Однако значения $\langle t^{-1} \sin^2 \psi \rangle$ оказываются систематически заниженными. Более того, векторная сумма отклонений, вызванных отдельными звездами, как правило, отличается от отклонения, полученного как результат одновременного действия всех звезд поля. Мы должны сделать вывод, что теория хорошо описывает накапливающиеся независимые линейные отклонения. Однако в действительности происходит также несколько нелинейных рассеяний, результат которых не является независимым от других рассеяний и не поддается поэтому простому суммированию, причем вклад таких нелинейных рассеяний может быть значительным. Пока не ясно, каким образом следует учитывать такого рода рассеяния теоретически.

Поскольку ожидаемая величина среднеквадратичной скорости растет в результате отклонений, с помощью соотношения (2.8) нетрудно определить характерное время τ_R , за которое описанный эффект релаксации становится существенным для типичной звезды. Полагая $(\Delta v/v) = 1$, получаем

$$\begin{aligned} \tau_R &= \frac{v^3}{32\pi G^2 m^2 n \ln(N/2)} \\ &= \frac{v^3 R^3}{24 G^2 m M \ln(N/2)}, \end{aligned} \quad (2.9)$$

где M — полная масса скопления. В системах, близких к равновесию, $GM \approx Rv^2$. Можно определить характерное «время пересечения» скопления движущейся звездой

$$\tau_c = R/v \quad (2.10)$$

и записать соотношение между τ_R и τ_c в виде

$$\tau_R = \frac{0,04 N}{\ln(N/2)} \tau_c \quad (2.11)$$

Поскольку для шаровых скоплений, галактик и богатых скоплений галактик $N \geq 10^3$, время их релаксации намного превышает динамическое время пересечения. Поэтому кумулятивный результат малых отклонений не слишком заметен на протяжении одного орбитального периода, хотя их вековой эффект на протяжении многих периодов может стать определяющим. Лишь в случае малых шаровых скоплений и плотных ядер галактик медленная релаксация становится значительной в космологических временных масштабах.

Любопытно сравнить эти соотношения по порядку величин с аналогичными результатами, вычисленными для системы точечных масс, имеющей форму диска. Замечая, что число столкновений с прицельным параметром, заключенным между b и $b + db$, составляет теперь $2vstdb$, где $s \approx N/R^2$ — поверхностная плотность, получаем для диска выражение, аналогичное (2.8):

$$\left(\frac{\Delta r}{r} \right)^2 \approx \frac{G^2 m^2 s t}{r^3} \int_{b_1}^{b_2} \frac{db}{b^2}. \quad (2.12)$$

Первое интересное отличие состоит в том, что интеграл по прицельному параметру при очень больших значениях b_2 больше не расходится. Это объясняется тем, что у заключенной в двумерном диске системы объем, заполненный удаленными частицами, имеет на одно пространственное измерение меньше. Сравнение результатов при $b_2 = 2b_1$ и $b_2 = \infty$ в (2.12) показывает, что вклады тесных и далеких сближений в кумулятивное отклонение в этом случае примерно одинаковы, хотя в трехмерном случае доминировали далекие сближения. Используя приблизительное соотношение для скорости $v^2 \approx GNm/R$, выведенное, как и прежде, из теоремы вириала, и положив опять $b_1 \approx Gm/v^2 \approx R/N$, вместо (2.11) получим

$$\tau_R \approx \tau_c \approx R/v. \quad (2.13)$$

Итак, второе интересное отличие, вытекающее из первого, заключается в том, что два характерных времени — пересечения и медленной релаксации — не очень отличаются друг от друга. Это дает возможность утверждать, что собранные в диск звезды взаимодействуют друг с другом сильнее, чем звезды, свободно движущиеся в трехмерном пространстве.

Возвращаясь к трехмерному случаю, замечаем, что из соотношения (2.8) вытекает, будто среднеквадратичная скорость может неограниченно возрастать, хотя темп роста при этом падает как v^{-1} . Этого, конечно, не может

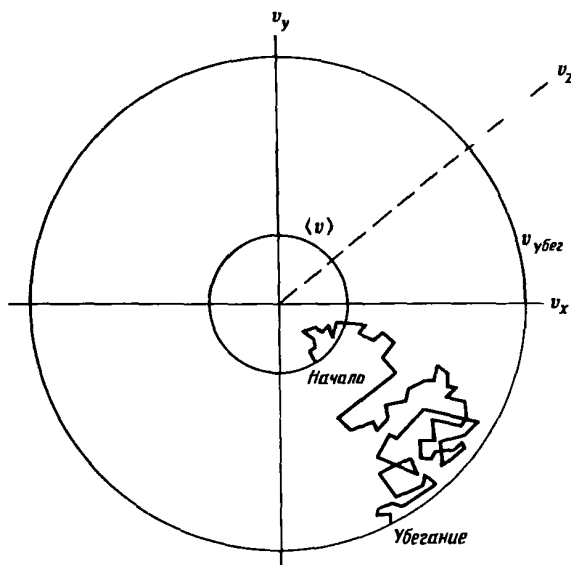


Рис. 2. Случайное блуждание звезды в пространстве скоростей от скорости $\langle v \rangle$ до скорости $v_{\text{убег}}$.

произойти, поскольку звезда в таком случае достигнет скорости «убегания» и уйдет за пределы скопления. Подробно это явление рассматривается в части III. Однако уже здесь можно сделать грубую оценку времени, в течение которого звезда приобретает такую скорость. В близком к равновесию скоплении характерная величина скорости убегания $v_{\text{убег}} \approx (4GM/R)^{1/2}$ в два раза выше дисперсии скоростей (см. гл. 45). Поэтому можно считать, что средняя звезда «испаряется», когда $\Delta v \approx v$, а это достигается, как видно из (2.9), как раз через время τ_R . Таким образом, τ_R можно рассматривать как время заметного изменения структуры скопления вследствие потери им своих членов.

Сколько «эффективных» сближений произойдет, прежде чем звезда достигнет скорости убегания? Вопрос сводится к задаче о случайном блуждании в пространстве скоростей с барьером поглощения, равным скорости убегания. Это случайное блуждание схематически изображено на рис. 2. Если распределение приращений скорости гауссово со средним значением, равным нулю, что означает отсутствие дрейфа в пространстве скоростей, и с дисперсией σ , то представляется физически достоверным (и может быть строго показано [см., например, *Cox and Miller, 1965*]), что ожидаемое число I приращений, предшествующих достижению звездой скорости убегания, определяется формулой

$$v_{\text{убег}} \approx \sigma \sqrt{I}. \quad (2.14)$$

При гауссовом распределении дисперсия скоростей σ является также наиболее

вероятным значением приращения скорости Δv . Его можно оценить, исходя из соотношений (2.2) и (2.3) при $m_1 = m_2$ и используя взвешенную по объему величину $1/b$ [аналогично выражению (1.7)]: $\langle b^{-1} \rangle = 3/2 R^{-1}$. Таким образом, $\sigma = \langle \Delta v \rangle = 6Gm/Rv$ и при $v_{\text{убег}} = 2v$ находим, что испарение звезды происходит после приблизительно

$$I = \frac{v_{\text{убег}}^2}{\sigma^2} = \frac{R^2 v^4}{9G^2 m^2} = \frac{N^2}{9} \quad (2.15)$$

столкновений. Здесь N , как и прежде, — число звезд в скоплении, а последнее равенство записано в предположении вириального равновесия системы.

Поскольку большинство сближений являются далекими и происходят между звездами, разделенными расстояниями порядка радиуса скопления, они никогда не завершаются до конца. Дальнодействующая природа гравитационных сил сообщает системам многих тел долгую «память» своей предыдущей истории. Поэтому соотношение (2.15) дает лишь очень приблизительное представление о числе сближений, большинство которых не имеет четко определенного начала и конца. Однако этот результат еще раз показывает, как очень большое число очень слабых далеких взаимодействий приводит к изменению природы скопления.

Хотя использованные до сих пор простые методы позволяют установить некоторые основные понятия и результаты, свойственные им ограничения очевидны. Эти методы не учитывают, например, корреляцию близлежащих орбит, а также более далекие коллективные эффекты. В том и другом случае приращения скорости распределены не по Гауссу. Более того, в этих моделях не учитывается то обстоятельство, что на периферии скопления звезды испытывают воздействие флуктуационных сил, отличных от тех, которые действуют на звезды в центре скопления. Но самый большой их недостаток связан с тем, что эти модели крайне трудно обобщить самосогласованным образом на более сложные системы, например на реальные неоднородные скопления.

Таким образом, нам необходим более полный способ описания системы многих тел. Чтобы установить некоторые необходимые понятия, мы введем сначала простые обобщения модели релаксации орбиты, рассмотрим некоторые их свойства, а затем перейдем к возможно более полному описанию задачи многих тел. Это описание будет настолько полным, что для получения той или иной полезной информации его снова придется сужать различными способами. Итак, в последующих главах будут разработаны математические основы описания задачи.

3. ДИНАМИКА СЛУЧАЙНЫХ МГНОВЕННЫХ СИЛ

Достойней покоряться пращам и стрелам яростной судьбы.

Шекспир

Как показано в предыдущих главах, можно считать, что объект в близкой к равновесию гравитирующей системе находится в поле флуктуирующих сил и

средней гравитационной силы. Рассмотрим теперь простую математическую модель, описывающую эволюцию орбит во времени. Эта интуитивная физическая картина позволяет достаточно простым путем прийти к пониманию сути вопроса. Преимущество такого подхода состоит в том, что он дает возможность сразу же выявить изменения в описании, необходимые для улучшения физической картины. Результаты всегда могут быть сопоставлены с численными экспериментами задачи многих тел; их более строгий вывод будет обсуждаться в гл. 10.

В простейшей модели движение звезды должно на первый взгляд описываться уравнением движения Ньютона с флуктуирующей во времени средней силой $\beta(t)$, которое имеет вид $m\dot{v} = \beta(t)$. Однако такое представление оказывается слишком упрощенным. Оно приводит к броуновскому движению скорости (при гауссовом распределении флуктуаций) с постоянно возрастающим среднеквадратичным значением $v_{\text{rms}} \sim t^{1/2}$. В соответствии с этим разность между среднеквадратичным значением координаты средней звезды и ее первоначальным значением монотонно возрастает. Эти два свойства противоречат принципу сохранения полной энергии, поскольку для компенсации увеличения кинетической энергии $\sim v_{\text{rms}}^2$ необходимо сжатие системы, которое привело бы к уменьшению ее потенциальной энергии. Однако броуновское возрастание среднеквадратичной координаты каждой звезды скопления по сравнению с исходным значением этой координаты предохраняет скопление от чрезмерного сжатия. Более того, ясно, что в этой модели отсутствует возможность даже стационарного состояния. Наличие жестких стационарных состояний гравитирующих систем не является очевидным на данном этапе рассмотрения, и, как будет показано в соответствующем месте, эти системы таких состояний не имеют. К тому же численное моделирование показывает, что звезды в гравитирующих системах не стремятся к бесконечному увеличению среднеквадратичных значений своих скоростей и координат. Кроме того, такие системы, как шаровые скопления и некоторые эллиптические галактики, вероятно, существовали в состоянии, близком к современному, в течение примерно 10^{10} лет. Это дает основания считать, что они достигли по крайней мере квазистационарного состояния того или иного типа или, во всяком случае, такого состояния, при котором время глобальной диффузии намного больше характерного времени флуктуаций, имеющего порядок $N/\sqrt{G\rho}$.

Эта простая модель, конечно, не учитывает влияние усредненной тормозящей силы. Звезда, которая движется быстрее своих соседей, отклоняет их орбиты таким образом, что средняя плотность числа звезд позади нее несколько превышает среднюю плотность в направлении движения. В результате избыточная гравитационная сила, возникающая позади звезды, стремится затормозить ее движение. Этот процесс известен как динамическое трение (см. гл. 4, 5, 13 и разд. 14.3, 17.2 и 40.3). Простейший прием, позволяющий избежать значительных ошибок в феноменологическом описании среднего движения звезды, состоит в введении возвращающей силы, пропорциональной скорости звезды. Таким образом, можно исследовать модельное уравнение, имеющее вид

$$m \frac{dv}{dt} = -\alpha v + \beta(t). \quad (3.1)$$

Такой подход был применен Ланжевеном еще в 1902 г. для описания броуновского движения, поэтому соотношение (3.1) называется обычно уравнением Ланжевена. Это один из первых примеров получения нового физического результата посредством простейшего адекватного математического описания явления — метод, блестяще развитый Эйнштейном в течение последующих двух десятилетий.

К каким следствиям приводит уравнение Ланжевена и как применить их к гравитирующим системам? Существуют интуитивный и строгий методы решения (3.1). Мы воспользуемся интуитивным методом, а также сделаем некоторые замечания о более строгом методе, который позволяет прояснить некоторые математические трудности, но приводит к тем же результатам. Затем опишем усложненный вариант интуитивного метода, который дает возможность сравнительно легко прояснить указанные трудности, а также допускает интересное обобщение.

Если соотношение (3.1) представляет собой обыкновенное линейное дифференциальное уравнение для каждой компоненты вектора, то его математическое решение имеет вид

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}(0) \exp\left(-\frac{\alpha}{m} t\right) + \frac{1}{m} \int_0^t \exp\left[-\frac{\alpha}{m}(t - \tau)\right] \boldsymbol{\beta}(\tau) d\tau \quad (3.2)$$

для любой звезды в заданный момент времени. Для определения средней скорости группы звезд в произвольный момент времени необходимо усреднить $\mathbf{v}(t)$. Поэтому следует уточнить характер флуктуирующей силы $\boldsymbol{\beta}(t)$. Это можно было бы сделать путем самосогласованного решения всей задачи звездной динамики в целом, но такая постановка вопроса пока еще преждевременна. Вместо этого попытаемся угадать основные свойства величины $\boldsymbol{\beta}(t)$, в частности ее первый и второй статистические моменты. Поскольку флуктуирующее поле возникает как сумма большого числа малых возмущений, можно сделать предположение о независимом характере этих возмущений. Положительные и отрицательные направления силы равновероятны, поэтому усредненное по времени значение $\boldsymbol{\beta}(\tau)$ равно нулю:

$$\langle \boldsymbol{\beta}(\tau) \rangle = 0. \quad (3.3)$$

Поскольку возмущения в разные моменты времени независимы, как и разные компоненты вектора силы, получим соотношение

$$\langle \beta_i(\alpha\tau/m) \beta_j(\alpha\tau'/m) \rangle = \alpha m \sigma^2 \delta[\alpha(\tau - \tau')/m] \delta_{ij}, \quad (3.4)$$

где σ^2 обозначает амплитуду (выбранную таким образом, чтобы она обладала размерностью [скорость]² · [время]⁻¹), а обычные дельта-функции в случае различия аргументов обращаются в нуль:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

$$\delta(x - x') = 0, \quad x \neq x',$$

$$\int \delta(x - x') dx = \begin{cases} 1, & \text{если область интегрирования включает } x', \\ 0, & \text{если область интегрирования не включает } x', \end{cases}$$

где $x \equiv \alpha t/m$. Это свойства гауссова стохастического процесса. Они встречаются во многих статистических задачах физики, поскольку просты по существу и, как показано в литературе по теории вероятностей, следуют из центральной предельной теоремы как естественный результат большинства процессов, включающих большое число независимых случайных величин.

Физический смысл сделанного нами предположения о независимости возмущений в (3.2) состоит в том, что эти возмущения не коррелированы на интервалах времени, превышающих любое характерное время данной задачи. В уравнении (3.2) фигурирует только одно характерное время — время релаксации m/α , за которое начальная скорость претерпевает существенное изменение. Это характерное время является одним из определяющих факторов экспоненциального веса, с которым флуктуирующая сила входит под знак интеграла в правой части уравнения (3.2). Но, поскольку сила $\beta(\tau)$ не коррелирована по времени, величина $v(t)$ в этом приближении не зависит от конкретной картины предшествующих флуктуаций.

Как можно оценить α/m ? Если бы флуктуирующая сила в соотношении (3.1) обратилась в нуль, величина m/α стала бы единственным характерным временем для возвращающей силы. С другой стороны, если бы отсутствовала возвращающая сила, характерным временем для флуктуирующей силы стало бы время диффузии τ_R , определяемое выражением (2.9). Если же действуют обе эти силы и их совместное действие должно привести к равновесному, близкому к стационарному состоянию, то их характерные времена должны быть приблизительно равны. Этот феноменологический довод приводит к соотношению

$$\frac{m}{\alpha} \approx \tau_R. \quad (3.5)$$

Поведение гравитирующих систем отличается от броуновского движения малых частиц, к которым обычно применяется уравнение Ланжевена. В случае малых частиц возвращающей силой служит вязкость и величина α определяется законом Стокса [см., например, *Einstein, 1953*].

В гравитирующих системах импульс не передается путем физических столкновений, так что понятие вязкости теряет свой обычный смысл. Это легко усматривается уже из того обстоятельства, что отношение средней длины свободного пробега $\lambda = 2/n\sigma$ относительно рассеяния на большие углы, сечение которого $\sigma \approx b_1^2 \approx G^2 m^2/v^4 \approx R^2/N^2$, к размеру системы составляет величину $O(N) \gg 1$. Для гравитационного рассеяния можно ввести эффективную вязкость η , которая удовлетворяла бы требованию, аналогичному соотношению Максвелла для релаксации газа $\tau_R = 2\eta v^2/\rho$. Однако это будет почти то же самое, что и наполнять новые мехи старым вином.

Теперь можно вывести некоторые основные свойства соотношения (3.1),

которые служат иллюстрацией и более общих идей. Сначала проинтегрируем (3.2) по t при $t > 0$ и $t > \tau$:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) = & \mathbf{x}_0 + \dot{\mathbf{x}}_0 m \alpha^{-1} \left[1 - \exp\left(-\frac{\alpha}{m} t\right) \right] \\ & + \alpha^{-1} \int_0^t \left\{ 1 - \exp\left[-\frac{\alpha}{m}(t-\tau)\right] \right\} \beta(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Это выражение справедливо для каждой звезды в отдельности. Для определения координаты типичной звезды следует усреднить его по большой совокупности звезд. Вспоминая соотношение (3.3), получаем

$$\langle \mathbf{x}(t) \rangle = \mathbf{x}_0 + \dot{\mathbf{x}}_0 m \alpha^{-1} (1 - e^{-\alpha t/m}). \quad (3.7)$$

Аналогично из уравнения (3.2) следует

$$\langle \mathbf{v}(t) \rangle = \mathbf{v}_0 e^{-\alpha t/m}. \quad (3.8)$$

Таким образом, в результате действия случайных сил средняя скорость группы звезд падает от своего начального значения до нуля за характерное время $m/\alpha \approx \tau_R$. На малых интервалах времени t средняя координата звезды начинает возрастать пропорционально $\dot{\mathbf{x}}_0 t = \mathbf{v}_0 t$, но на больших интервалах разница между ее текущим и первоначальными значениями достигает асимптотической величины.

Средняя координата, однако, не совпадает со средней квадратичной координатой — это хорошо известное свойство броуновского движения. Поскольку вклад в среднюю координату вносят как положительные, так и отрицательные перемещения, ее значение будет намного ниже, чем у среднеквадратичной координаты; будут различаться между собой и их эволюции во времени. Все сказанное справедливо и в отношении среднеквадратичной скорости, которую можно вычислить, исходя из уравнения (3.2):

$$\begin{aligned} \langle v^2(t) \rangle = & v_0^2 e^{-2\alpha t/m} + \frac{1}{m^2} \int_0^t \int_0^t \langle \beta(\tau) \cdot \beta(\tau') \rangle \exp\left[-\frac{\alpha}{m}(t-\tau+t-\tau')\right] d\tau d\tau' \\ = & v_0^2 e^{-2\alpha t/m} + \frac{\sigma^2 m}{2\alpha} (1 - e^{(-2\alpha/m)t}). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Появляющиеся перекрестные члены исчезают после усреднения с помощью соотношения (3.3), а для вычисления интеграла мы перешли к безразмерной переменной $x = \alpha\tau/m$ и воспользовались соотношением (3.4). Таким образом, на больших интервалах времени $t > \tau_R$ среднеквадратичная скорость $\langle v^2(t) \rangle^{1/2}$, или дисперсия скоростей, релаксирует к равновесному значению $\sigma(m/2\alpha)^{1/2}$, даже если средняя скорость равна нулю. Аналогичный расчет

среднеквадратичной координаты при $x_0 = 0$ дает

$$\begin{aligned} \langle x^2(t) \rangle &= v_0^2 m^2 \alpha^{-2} (1 - 2e^{-\alpha t/m} + e^{-2\alpha t/m}) \\ &+ \frac{m^3 \sigma^2}{2\alpha^3} (2\alpha m^{-1} t - 3 + 4e^{-\alpha t/m} - e^{-2\alpha t/m}). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Разложение экспоненциальных членов в ряд для малых значений времени показывает, что при $t \ll m/\alpha$ получается соотношение $\langle x^2 \rangle^{1/2} \approx v_0 t$, и мы имеем фактически обычное обратное движение. Для интервалов значительно большей длительности получим

$$\langle x^2 \rangle^{1/2} \approx \tau_R^{3/2} \left(\frac{\alpha t}{m} \right)^{1/2} \sigma, \quad (3.11)$$

и в наше описание войдет необратимость как результат усреднения флуктуирующих сил.

Приведенные соотношения описывают броуновское движение средней звезды. Этому движению присущи многие замечательные свойства, изложенные в литературе по стохастическим процессам. Если, например, вы будете достаточно долго следить за движением броуновской частицы, то в конце концов она своей траекторией вычертит ваше собственное имя, причем сколь угодно разборчиво. Более того, его можно будет обнаружить не только в одном определенном масштабе, но и при любом увеличении масштаба. В этой траектории можно будет различить не только ваше имя, но и все, что когда-либо было написано, а также все, что будет написано в будущем. Единственная (но какая!) проблема здесь состоит в выделении сигнала из шума. Эти результаты вытекают непосредственно из некоррелированной природы броуновского движения, а основной принцип здесь тот же, что и в известном примере с обезьянами, которые «печатают» на машинке сколь угодно долгое время, наобум нажимая на клавиши. Есть и более тонкие свойства броуновского движения, например способность броуновских траекторий заполнять одно- и двумерное (но не трехмерное!) пространства.

Начиная анализ уравнения Ланжевена, мы упомянули о его математической противоречивости, хотя оно и ведет к правильным результатам. Теперь мы можем показать, почему это так. В уравнение Ланжевена входит производная скорости, и его решение предполагает, что среднее значение этой производной существует и равно производной среднего значения (поскольку усреднение производится по ансамблю, а не по времени). Но этой производной не существует! Полагая $v_0 = 0$, из соотношения (3.9) получаем, что

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \langle v^2(t) \rangle^{1/2}}{\Delta t} \sim \frac{(\Delta t)^{1/2}}{\Delta t} \sim \frac{1}{(\Delta t)^{1/2}} \quad (3.12)$$

равен бесконечности. Физический смысл этого противоречия состоит в том, что на очень коротких временных интервалах последовательные движения

коррелированы и предположение, выраженное соотношением (3.4), неправомерно. Его можно было бы заменить корреляционной функцией более общего вида с памятью. Другим вариантом могла бы быть постановка вытекающей из соотношения (3.4) определенной математической задачи, последовательное решение которой достигается переопределением понятий стохастических производных и интегралов. Оба этих подхода, подробно рассматриваемые в отличном обзоре Фокса (Fox, 1978), позволяют более строго обосновать те важные физические результаты, о которых говорилось выше.

Здесь, однако, мы пойдем по другому пути, воспользовавшись одним из основных инструментов исследования в звездной динамике — уравнением Фоккера — Планка. В последующих главах это уравнение будет выведено из фундаментальных физических принципов, а сейчас покажем, как оно естественным образом вытекает из уравнения Ланжевена и приводит к эквивалентному решению.

Чтобы наиболее просто продемонстрировать это, запишем уравнение Ланжевена (3.1) для одномерного случая:

$$dv = a(v, t)dt + Z(t)\sigma(v, t)\sqrt{dt}. \quad (3.13)$$

Это — стохастическое дифференциальное уравнение в том виде, как его рассматривал Ито (Ито, 1951). Из него следует, что изменение скорости $v(t)$ [или, точнее, изменение стохастической функции $v(t)$, которая принимает значения $v(t) = v$] за короткий интервал времени dt вызвано двумя причинами. Первая состоит в непрерывном воздействии, средний результат которого равен $a(v, t)dt$; ему соответствует ответственный за трение член $-\alpha v$ (в расчете на единицу массы). Вторая связана с воздействием стохастической силы $Z(t)$, приводящей к пропорциональному $\sigma t^{1/2}$ изменению скорости с дисперсией σ^2 [см. соотношение (3.11)].

Теперь, вместо того чтобы решать уравнение (3.13) относительно самой величины v , решим его относительно распределения v , обусловленного случайными силами. Это распределение количественно описывается зависящей от времени функцией плотности $f(v, t)$, причем величина $f(v, t)dv$ равна вероятности того, что скорость заключена в малом интервале значений от v до $v + dv$. Эта вероятность, разумеется, изменяется от 0 до 1, а функция $f(v, t)$ имеет не более чем конечное число ступенчатых разрывов и нормирована таким образом, что интеграл от нее по всему пространству скоростей равен единице. Мы можем также определить ее в некоторый начальный момент времени. Предположим, что нам удалось найти $f(v, t)$. Тогда с ее помощью можно для любого момента времени рассчитать математическое ожидание (среднее) величины v (или какой-либо другой переменной)

$$E(v) = \bar{v}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} v f(v, t) dv \quad (3.14)$$

и ее дисперсию

$$E((v - \bar{v})^2) = \int_{-\infty}^{\infty} (v - \bar{v})^2 f(v, t) dv. \quad (3.15)$$

Эти величины являются фактически моментами f относительно v ; существует более простой, чем трудоемкое интегрирование, способ их вычисления. Действительно, достаточно применить к f двустороннее преобразование Лапласа

$$f^*(\Theta, t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\Theta v} f(v, t) dv, \quad * \quad (3.16)$$

как все моменты f получаются путем дифференцирования f^* при $\Theta = 0$:

$$\left. \frac{\partial^n f^*(\Theta, t)}{\partial \Theta^n} \right|_{\Theta=0} = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} v^n f(v, t) dv = (-1)^n E(v^n). \quad (3.17)$$

Таким образом, математическое ожидание величины $e^{-\Theta v}$ является характеристической функцией для моментов относительно v .

Изменение функции распределения во времени может быть записано двумя способами, а приравнивание соответствующих результатов даст уравнение Фоккера — Планка (названное не по имени своего открывателя лорда Рэлея). Во-первых, непосредственно из (3.16) получаем

$$\frac{\partial f^*(\Theta, t)}{\partial t} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\Theta v} \frac{\partial f(v, t)}{\partial t} dv. \quad (3.18)$$

Во-вторых, вернемся к исходному определению производной:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f^*}{\partial t} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta f^*}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} [f^*(\Theta, t + \Delta t) - f^*(\Theta, t)] \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} E[e^{-\Theta(v(t) + \Delta v(t))} - e^{-\Theta v(t)}]. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Стохастическое уравнение Ланжевена (3.13) описывает величину Δv в пределе при $\Delta t \rightarrow 0$ при фиксированном v , так как Δv зависит от v . Кроме того, поскольку математическое ожидание от математического ожидания представляет собой первоначальное математическое ожидание, можно переписать математическое ожидание из (3.19) в виде

$$\begin{aligned} E[(e^{-\Theta \Delta v(t)} - 1)e^{-\Theta v(t)}] &= \int_{-\infty}^{\infty} E[(e^{-\Theta \Delta v(t)} - 1)e^{-\Theta v(t)}] f(v, t) dv \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} E[e^{-\Theta \Delta v(t)} - 1] e^{-\Theta v(t)} f(v, t) dv. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Для вычисления математического ожидания в правой части этого уравнения воспользуемся уравнением (3.13) и учтем, что $E[Z(t)] = 0$, $E[Z^2(t)] = 1$ и $E[Z^3(t)] = O(1)$. Подставляя Δv из соотношения (3.13) в (3.20), разлагая экс-

попенту $e^{-\Theta \Delta v}$ в ряд и интегрируя, получаем с точностью до членов первого порядка малости по Δt :

$$E[e^{-\Theta \Delta v(t)} - 1] = -\Theta a(v, t) \Delta t + \frac{\Theta^2}{2} \sigma^2(v, t) \Delta t. \quad (3.21)$$

Подставляя выражения (3.21) и (3.20) обратно в (3.19) и переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, получаем

$$\frac{\partial f^*}{\partial t} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[-\Theta a(v, t) + \frac{\Theta^2}{2} \sigma^2(v, t) \right] e^{-\Theta v} f(v, t) dv. \quad (3.22)$$

Чтобы привести правую часть этого уравнения к виду, сходному с (3.18), проинтегрируем ее дважды по частям:

$$\frac{\partial f^*}{\partial t} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\Theta v} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial v^2} (\sigma^2 f) - \frac{\partial}{\partial v} (a f) \right] dv. \quad (3.23)$$

Здесь мы воспользовались тем, что на пределах интегрирования функция распределения быстро убывает. Приравнявая подынтегральные выражения в уравнениях (3.18) и (3.23), получаем окончательно

$$\frac{\partial f(v, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial v} [a(v, t) f(v, t)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial v^2} [\sigma^2(v, t) f(v, t)]. \quad (3.24)$$

Это и есть уравнение Фоккера — Планка. Оно описывает эволюцию во времени функции распределения скорости, которая является решением уравнения Ланжевена. Этот подход легко обобщить на случай шестимерной функции распределения в пространстве скоростей и координат. Другие стохастические уравнения также приводят к тем или иным разновидностям уравнения Фоккера — Планка. В разд. 40.3 будет показано, как его можно применить к сферическим звездным системам.

4. ОБЩИЕ СВОЙСТВА ФОККЕР-ПЛАНКОВСКОЙ ЭВОЛЮЦИИ

Прежде чем перейти к наиболее интересным с точки зрения гравитирующих систем специальным аспектам, полезно получить представление об общих свойствах простого одномерного фоккер-планковского описания. Прежде всего заметим, что, если сила трения $a(v, t)$ в соотношении (3.24) обращается в нуль, а дисперсия скоростей σ не зависит от скорости, уравнение Фоккера — Планка превращается в обычное уравнение диффузии

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}, \quad (4.1)$$

правда, для функции плотности в пространстве скоростей. С точки зрения фе-
2 Заказ 30

номенологии в основе уравнения диффузии лежит предположение о некоторой величине, например плотности массы ρ , имеющей поток $\rho \mathbf{v} = \mathbf{J}$, пропорциональный ее градиенту:

$$\mathbf{J} = -D \nabla \rho. \quad (4.2)$$

Здесь D — «коэффициент диффузии», зависящий от характерных свойств взаимодействующих частиц, которые должны удовлетворять уравнению непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{J}, \quad (4.3)$$

поскольку они не создаются и не исчезают, а лишь переносятся через систему. Применив операцию дивергенции к обеим частям равенства (4.2) и подставив сюда $\nabla \cdot \mathbf{J}$ из (4.3), сразу получим уравнение, аналогичное (4.1).

Поскольку в уравнение диффузии входит производная по времени только первого порядка, описываемый этим уравнением процесс необратим. Применение такого способа описания к звездной системе привело бы к тому, что энергия звезд не сохранялась бы, как об этом уже упоминалось в начале гл. 3. Энтропия такой системы также не достигла бы определенного равновесного значения, а возрастала бы постоянно. Чтобы показать это и использовать эффективную методику получения информации из дифференциального уравнения в частных производных, умножим обе части уравнения (4.1) на v^2 и проинтегрируем по всему пространству скоростей (бесконечные пределы носят в действительности символический характер и в большинстве случаев не создают затруднений, так как функция распределения убывает достаточно быстро). Это простой пример вычисления моментов уравнения, и, поскольку момент функции $f(v, t)$ второго порядка количества относительно скоростей представляет собой удвоенную среднюю энергию (на единицу массы), его следует запомнить:

$$\int_{-\infty}^{\infty} v^2 \frac{\partial f}{\partial t} dv = \frac{\partial}{\partial t} \langle v^2 \rangle = \frac{\sigma^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} v^2 \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} dv = \sigma^2. \quad (4.4)$$

Правая часть (4.1) была дважды проинтегрирована по частям с учетом условия нормировки $\int_{-\infty}^{\infty} f(v, t) dv = 1$. Из последнего уравнения видно, что при введении распределения по скоростям в систему с нулевой начальной скоростью звезды начинают диффундировать со средней энергией на единицу массы $1/2 \langle v^2 \rangle = \sigma^2 t / 2$ — известный результат броуновского движения. Действительно, тот же результат следует из подхода Ланжевена, для чего достаточно в уравнении (3.9) перейти к пределу при $\alpha \rightarrow 0$ при любом заданном значении времени.

Нетрудно доказать и постоянное возрастание энтропии вследствие диффузии. В литературе по статистической механике показано, что для слабозадействующих классических систем (напомним, что о гравитирующих системах речь пока не идет) энтропия S связана с функцией распределения

соотношением

$$S = - \int_{-\infty}^{\infty} f(v, t) \ln f(v, t) dv \quad (4.5)$$

(о других свойствах энтропии см. гл. 10 и 29). Дифференцируя последнее равенство по времени, используя уравнение (4.1) и интегрируя один раз по частям в предположении, что градиент f на пределах интегрирования равен нулю, получаем

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\sigma^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f^{-1} \left(\frac{\partial f}{\partial v} \right)^2 dv. \quad (4.6)$$

Поскольку $f > 0$ и $\partial f / \partial v \neq 0$ на конечном интервале скоростей, имеем $dS/dt > 0$. Аналогичное доказательство можно провести, исходя из уравнения Фоккера — Планка. Это простые случаи H -теоремы Больцмана, которая может быть доказана вполне строго и с большой степенью общности.

Рассмотрим теперь стационарный вариант уравнения (3.24), т. е. положим $\partial f / \partial t = 0$. В любом малом элементе объема диффузия наружу уравновешивается потоком частиц, диффундирующих внутрь объема и теряющих свою энергию благодаря динамическому трению. Таким образом, функция распределения частного вида, описывающая данный случай, находится в равновесии и не ведет более к возрастанию энтропии. Если величины f , σ , a не зависят от времени, то уравнение (3.24) легко решается, коль скоро определен конкретный вид зависимости $\sigma(v)$ и $a(v)$ от скорости. Наиболее простой вид функции σ — не зависящая от скорости в любой точке системы постоянная. При правильно выбранной функции $a(v)$ такое равновесие означает изотермическое распределение, которое, как известно, применяется, например, к слабосвязанному газу. Однако к гравитирующим системам оно в общем случае неприменимо; в качестве первого приближения его применение возможно лишь к очень медленно — в масштабе динамического времени столкновения — эволюционирующим системам (если, например, эволюция является результатом испарения звезд). Если принять $\sigma = \text{const}$, то возникает необходимость найти соответствующий вид $a(v)$ — члена, описывающего трение в стационарном состоянии. В том случае, если он не зависит от скорости, из (3.13) следует, что за короткий интервал времени скорость каждого объекта системы изменится на одну и ту же величину. При постоянном значении $a > 0$, например, как положительные, так и отрицательные скорости объектов изменятся в сторону больших положительных скоростей. Очевидно, что тот же эффект даст и любая дополнительная зависимость $a(v)$ от четных степеней v . Но если a зависит только от нечетных степеней v с отрицательными коэффициентами, то как отрицательные, так и положительные скорости уменьшатся по абсолютной величине. Если разложить $a(v)$ по нечетным степеням v , то феноменологическую формулу $a = -\alpha v$ (в расчете на единицу массы) можно рассматривать как первый член этого разложения, представляющий динамическое трение в наиболее простом виде. В ланжевеновском подходе содержится интуитивное понимание этого факта.

Приняв коэффициенты $f(v)$ в указанном виде, получим нормированное решение стационарного уравнения Фоккера — Планка:

$$f(v) = \sigma^{-1} (\alpha/\pi)^{1/2} e^{-(\alpha/\sigma^2)v^2}. \quad (4.7)$$

Такой результат неудивителен, ибо представляет собой не что иное, как распределение Максвелла — Больцмана. Его вывод из уравнения Фоккера — Планка делает очевидным влияние подробных предположений относительно кинетики движения на конкретный вид равновесного состояния.

Основное преимущество такого подхода состоит, без сомнения, в том, что он позволяет исследовать отклонения от равновесного состояния. Что касается линейных отклонений, то такое исследование можно провести с помощью уравнения (3.24), предполагая временную зависимость и вводя постоянные коэффициенты:

$$\frac{\partial f(v, t)}{\partial t} = \alpha \frac{\partial}{\partial v} (vf) + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}. \quad (4.8)$$

Нелинейные отклонения потребовали бы учета членов более высокого порядка в разложении уравнения Фоккера — Планка (3.24), а в некоторых случаях — введения совершенно новых механизмов релаксации. Уравнение (4.8) является уравнением второго порядка в частных производных, которое легче всего решается следующим высокoeffективным методом. Применяя к (4.8) фурье-преобразование

$$f^*(\xi, t) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi v} f(v, t) dv, \quad (4.9)$$

понижаем его порядок на единицу. Затем решаем дифференциальное уравнение для фурье-образа функции распределения и применяем к нему обратное фурье-преобразование

$$f(v, t) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi v} f^*(\xi, t) d\xi. \quad (4.10)$$

В результате умножения (4.8) на $(2\pi)^{-1/2} e^{-i\xi v}$ и интегрирования по всему пространству скоростей с применением интегрирования по частям один раз к первому члену правой части и два раза — ко второму видим, что $f^*(\xi, t)$ удовлетворяет уравнению первого порядка

$$\frac{\partial f^*}{\partial t} + \alpha \xi \frac{\partial f^*}{\partial \xi} = -\frac{1}{2} \sigma^2 \xi^2 f^*. \quad (4.11)$$

Это простейшая форма уравнения в частных производных, решение которого приводится во многих учебниках. Функция $f^*(t, \xi)$ определяет над $t - \xi$ -плоскостью некоторую поверхность. Так как

$$0 = \frac{\partial f^*}{\partial t} dt + \frac{\partial f^*}{\partial \xi} d\xi - df^* \equiv$$

$$\equiv f_t^* dt + f_\xi^* d\xi - df^*, \quad (4.12)$$

в любой точке этой поверхности существует нормаль $(f_t^*, f_\xi^*, -1)$. Кроме того, как следует из уравнения (4.11), скалярное произведение

$$(1, \alpha\xi, -\frac{1}{2}\sigma^2\xi^2 f^*) \cdot (f_t^*, f_\xi^*, -1) = 0,$$

поэтому вектор

$$(1, \alpha\xi, -\frac{1}{2}\sigma^2\xi^2 f^*)$$

перпендикулярен нормали и является касательным поверхности. Последнее означает, что он параллелен малому элементу поверхности $(dt, d\xi, df^*)$, так что можно написать

$$\frac{dt}{1} = \frac{d\xi}{\alpha\xi} = \frac{df^*}{-\frac{1}{2}\sigma^2\xi^2 f^*}. \quad (4.13)$$

Таким образом, решения уравнений (4.13), известные как характеристические кривые (характеристики), заполняют поверхность $f^*(t, \xi)$, удовлетворяющую уравнению (4.11). Решение двух простых независимых обыкновенных дифференциальных уравнений (4.13) приводит к появлению двух констант интегрирования, например, η и ϕ , в результате чего получаем

$$\xi = \eta e^{at}, \quad (4.14a)$$

$$f^* = \phi e^{-\sigma^2\xi^2/4\lambda}. \quad (4.14b)$$

На двумерной поверхности, однако, должна существовать возможность перехода с одной характеристики на другую посредством изменения ровно одного параметра (скажем, расстояния на поверхности между выбранными на разных характеристиках точками). Поэтому решение (4.14) может содержать самое большее один свободный параметр, и одна из констант интегрирования должна быть функцией другой. Итак, в качестве общего решения уравнения (4.11) получаем

$$f^*(\xi, t) = \phi(\eta) e^{-\sigma^2\xi^2/4\lambda} = \phi(\xi e^{-at}) e^{-\sigma^2\xi^2/4\lambda}, \quad (4.15)$$

где ϕ представляет теперь произвольную функцию (соответствующую произвольной константе интегрирования в решениях обыкновенных дифференциальных уравнений).

В нашем случае произвольная функция определяется начальными условиями, примером которых может служить предположение об одинаковой начальной скорости v_0 всех объектов системы:

$$f(v, 0) = \delta(v - v_0). \quad (4.16)$$

Тогда из соотношения (4.9) следует

$$f^*(\xi, 0) = (2\pi)^{-1/2} e^{-iv_0\xi}. \quad (4.17)$$

Подставив уравнение (4.17) в (4.15) при $t = 0$, получим

$$\phi(\xi) = (2\pi)^{-1/2} e^{-iv_0\xi + \sigma^2\xi^2/4\lambda}. \quad (4.18)$$

Следовательно,

$$\phi(\xi e^{-\alpha t}) = (2\pi)^{-1/2} e^{-i v_0 \xi \exp(-\alpha t) + \sigma^2 \xi^2 \exp(-2\alpha t)/4\alpha}, \quad (4.19)$$

и из соотношения (4.15) для произвольного значения t получим

$$f^*(\xi, t) = (2\pi)^{-1/2} e^{-i v_0 \xi \exp(-\alpha t) - \sigma^2 \xi^2 [1 - \exp(-2\alpha t)]/4\alpha}. \quad (4.20)$$

Не прибегая к обратному фурье-преобразованию, определенные выводы можно сделать уже из вида функции $f^*(\xi, t)$. Заметим, что фурье-образ (4.9), как и преобразование Лапласа (3.16), является для величины v характеристической функцией. Произведя те же вычисления, что и ранее, найдем, что момент первого порядка — средняя скорость — уменьшается со временем, согласно соотношению

$$E(v) = \langle v(t) \rangle = v_0 e^{-\alpha t}, \quad (4.21)$$

и может стать сколь угодно малым. Однако дисперсия скоростей возрастает до тех пор, пока не достигнет отличного от нуля равновесного значения

$$\langle (v - \langle v \rangle)^2 \rangle = \frac{\sigma^2}{2\alpha} (1 - e^{-2\alpha t}), \quad (4.22)$$

как того и следует ожидать в случае броуновского движения [см. уравнения (3.8) и (3.9) в расчете на единицу массы].

На этом этапе рассмотрения легко выполнить обратное преобразование (4.10), умножая (4.20) на содержащую ξ экспоненту и интегрируя. Выпишем нормированное окончательное решение

$$f(v, t) = \left[\frac{\alpha}{\pi \sigma^2 (1 - e^{-2\alpha t})} \right]^{1/2} \exp \left[- \frac{\alpha (v - v_0 e^{-\alpha t})^2}{\sigma^2 (1 - e^{-2\alpha t})} \right]. \quad (4.23)$$

Оно представляет собой не что иное, как зависящее от времени гауссово распределение. За время, намного превышающее характерное время релаксации α^{-1} , оно превратится в распределение Максвелла — Больцмана (4.7). А в самом начале функция $f(v, t)$ имеет вид очень узкого гауссова пика с центром в точке $v = v_0$, который постепенно сдвигается к $v = 0$, все время сохраняя гауссову форму. Эта эволюция показана на рис. 3.

В каком-то смысле такой тип эволюции во времени предполагает минимальное отклонение от конечного равновесия, поскольку сохраняет неизменным характер распределения. Более сложные начальные условия можно аппроксимировать суммой дельта-функций, каждая из которых сдвигается к $v = 0$ и уменьшается в соответствии с (4.23), ибо уравнение Фоккера — Планка линейно по f . Разные моды в этом описании не взаимодействуют. Если вспомнить содержание центральной предельной теоремы статистики, станет ясно, что наше исследование ведет к более общим результатам. В центральной предельной теореме утверждается, что если имеется совокупность независимых случайных величин, распределенных с одинаковым математическим ожиданием, но с разной дисперсией, и если сумма этих дисперсий намного

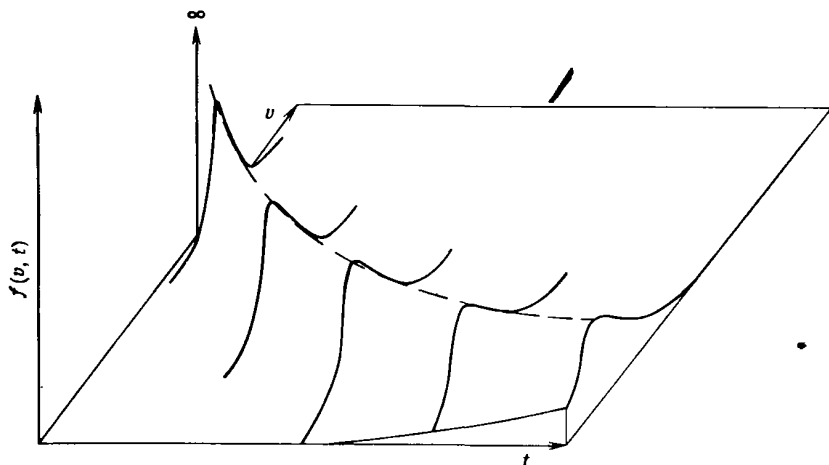


Рис. 3. Схематическое изображение эволюции во времени функции $f(v, t)$.

превышает каждую из них в отдельности, то распределение всей совокупности этих величин по мере роста их числа стремится к гауссову. Таким образом, если большое число групп скоростей с начальным распределением в виде дельта-функций δ эволюционирует независимо друг от друга к $v = 0$, то их суммарное распределение — полное распределение скорости в системе — будет представляться единственной гауссовой кривой, эволюционирующей во времени (но не суперпозицией многих гауссовых кривых), причем центр ее сместится в конце концов в точку $v = 0$. Это соответствует состоянию предельной релаксации. И хотя гравитирующие системы никогда не достигают этого состояния, они интенсивно стремятся к нему. Важно понять эту конечную «цель», ибо тенденция к ее достижению определяет многие свойства гравитирующих систем.

Другой полезный способ рассмотрения уравнения Фоккера — Планка предполагает введение элементов переходов. Возьмем опять в качестве примера одномерную функцию распределения $f(v, t)$. Она определяется вероятностью того, что в момент t звезда имеет скорость v . Через интервал времени δt в результате взаимодействий между звездами образуется новая функция распределения $f_*(v', t + \delta t)$. Звезда с первоначальной скоростью v может приобрести теперь скорость v' . Форма функции распределения также может измениться. Было бы разумным считать, что существует вероятность перехода $W(v, v')$ данной системы за этот интервал времени от распределения скоростей $f(v, t)$ к $f_*(v', t + \delta t)$. Такое предположение сопряжено, однако, с незаметными на первый взгляд трудностями. Действительно, при таком подходе считается, что переход от v к v' зависит только от величины v в данный момент и не зависит от значений v во время предшествующей эволюции системы (в статистике это называется марковским свойством). На микроскопическом уровне

это означает, что переходы происходят только при мгновенных столкновениях и система не имеет памяти. Хотя следующее за формулой (2.15) рассуждение заставляет считать такое условие лишь очень грубым для гравитирующей системы приближением, это условие обеспечивает понимание ситуации, которое лежит в основе многочисленных расчетов, выполненных для шаровых скоплений и ядер галактик. Позже мы увидим, каким образом оно может быть модифицировано.

Пользуясь понятием вероятности перехода $W(v, v')$, мы можем описать изменение распределения скоростей за время δt как следствие двух процессов. Во-первых, существует вероятность того, что звезда, обладающая скоростью v' в момент $t - \delta t$, к моменту t будет иметь скорость v . Она равна вероятности того, что звезда имела скорость v , умноженной на вероятность того, что переход от v' к v совершился, или $f_*(v', t - \delta t)W(v', v)\delta t$. Во-вторых, существуют звезды со скоростью v в момент t , скорость которых к моменту $t + \delta t$ станет равной v' , а вероятность того, что это произойдет, составляет $f(v, t)W(v, v')\delta t$. Эти процессы рассеяния показаны на рис. 4. Интегрируя их по всем возможным скоростям v' , получаем полное приращение и потерю числа звезд, имеющих скорость v . Вычитая второе из первого и переходя к пределу при $\delta t \rightarrow 0$, получаем общую мгновенную скорость изменения функции распределения

$$\frac{\partial f(v, t)}{\partial t} = \int_{-\infty}^{\infty} [f_*(v', t)W(v', v) - f(v, t)W(v, v')] dv'. \quad (4.24)$$

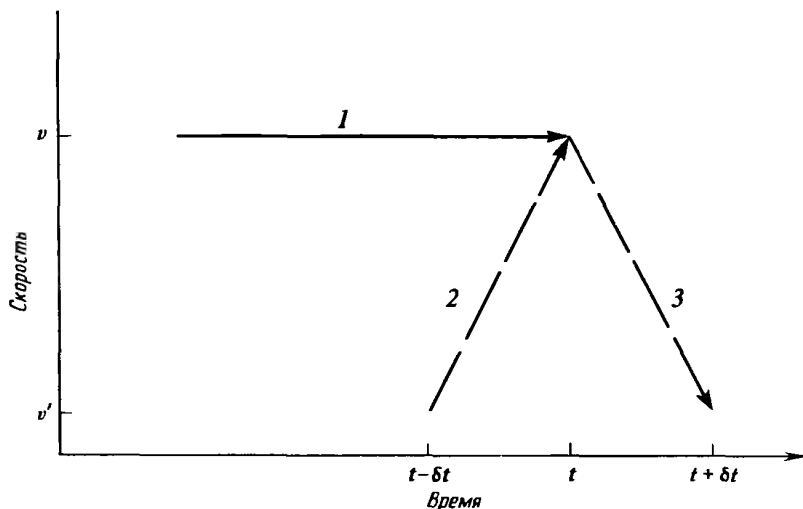


Рис. 4. Процессы рассеяния, входящие в основное кинетическое уравнение (1 — отклонение отсутствует; 2 — рассеяние с переходом от скорости v' к v ; 3 — рассеяние с переходом от скорости v к v').

Это соотношение известно как «основное кинетическое уравнение» и является пока совершенно формальным, так как никакого физического смысла, если не считать предположения о марковском свойстве, не имеет.

Чтобы вдохнуть жизнь в эту схему, выясним прежде всего некоторые общие свойства функции W . Вблизи равновесия скорость звезды редко изменяется за короткое время на значительную величину. Поэтому $W(v', v)$ можно рассматривать как имеющую острый пик функцию разности $\Delta v = v' - v$ и v либо v' . В состоянии равновесия $f_*(v, t) = f(v, t)$ и $W(v', v) = W(v, v')$, откуда, как и следовало ожидать, $\partial f / \partial t = 0$. Итак, мы начинаем с предположения, что в непосредственной близости от равновесия $f_* \approx f$, а поток звезд между разными скоростями настолько близок к обратному, что $W(v', v) \approx W(v, v')$.

Поскольку разница между f_* и f невелика, разложим f_* в ряд Тейлора в точке f :

$$f_*(v', t) = f(v, t) - \left. \frac{\partial f(v', t)}{\partial v'} \right|_v \Lambda + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial v'^2} \right|_v \Lambda^2 + \dots, \quad (4.25)$$

где

$$\Lambda = v' - v = \Delta v. \quad (4.26)$$

Мы считаем приращение скорости в (4.25) отрицательным, чтобы получить обычное «прямое» уравнение Фоккера — Планка. Как показывает более строгий вывод (который можно найти в литературе по теории вероятностей и стохастическим процессам), отрицательное приращение скорости обеспечивает дифференцирование с учетом направления интервала времени δt . Положительное приращение скорости привело бы к соответствующему «обратному» уравнению (Колмогорова), с помощью которого начальное распределение вероятности можно найти по заданному конечному состоянию.

Рассмотрение функции W позволит нам сделать следующий шаг. Ее разложение может быть записано в виде

$$W(v', \Lambda) = W(v, \Lambda) - \frac{\partial W(v, \Lambda)}{\partial v} \Lambda + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial v^2} \Lambda^2 + \dots \quad (4.27)$$

Отбрасывая члены разложения выше второго порядка малости, мы лишним раз говорим о близости системы к равновесию. Вдали от него рассеяние на большие углы становится существенным и описание с помощью ряда Тейлора перестает быть адекватным. Подставляя выражения (4.25) — (4.27) в (4.24) и интегрируя по Λ , получаем уравнение Фоккера — Планка (3.24), но уже с

$$a(v) = \int_{-\infty}^{\infty} \Lambda W(v, \Lambda) d\Lambda = \langle \Delta v \rangle, \quad (4.28)$$

понимаемым как среднее приращение скорости в единицу времени, и с

$$\sigma^2(v) = \int_{-\infty}^{\infty} \Lambda^2 W(v, \Lambda) d\Lambda = \langle (\Delta v)^2 \rangle, \quad (4.29)$$

понимаемым как среднеквадратичное приращение скорости за единичный интервал времени.

Этот вывод показывает в явном виде, каким образом вычисленные с помощью вероятности перехода первый и второй моменты определяют функцию распределения. Он также хорошо иллюстрирует то обстоятельство, что справедливость уравнения Фоккера — Планка зависит как от наличия у системы марковского свойства, так и от близости ее к равновесию. Те или иные изменения в формализме позволяют легко учитывать небольшие отклонения от этих условий. Однако для учета существенных нелинейных отклонений такие изменения недостаточны.

5. ФОККЕР-ПЛАНКОВСКОЕ ОПИСАНИЕ ГРАВИТИРУЮЩИХ СИСТЕМ

До сих пор мы рассматривали в качестве иллюстрации лишь одномерное уравнение Фоккера — Планка. Применение его к гравитирующим системам требует обобщения на большее число измерений, причем среднее приращение скорости должно представлять гравитационное рассеяние.

Обобщение на большее число измерений необходимо потому, что функция распределения зависит лишь от модуля скорости v только в абсолютно изотропных системах. При появлении анизотропии функция распределения принимает вид $f = f(v_1, v_2, v_3, t)$. Аналогичным образом зависимость стационарной вероятности перехода W от скорости принимает вид $W = W(v_1, v_2, v_3, v'_1, v'_2, v'_3)$. Выводы предыдущего раздела с использованием разложения в ряд Тейлора легко видоизменить с целью обобщения уравнения (3.24) на анизотропное или N -мерное распределение:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = - \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial v_i} [a_i(v_1, \dots, v_N) f] + \frac{1}{2} \sum_{j,k} \frac{\partial^2}{\partial v_j \partial v_k} [\sigma_{jk}^2(v_1, \dots, v_N) f]. \quad (5.1)$$

Коэффициенты a_i и σ_{jk}^2 здесь определяются аналогично (4.28) и (4.29).

Посмотрим теперь, как с помощью a_i и σ_{jk}^2 можно описать эффекты большого числа гравитационных рассеяний на малый угол. При каждом парном взаимодействии происходит изменение относительной скорости $u = |v'_i - v_i|$ на угол θ в системе центра масс. Поскольку сила этого взаимодействия подчиняется закону обратных квадратов, отнесенная к единице телесного угла эффективная площадь, на которой происходит рассеяние, представляет собой хорошо известное дифференциальное сечение рассеяния Резерфорда. Для двух частиц с массами m_a и m_b и приведенной массой $m_{ab} = m_a m_b / (m_a + m_b)$ имеем

$$S(\theta, u) = \left(\frac{G m_a m_b}{2 m_{ab} u^2} \right)^2 \sin^4 \frac{\theta}{2} \quad (5.2)$$

(см., например, Ландау и Лифшиц, 1973). Анализ кинематики отклонения по-

зволяет связать угол рассеяния θ с приращением скорости Δv_i . Чтобы найти среднее по всем отклонениям приращение скорости a_i , величину Δv_i следует проинтегрировать сначала по всем углам рассеяния, а затем по всем скоростям v_i рассеивающей звезды. Каждая из этих скоростей реализуется с вероятностью $f(v_i)$, поэтому величина $a_i = \langle \Delta v_i \rangle$ сама зависит от содержащейся под знаком интеграла функции распределения из уравнения Фоккера — Планка (5.1). В результате для звезд с массой m_a при столкновении их со звездами массы m_b , которая может совпадать со средней массой звезд поля, получим (Rosenbluth et al., 1957)

$$a_i = \langle \Delta v_i \rangle = \Gamma \frac{\partial h}{\partial v_i}, \quad (5.3)$$

$$\sigma_{jk}^2 = \langle \Delta v_j \Delta v_k \rangle = \Gamma \frac{\partial^2 g}{\partial v_j \partial v_k}, \quad (5.4)$$

где

$$\Gamma = 4\pi m_b^2 G^2 \ln \left[\frac{D \langle v^2 \rangle}{2m_b G} \right], \quad (5.5)$$

причем через D обозначено максимальное значение прицельного параметра рассеяния, и

$$h = \frac{m_a + m_b}{m_b} \int f(v') |\mathbf{v} - \mathbf{v}'|^{-1} d\mathbf{v}', \quad (5.6)$$

$$g = \int f(v') |\mathbf{v} - \mathbf{v}'|^2 d\mathbf{v}'. \quad (5.7)$$

Конкретизируем теперь h и g применительно к гравитирующим системам.

Может показаться, что для получения решения уравнения Фоккера — Планка необходимо заранее знать вид этого решения, чтобы иметь возможность правильно вычислить соответствующие коэффициенты. Разорвать этот порочный круг можно обычным при решении интегродифференциальных уравнений способом: предположить существование необходимой для вычисления коэффициентов функции распределения $f_0(v')$, вычислить далее $f_1 = f_0 + \Delta_1 f$ из уравнения Фоккера — Планка, подставить f_1 вместо f_0 в формулу для коэффициентов, вычислить $f_2 = f_1 + \Delta_2 f$ и т. д. Можно надеяться, что такой итерационный процесс приведет к сходящемуся результату. В действительности, однако, не нашлось никого, кто бы сделал аналитически более одного итерационного шага или хотя бы признал необходимость этого. Дело в том, что в случае однородной или даже достаточно однородной системы разумно предположить, что фоновое распределение скоростей звезд поля вблизи от равновесия является существенно гауссовым с постоянной нормировки A вплоть до некоторой максимальной скорости $V_{\max}$:

$$\begin{aligned} f &= A e^{-\beta^2 v^2}, & v &\leq v_{\max}, \\ &= 0, & v &> v_{\max}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Таким образом, распределение скоростей изотропно ($\partial h / \partial v_1 = 3^{-1/2} \partial h / \partial v$ и т. д.) и только у производных h и g появляется зависимость от направления скорости v . Кроме того, кросс-корреляция взаимно ортогональных приращений скорости отсутствует, так что $\sigma_{jk} = 0$ при $j \neq k$. В этом случае производные имеют следующий вид (Michie, 1963):

$$\frac{\partial h}{\partial v} = \frac{2n_0}{\sqrt{\pi}} \left[1 + \frac{m_a}{m_b} \right] \left[\frac{\beta}{v} e^{-\beta^2 v^2} - \frac{1}{v^2} F(\beta v) \right], \quad (5.9)$$

$$\frac{\partial g}{\partial v} = \frac{n_0}{\sqrt{\pi}} \left[-\frac{4}{3} \beta v e^{-\beta^2 v_{\max}^2} + F(\beta v) \left(2 - \frac{1}{\beta^2 v^2} \right) + \frac{1}{\beta v} e^{-\beta^2 v^2} \right], \quad (5.10)$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial v^2} = \frac{n_0}{\sqrt{\pi}} \left[-\frac{4}{3} \beta e^{-\beta^2 v_{\max}^2} - \frac{2}{\beta v^2} e^{-\beta^2 v^2} + \frac{2F(\beta v)}{\beta^2 v^3} \right], \quad (5.11)$$

где

$$F(x) = \int_0^x e^{-z^2} dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erf}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!(2n+1)} \quad (5.12)$$

а n_0 — средняя плотность числа частиц.

Разлагая в ряд функцию $F(\beta v)$, а также экспоненциальные члены (при $\beta^2 v_{\max}^2 \gg 1$), используя соотношения (5.3) — (5.5) и замечая, что $\langle v^2 \rangle = \frac{3}{2} \beta^{-2}$, видим, что при $\beta v < 1$

$$a \equiv \sqrt{3} a_i = \langle \Delta v \rangle = -\frac{16\sqrt{\pi}}{3} n_0 m_b^2 G^2 \left[1 + \frac{m_a}{m_b} \right] \ln \left[\frac{3D}{4m_b G \beta^2} \right] \beta^3 v [1 - \frac{3}{5} \beta^2 v^2 + \dots] \quad (5.13)$$

$$\sigma^2 \equiv 3\sigma_{jk}^2 = \langle (\Delta v)^2 \rangle = \frac{16\sqrt{\pi}}{3} n_0 m_b^2 G^2 \ln \left[\frac{3D}{4m_b G \beta^2} \right] \beta [1 - \frac{3}{5} \beta^2 v^2 + \dots]. \quad (5.14)$$

Таким образом, мы получили более строгий вывод соотношения $a \propto -v$, которое означает, что при малых скоростях коэффициент динамического трения $\alpha = -a/v$ не зависит от скорости, — результат, полученный ранее эвристически. Кроме того, выражение (5.14) — это фактически полученное нами прежде соотношение (2.8), уменьшенное (коэффициент приблизительно равен 0,2) по отношению к результату интегрирования по скоростям (вспомним также, что σ^2 — среднеквадратичное приращение скорости в единицу времени). А сравнение уравнений (5.13) и (2.9) показывает, что $a \approx v/\tau_R$ — результат, который можно получить на основе эвристических соображений (т. е. научной догадки).

В случае больших скоростей ($\beta v \gg 1$) динамическое трение будет другим. Поскольку $F(x) \rightarrow \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ при $x \rightarrow \infty$, в этом случае получим

$$a \approx -\frac{1}{\tau_R} \frac{\langle v^2 \rangle^{3/2}}{v^2}, \quad (5.15)$$

$$\sigma^2 \propto \frac{\langle v^2 \rangle}{v^3}. \quad (5.16)$$

Этот результат также можно было бы угадать заранее. Поскольку относительно быстро движущиеся звезды не успевают оказать существенное воздействие на соседей [см. соотношение (5.15)], динамическое трение, которое они испытывают, невелико и замедление их происходит сравнительно долго. Диффузия их скоростей также происходит медленнее, чем у звезд со скоростью $v \approx v_{\text{rms}}$. Заметим, что молекулярные и атомные системы с преобладанием тесных столкновений, соответствующих модели твердых шаров, ведут себя прямо противоположным образом. В этих микроскопических системах частицы с большей скоростью претерпевают больше соударений в единицу времени и поэтому быстрее замедляются. Это еще один пример нарушения аналогии между молекулярной вязкостью и гравитационным трением. На рис. 5 приведена зависимость α_i и σ_{jk}^2 от βv , полученная из уравнений (5.3) — (5.12) и нормированная на единицу при $\beta v = 0$.

Чтобы получить предварительное представление о влиянии анизотропии на распределение скоростей, рассмотрим некоторую воображаемую искусственную систему. Пусть эта система является пространственно однородной и состоит из трех типов звезд — красных, белых и, скажем, голубых. Предположим, что красные звезды движутся через всю систему в x -направлении,

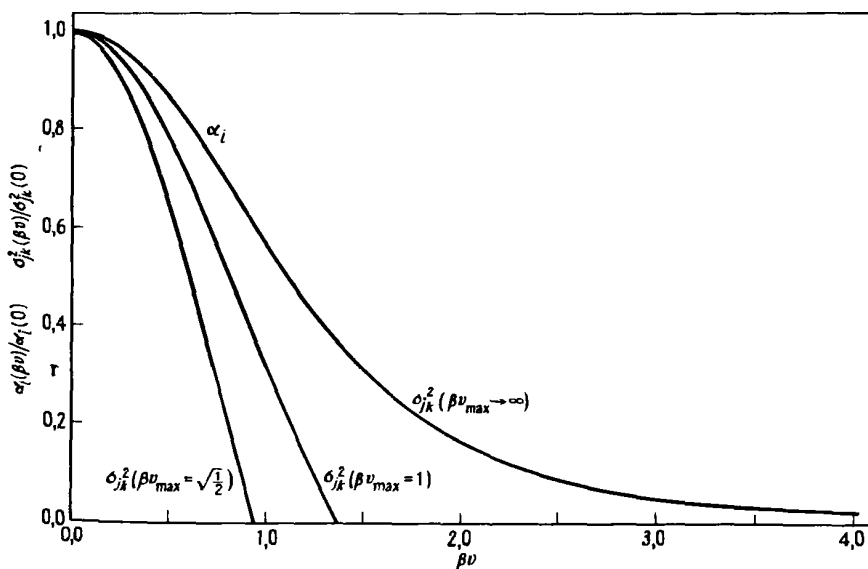


Рис. 5. Коэффициент динамического трения α_i и флуктуирующая сила σ_{jk}^2 в гравитирующих системах, описываемых уравнением Фоккера—Планка.

белые — в y -направлении, а голубые — в z -направлении. Скорости звезд каждого типа распределены по Гауссу, но с различными дисперсиями β_x , β_y и β_z . Такая ситуация, конечно, не может реализоваться в действительности, поскольку неустойчивости потока приведут, помимо прочего, к релаксации с тем же характерным временем $\sim \tau_R$, что и время релаксации, обусловленной динамическим трением. Поэтому мы должны либо допустить, что звезды разных цветов не взаимодействуют друг с другом, либо рассматривать систему лишь через такие промежутки времени с момента установления начальных условий, которые были бы короче τ_R . Введение в рассмотрение такой системы оправдано тем, что коэффициенты динамического трения α_i будут иметь тот же вид, что и в предшествующем анализе, с учетом замены β на β_i . Итак, из соотношений (5.13) и (5.15) следует, что трение сильно зависит от β_i , изменяясь обычно как β_i^3 . Введем в такую систему зеленую звезду с произвольно малой скоростью, не превышающей любую из дисперсий скоростей в этой системе. Возрастание скорости зеленой звезды должно пойти быстрее в направлениях с меньшей дисперсией. Сближения со звездами того типа, который характеризуется меньшей дисперсией скоростей, длятся дольше и приводят к более существенным отклонениям. С другой стороны, зеленая звезда с произвольно высокой скоростью проявляет тенденцию к замедленному уменьшению скорости в направлениях с меньшей дисперсией, поскольку по этим направлениям время взаимодействий, вызывающих отклонения, оказывается меньше. Если же в начальный момент скорость зеленой звезды в одних направлениях меньше дисперсии, а в других — больше, то она будет стремиться к среднему значению в каждом из направлений.

На эти эффекты накладывается постоянная тенденция к увеличению скорости через механизм диффузии. Из соотношений (5.14) и (5.16) видно, что у зеленой звезды с малой скоростью возрастание последней благодаря диффузии происходит быстрее в направлениях с малой дисперсией. Для звезды же с высокой скоростью характерен более быстрый рост скорости в направлениях с большой дисперсией. В то же время образование пар идет эффективнее при близких значениях скорости пробной звезды и звезды поля. В реальных системах анизотропная дисперсия скоростей чаще всего обусловлена вращением. Но в этих случаях плотность также анизотропна, что в свою очередь приводит к интересным эффектам.

Проделанный до сих пор динамический анализ имеет в своей основе три принципиальных допущения. Во-первых, развитие системы в каждый момент времени зависит только от состояния системы в данный момент, но не от ее предшествующей истории. Во-вторых, звезды поля не коррелированы как по координатам, так и по скоростям. В-третьих, эволюция распределения происходит посредством ряда сближений звезд, каждое из которых вносит лишь незначительный вклад в общее изменение скорости звезд. Разумеется, интересно выяснить, что происходит в отсутствие этих ограничений, поскольку они носят достаточно специальный характер. Следующая глава будет поэтому посвящена немарковским явлениям, рассмотрение коллективных эффектов начнется в гл. 13, а бурная релаксация будет описана в ч. III.

6. ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ С ПАМЯТЬЮ: НЕМАРКОВСКАЯ ЭВОЛЮЦИЯ

Тем, кто не помнит прошлого, суждено пережить его вновь.

Джордж Сантаяна

Почему эволюция гравитирующей системы может зависеть от ее предшествующей истории и когда это существенно? При рассмотрении свойств систем сталкивающихся объектов представляются особенно важными два характерных времени. Одно из них — время столкновения τ_* , в течение которого воздействие объектов друг на друга значительно. Другое — время между столкновениями τ_0 . При взаимодействиях в обыкновенных атомных и молекулярных системах эти два характерных времени достаточно отличаются друг от друга. Рассмотрим находящийся при комнатной температуре газ атомов водорода с сечением взаимодействия $\sigma = 10^{-16}$ см², так что $\tau_* \approx (m\sigma/12\pi kT)^{1/2} \approx 10^{-14}$ с, а $\tau_0 \approx (m/3kT)^{1/2} (n\sigma)^{-1} \approx 3 \cdot 10^{10} n^{-1}$ с. Тогда при $n \leq 10^{24}$ см⁻³ получим $\tau_0 > \tau_*$. Когда эти два характерных времени достаточно отличаются друг от друга, частицы претерпевают ряд соударений, каждое из которых может быть идеализированно представлено как случайный импульс, меняющий орбиту частицы. Каждое соударение заканчивается задолго до того, как начнется следующее. Описание эволюции такой системы можно начать в любой момент времени, приняв за начальные условия состояние системы как раз в данный момент. При этом нет необходимости знать, что произошло ранее, ибо система не имеет памяти. Именно поэтому уравнение Фоккера — Планка является дифференциальным, а не интегродифференциальным уравнением; его решение имеет локальный характер во времени.

Перейдем к рассмотрению гравитирующих систем. У точечных объектов аналогом близких столкновений являются сближения, в результате которых траектории этих объектов отклоняются на угол $\sim 90^\circ$. (Анализ близких физических столкновений объектов конечных размеров, например звезд, выполняется совершенно иным образом в ч. III.) Как следует из соотношения (2.1), сечение таких сближений равно $\sigma \approx 4\pi b^2 \approx 16\pi G^2 m^2 / v^4$. Поэтому, обозначив индексом s величины, относящиеся к близким столкновениям, получим

$$\text{м:} \quad \tau_{*s} = \frac{b}{v} \approx \frac{2GM}{v^3} \approx 2N^{-3/2} \tau_G, \quad (6.1)$$

$$\text{н:} \quad \tau_{0s} = \frac{1}{n\sigma v} \approx \frac{v^3}{16\pi G^2 m^2 n} \approx \frac{1}{12} N^{1/2} \tau_G. \quad (6.2)$$

В последнем члене обоих равенств использовано вириальное соотношение $v^2 = GmN/R$ и введено обозначение

$$\text{нн:} \quad \left(\frac{Gm}{R^3} \right)^{-1/2} \equiv \tau_G. \quad (6.3)$$

Длина R в случае конечных сферических систем представляет собой их радиус, а в случае бесконечных систем — максимальное расстояние, при котором между орбитами еще может существовать корреляция. Такая корреляционная длина у бесконечных систем может быть обусловлена увеличением плотности $\Delta n \approx n$, благодаря которому пекулярная (т. е. не зависящая от скорости потока) скорость объектов возрастает на величину порядка v . Величина τ_G по существу представляет собой вклад одного объекта массы m в характерное время реакции гравитационной системы при условии, что это время выравнено по всей системе. Из уравнений (6.1) и (6.2) видно, что время между столкновениями заметно превышает время близкого столкновения — приблизительно в $0,04 N^2$ раз.

Для далеких столкновений (индекс L) справедлив противоположный вывод, что можно было предвидеть, исходя из их названия. Время столкновения здесь составит

$$\tau_{*L} = \frac{R}{v} = \frac{GM}{v^3} \approx N^{-1/2} \tau_G, \quad (6.4)$$

а время между столкновениями —

$$\tau_{0L} = \frac{1}{\pi R^2 n v} \approx N^{-3/2} \tau_G. \quad (6.5)$$

Оказывается, время далекого столкновения превосходит время между столкновениями приблизительно в N раз, и, следовательно, далекие столкновения в результате никогда не завершаются!

Итак, похоже, что далекие столкновения по своей природе должны быть немарковскими. Но это еще не все. Из-за медленного характера далеких столкновений для того, чтобы произвести тот же эффект, что и одно близкое столкновение, а именно изменить скорость на величину $\Delta v \approx v$, их потребуется примерно $10^{-2} N$ [см. соотношения (2.10), (2.11) и (6.4)]. Сравнение $10^{-2} N \tau_{*L}$ с τ_{os} показывает, что время, за которое воздействие далеких столкновений превысит воздействие одного близкого столкновения, составляет примерно одну десятую времени между близкими столкновениями. В реальных системах с колебаниями плотности и немаксвелловскими распределениями по крайней мере около одной десятой всех далеких столкновений подавляется почти случайным близким рассеянием. Зависимость времени между близкими столкновениями от приращения скорости имеет вид: $\tau_{os} \sim b^{-2} \sim (\Delta v/v)^2 v^3$. Время релаксации τ_R , обусловленной далекими столкновениями, имеет такой же характер зависимости от скорости [см. соотношение (2.8)]. Таким образом, подавление далеких столкновений приблизительно одинаково при любых значениях возмущения скорости.

В реальных системах существуют и другие явления, стремящиеся подавить эффекты далеких столкновений. Отдельные объекты будут сильно рассеиваться любыми неоднородностями плотности или скорости. Если эти неоднородности, обусловленные коллективными движениями, быстро меняются во времени, как это происходит в далеких от равновесия системах, они могут играть

гораздо более заметную роль, чем отдельные акты далеких столкновений. Такое состояние носит название бурной релаксации и будет обсуждаться в гл. 38. Но, даже если бурная релаксация отсутствует, не следует забывать о реакции объектов на воздействие среднего гравитационного поля, а также гравитационного поля флуктуаций. Орбита будет испытывать воздействие глобальной асимметрии среднего поля с характерной длиной D в течение времени порядка D/v (равного времени пересечения для конечных систем). Если амплитуда асимметрии велика, как это бывает в сжимающихся эллипсоидальных звездных системах, то асимметрия может преобладать над флуктуациями. Наконец, приливное воздействие со стороны внешних систем также может влиять на внутренние орбиты.

Тем не менее в некоторых случаях немарковские эффекты бывают существенны, и нам следует построить хотя бы простую теорию, позволяющую понять, каким образом они могут влиять на эволюцию системы. Для этого вернемся к анализу уравнения Ланжевена (3.1) и попытаемся ответить на вопрос, как изменится его анализ при наличии возмущающей силы, между значениями которой в разные моменты времени имеется связь, хотя ее средняя величина, выражаемая соотношением (3.3), по-прежнему остается равной нулю. Какой вид примет теперь выражение $\langle \beta(\tau)\beta(\tau') \rangle$? Другими словами, как долго будет двигаться звезда под действием далекого сближения, прежде чем эта память будет разрушена новым взаимодействием?

Пусть $P(x)$ — вероятность того, что данная звезда, пройдя расстояние x , не испытала взаимодействия, разрушающего память. Вероятность того, что такое взаимодействие произойдет в интервале между x и $x + dx$, равна произведению четырех сомножителей: $P(x)$, сечения разрушающего память взаимодействия в расчете на одну звезду поля Ω , плотности числа звезд поля n и расстояния dx . В результате вероятность того, что такого взаимодействия не произойдет, уменьшится на величину $dP(x) = -\Omega n P(x) dx$, так что

$$P(x) = e^{-\Omega n(x-x_0)} \quad (6.6)$$

если $P(x_0) = 1$. Хорошим приближением для расстояния, проходимого звездой между сильными взаимодействиями, будет $x = x_0 + v(t - t_0)$ и тогда

$$P(t - t_0) = e^{-(t-t_0)/\tau_m}, \quad (6.7)$$

где

$$\tau_m \equiv (\Omega n v)^{-1} \quad (6.8)$$

— характерное время распада памяти. Оно соответствует длительности характерного далекого сближения, которое представляет собой интервал времени между двумя сильными отклонениями. Это дает основания считать, что корреляция возмущений по времени в немарковской ланжевенской модели должна иметь вид, аналогичный (6.7). Поэтому выражение (3.4) следует заменить соотношением

$$\langle \beta(\tau/\tau_m)\beta(\tau'/\tau_m) \rangle = \frac{n^2 \sigma^2}{2\tau_m} e^{-|\tau-\tau'|/\tau_m}, \quad (6.9)$$

где σ^2 по-прежнему имеет размерность [скорость] 2 ·[время] $^{-1}$. Теперь с учетом этого изменения можно повторить весь анализ, приведенный в гл. 3.

В качестве иллюстрации результатов такого анализа рассмотрим выражение для дисперсии скоростей, следующее из (6.9) и первой части соотношения (3.9):

$$\begin{aligned}\langle v^2(t) \rangle &= v^2(0)e^{-(2\alpha/m)t} + \frac{\sigma^2 m}{2\alpha} \left[\frac{1}{1+z} - \frac{1}{1-z} e^{-(2\alpha/m)t} + \frac{2z}{1-z^2} e^{-(\alpha/m)(1+z^{-1})t} \right] \\ &\equiv v^2(0)e^{-(2\alpha/m)t} + \frac{\sigma^2 m}{2\alpha} M(z),\end{aligned}\quad (6.10)$$

где [с учетом соотношения (3.5)] введено обозначение

$$z \equiv \frac{\alpha\tau_m}{m} \approx \frac{\tau_m}{\tau_R}, \quad (6.11)$$

а $M(z)$ представляет собой функцию памяти.

В пределе очень короткой памяти $\tau_m \rightarrow 0$, правая часть соотношения (6.9) переходит в δ -функцию, и (6.10) сводится к предыдущему результату (3.9). При увеличении τ_m главный эффект состоит в уменьшении равновесного значения дисперсии скоростей:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle v^2(t) \rangle \propto (1+z)^{-1}.$$

У систем с долгой динамической памятью энтропия меньше, чем у систем с короткой памятью. При увеличении τ_m дисперсия скоростей в фиксированный момент времени также уменьшается, как это показано на рис. 6.

С помощью динамической памяти разрешаются трудности, связанные с недифференцируемыми решениями уравнения Ланжевена. Этого можно было ожидать, исходя из физических соображений, ибо отсутствие недифференцируемости при $t \rightarrow 0$ обусловлено совершенно некоррелированной природой последовательных возмущений. Теперь, когда время корреляции возмущений достигает величины τ_m , орбиты становятся "гладкими" и дифференцируемыми. Это сразу обнаруживается, если разложить соотношение (6.10) в ряд при малых значениях t [полагая опять $v(0) = 0$] и найти предел

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \langle v^2(t) \rangle^{1/2}}{\Delta t} = \frac{\sigma}{\sqrt{(2\tau_m)}}, \quad (6.12)$$

который в отличие от (3.12) является конечным. Кроме того, этот результат показывает, что при фиксированном малом t среднеквадратичное отклонение скорости пропорционально τ_m^{-1} , поэтому чем больше τ_m , тем больше времени потратит система на достижение определенной величины дисперсии скоростей: корреляции противодействуют ее стремлению к равновесию. В немарковском аналоге фоккер-планковского описания этот эффект находит отражение во временной зависимости коэффициентов диффузии (упражнение для читателя).

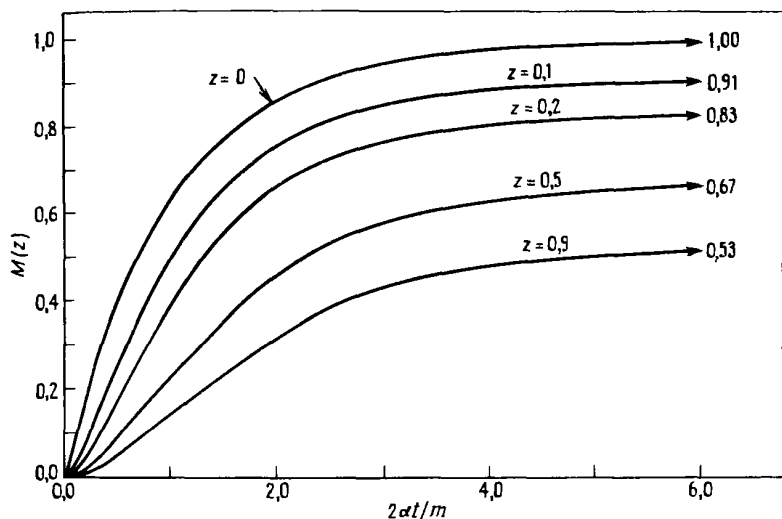


Рис. 6. Функция памяти $M(z)$ в уравнении (6.10).

Определение точного значения τ_m в случае гравитирующих систем затруднено наличием неопределенностей, которые вносятся описанными в настоящем разделе процессами подавления. Сильно завышенной оценкой сверху может служить время между близкими столкновениями; с учетом соотношений (6.2), (6.4) и (2.11) эта оценка приводит к величине $z \approx 10$, при которой среднеквадратичное отклонение скорости $\langle v^2 \rangle^{1/2}$ снижается примерно в 3 раза по сравнению с марковским равновесным значением. Впрочем, более точной оценкой τ_m была бы величина, близкая к τ_{L} . В этом случае $z \approx 10^2 N^{-1} \ll 1$ и окончательное значение дисперсии скоростей существенно не меняется. Это относится в особенности к тем системам, которые образуются из неоднородного распределения звезд.

7. УРАВНЕНИЕ БОЛЬЦМАНА

В том случае, когда можно пренебречь всеми силами, кроме средней гравитационной, существует сравнительно простое описание медленно эволюционирующих гравитирующих систем. Мы можем ослабить требование однородности и предположить, что функция распределения $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ зависит не только от скорости и времени, но и от координаты. Представим себе малый элемент объема в шестимерном фазовом пространстве координат и скоростей (рис. 7). Пусть этот элемент будет достаточно велик по сравнению с расстоянием между галактиками, но мал по сравнению с размером Вселенной, так что в любой момент времени t она содержит $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{r} d\mathbf{v}$ галактик. Если переход галактик

из одного элемента объема в другой происходит плавно, а не скачкообразно, функция $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ должна удовлетворять уравнению непрерывности

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\nabla \cdot (f\mathbf{v}) - \nabla_{\mathbf{v}} \cdot (f\dot{\mathbf{v}}). \quad (7.1)$$

которое говорит о том, что изменение во времени функции f внутри объема $d\mathbf{r}d\mathbf{v}$ объясняется не чем иным, как приходом и уходом галактик через границы этого объема. Знаком ∇ здесь обозначен градиент по координатам, а $\nabla_{\mathbf{v}} = \hat{\mathbf{i}}(\partial/\partial v_1) + \hat{\mathbf{j}}(\partial/\partial v_2) + \hat{\mathbf{k}}(\partial/\partial v_3)$ — градиент в пространстве скоростей. Отметим, что в фазовом пространстве эти градиенты равноправны. Используя векторное тождество $\nabla \cdot (f\mathbf{w}) = f \nabla \cdot \mathbf{w} + \mathbf{w} \cdot \nabla f$ и вспоминая, что $\mathbf{v}$ и $\mathbf{r}$ рассматриваются здесь в качестве независимых переменных, а ускорение не зависит от скорости, получаем возможность упростить выражение (7.1):

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f + \dot{\mathbf{v}} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f = 0. \quad (7.2)$$

Разумеется, полная производная функции f по времени, учитывающая движение галактик в фазовом пространстве, равна нулю. Это соотношение представляет собой бесстолкновительное уравнение Больцмана — один из наиболее полезных способов описания в звездной динамике.

Сделаем теперь более аккуратный вывод соотношения (7.2) с тем, чтобы выявить лежащие в его основе предположения. По определению число галактик в элементе фазового объема $d\mathbf{r}d\mathbf{v}$ в точке $(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ составляет

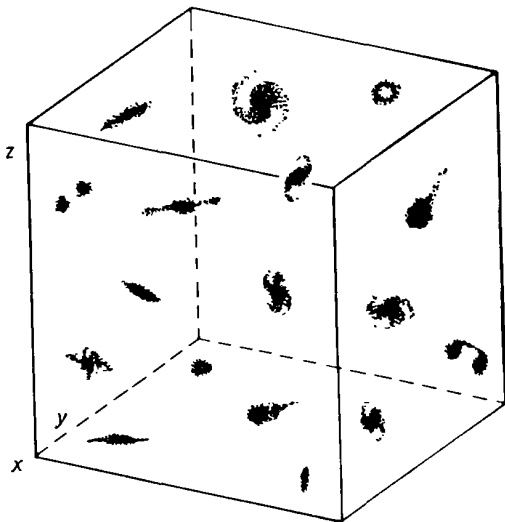


Рис. 7. Проекция шестимерного фазового пространства координат и скоростей на трехмерное координатное пространство.

$$dN = f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{r} d\mathbf{v} \quad (7.3)$$

в момент времени t . Через небольшой интервал времени в момент $t + \Delta t$ каждая галактика изменит свою координату:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{v}\Delta t \quad (7.4)$$

и приобретет новую скорость

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} + \dot{\mathbf{v}}\Delta t = \mathbf{v} + \frac{\mathbf{F}}{m}\Delta t, \quad (7.5)$$

где $\mathbf{F}/m$ — сила гравитации на единицу массы. Содержащий первоначальный набор галактик элемент объема также превратится в новый элемент объема $d\mathbf{r}' d\mathbf{v}'$, содержащий те же галактики, так что

$$dN' = dN = f(\mathbf{r}', \mathbf{v}', t + \Delta t) d\mathbf{r}' d\mathbf{v}'. \quad (7.6)$$

Если число галактик в элементе объема претерпело резкое изменение вследствие ухода или прихода новых галактик, например в результате столкновения или рассеяния на большой угол, что ведет к изменению соотношений (7.4) и (7.5), то следует написать $dN' = dN + \Delta N$, причем вид ΔN должен соответствовать конкретному виду рассеяния (как это имеет место в приложениях уравнения Больцмана к динамике атомарных газов). Из уравнения (7.5) не следует, что скорость $\mathbf{v}$ или гравитационная сила $\mathbf{F}$ не могут меняться со временем. Требуется только, чтобы любое изменение $\mathbf{F}$ происходило медленнее, чем изменение $\mathbf{v}$, вызванное действием силы $\mathbf{F}$ на протяжении интервала времени Δt . Здесь внимательный читатель должен заметить одну тонкость. В самом деле, разве изменение среднего гравитационного поля $\mathbf{F}$ не обусловлено движением галактик, и поэтому разве не являются эти два характерных времени приблизительно одинаковыми? Дело, однако, в том, что, поскольку вклад в среднее гравитационное поле вносится огромным числом галактик, движение одних галактик обычно уравнивается движением других, так что результирующее поле множества галактик будет меняться медленнее, чем вклад в него любого малого подмножества.

Из соотношений (7.3) и (7.6) получим

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{r} d\mathbf{v} = f(\mathbf{r}', \mathbf{v}', t + \Delta t) d\mathbf{r}' d\mathbf{v}'. \quad (7.7)$$

В литературе по интегральному векторному анализу показано, что переход типа (7.4) — (7.5) от одного элемента объема к другому осуществляется с помощью якобиана преобразования:

$$d\mathbf{r}' d\mathbf{v}' = \left| \frac{\partial(\mathbf{r}', \mathbf{v}')}{\partial(\mathbf{r}, \mathbf{v})} \right| d\mathbf{r} d\mathbf{v}, \quad (7.8)$$

где якобиан представляет собой абсолютную величину определителя 6-го порядка

$$J(\mathbf{r}', \mathbf{v}'/\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \left| \frac{\partial(\mathbf{r}', \mathbf{v}')}{\partial(\mathbf{r}, \mathbf{v})} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial r'_1}{\partial r_1} & \frac{\partial r'_1}{\partial r_2} & \frac{\partial r'_1}{\partial r_3} & \frac{\partial r'_1}{\partial v_1} & \frac{\partial r'_1}{\partial v_2} & \frac{\partial r'_1}{\partial v_3} \\ \frac{\partial r'_2}{\partial r_1} & \dots & \dots & \dots & \dots & \frac{\partial r'_2}{\partial v_3} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ \frac{\partial v'_3}{\partial r_1} & & & & & \frac{\partial v'_3}{\partial v_3} \end{vmatrix}. \quad (7.9)$$

Подставив соотношения (7.4) и (7.5) в якобиан, сразу найдем, что с точностью до членов 1-го порядка по Δt (более высокая точность не требуется) якобиан равен единице. Физическую интерпретацию этого результата можно сделать, исходя из соотношения между 6-мерной дивергенцией скорости $\mathbf{u}$ в фазовом пространстве координат и скоростей и якобианом:

$$\nabla_6 \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{J} \frac{\partial J}{\partial t}. \quad (7.10)$$

Во время своего движения в шестимерном фазовом пространстве галактики занимают фазовый объем, относительное изменение которого представлено правой частью этого равенства. С точностью до членов первого порядка по Δt она равна нулю, а это означает, что движение частиц, соответствующих в фазовом пространстве галактикам, является бездивергентным. Соотношение (7.10) аналогично уравнению сохранения массы для обычной жидкости, движущейся в обычном пространстве:

$$\nabla_3 \cdot \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt}, \quad (7.11)$$

где ρ — плотность жидкости, а

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \quad (7.12)$$

— общепринятое выражение для конвективной производной, записанное с учетом движения жидкости. Отсюда видно, в какой степени движение частиц в фазовом пространстве напоминает движение несжимаемой жидкости. Это свойство встретится нам в ч. III в условиях бурной релаксации.

Возвращаясь к уравнению (7.7), можно теперь сократить в обеих его частях члены, представляющие фазовый объем, разложить правую часть в ряд Тейлора в окрестности точки $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ при малом значении интервала времени Δt , перейти к пределу $\Delta t \rightarrow 0$ и получить бесстолкновительное уравнение Больцмана (7.2).

Структура этого уравнения вряд ли покажется необычной. Это в сущности

уравнение Фоккера — Планка (5.1) без диффузионного члена, записанное для такой функции распределения, которая зависит не только от скорости, но и от координат. В таком уравнении должны появиться коэффициенты a_i , соответствующие как среднему изменению координаты в единицу времени (скорости), так и ускорению. Если эти коэффициенты, обязанные своим происхождением динамическому трению, вычислить в гравитационном поле всех остальных галактик самосогласованным образом и без учета диффузии, то действительно будет получено бесстолкновительное уравнение Больцмана. Введение диффузионного члена в уравнение Фоккера — Планка значительно увеличивает содержащуюся в нем информацию; тогда это уравнение становится эквивалентным уравнению Больцмана со столкновительным членом, которое описывает рассеяние под влиянием малых флуктуаций среднего поля. Здесь имеется существенное отличие от столкновительных членов, фигурирующих в кинетике атомарных газов, где атомы рассматриваются как упругие твердые шары.

Бесстолкновительное уравнение Больцмана в его компактной форме (7.2) на первый взгляд кажется простым, но эта простота обманчива. Оно выглядит линейным по функции f , но так обстоит дело лишь с такими системами, в которых средняя гравитационная сила, пропорциональная $\dot{\mathbf{v}}$, определяется внешним воздействием. В гравитирующих же системах среднее поле определяется внутренними силами самосогласованным образом в зависимости от функции f . Это обстоятельство усложняет задачу и делает более вероятным нетривиальное поведение системы. Функция распределения входит нелинейным образом в уравнение Больцмана через уравнение Пуассона

$$\nabla^2 \phi(\mathbf{r}, t) = -4\pi G\rho = -4\pi G\bar{m} \int f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} \quad (7.13)$$

для гравитационного потенциала ϕ , градиент которого равен ускорению:

$$\dot{\mathbf{v}} = \nabla \phi. \quad (7.14)$$

С помощью этих уравнений можно найти, например, распределение вещества в стационарной сферической системе в качестве аппроксимации для скоплений галактик, звездных шаровых скоплений и ядер галактик. Более того, эти уравнения оказываются полезными при описании спиральной структуры вращающихся галактик (гл. 62).

Существует и другая весьма полезная интерпретация уравнения Больцмана. Его характеристические кривые (см. гл. 4) определяются соотношениями

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \dots = \frac{dv_z}{\dot{v}_z}, \quad (7.15)$$

записанными для простоты в декартовых координатах. Приравнявая различные члены соотношения (7.15), получим $v_x = dx/dt$, $\dot{v}_x = dv_x/dt = F_x/m$ и т. д. Эти тривиальные на вид соотношения в действительности являются уравнениями движения звезд. Поскольку семейства характеристик представляют собой решения уравнения Больцмана, легко понять, что получение этих ре-

шений равносильно определению звездных орбит. Здесь нет ничего удивительного, ибо, зная начальные координаты и скорости звезд и их движение в среднем гравитационном поле, мы всегда можем определить число звезд, приходящееся на небольшой интервал координат и скоростей в заданный момент времени (или решить бесстолкновительное уравнение Больцмана), и найти таким образом функцию распределения. В гл. 63 описан важный случай применения этого результата.

Гамильтонов формализм придает уравнению Больцмана особенно законченный и наглядный вид. Рассмотрим функцию $f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$, зависящую от канонических переменных — обобщенных координат q_i и импульсов p_i , которые удовлетворяют каноническим уравнениям движения

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad (7.16)$$

где гамильтониан $H(q_i, p_i)$ определяет эволюцию системы. Для свободно движущихся звезд $H = (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)/2m$, причем $p_1 = p_x = mv_x$ (в декартовых координатах) и т. д. Звезда, движущаяся в гравитационном поле, имеет потенциальную энергию, которая зависит от координат q_i и должна быть прибавлена к гамильтониану. Используя соотношения (7.16), нетрудно уравнение (7.2) записать в канонических переменных и в результате получить

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial f}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial q_i} \right) \equiv \{H, f\}. \quad (7.17)$$

Правая часть этого уравнения известна под названием скобки Пуассона. В общем случае полная производная по времени динамической функции равна ее частной производной по времени минус скобка Пуассона этой функции с гамильтонианом

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} - \{H, f\}. \quad (7.18)$$

В частности, замена f на $H(q_i, p_i)$ в уравнении (7.18) показывает, что энергия звезды сохраняется, если только частная производная H тождественно равна нулю.

Если равенство (7.17) умножить на $i = \sqrt{-1}$ и определить оператор, действующий на функцию f , как оператор Больцмана B , то можно написать

$$Bf = i\{H, f\} \quad (7.19)$$

и уравнение эволюции будет выглядеть так:

$$i \frac{\partial f}{\partial t} = Bf. \quad (7.20)$$

Это уравнение очень напоминает по виду уравнение Шредингера

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi, \quad (7.21)$$

где ψ — волновая функция, $2\pi\hbar$ — постоянная Планка, а H — оператор Гамильтона. В гл. 14 мы увидим, как можно использовать это сходство.

8. НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА УРАВНЕНИЯ БОЛЬЦМАНА

Нетрудно получить некоторые интересные выводы, касающиеся простых систем, удовлетворяющих бесстолкновительному уравнению Больцмана. Прежде всего ясно, что не могут существовать однородные равновесные изотермические системы. Ведь требования однородности и равновесности означают, что первые два члена в уравнении (7.2) равны нулю. А изотермическая функция распределения зависит только от энергии частиц с единой однородной дисперсией скоростей. Таким образом, $\nabla_v f \neq 0$, и из уравнения (7.2) следует, что ускорение $\dot{v} = 0$. Этот результат можно вывести и непосредственно из симметрии среднего гравитационного поля. Из равенства (7.14) теперь следует, что $\nabla\phi = 0$, а равенство (7.13) в свою очередь означает, что $\nabla^2\phi = 0$ и что $f(v) = 0$. Итак, единственная удовлетворяющая этим простым условиям система есть система всюду и всегда пустая.

Совершенно иначе обстоит дело в случае идеального негравитирующего газа, который вполне может удовлетворять упомянутым равновесным условиям. Разница между этими двумя типами систем обусловлена неодинаковой природой сил, стремящихся к сохранению равновесия. В модели идеального газа атомы сталкиваются как бильярдные шары. Благодаря этим короткодействующим силам в правой части уравнения (7.2) появляется столкновительный член, свойства которого способствуют подавлению отклонений от однородного изотермического равновесного распределения. Исходя из изотропности столкновений и однородности равновесного распределения, можно, следуя Максвеллу, получить вид функции распределения. Она будет зависеть только от скорости, и достаточно лишь предположить, что в любой декартовой системе координат три ортогональные компоненты случайной скорости являются взаимно независимыми. Если рассматривать, например, распределение двух компонент скорости, это предположение будет означать, что их совместное распределение равно произведению распределений каждой из этих компонент в отдельности, т. е.

$$f_{12}(v_1, v_2) = f_1(v_1)f_2(v_2). \quad (8.1)$$

Изменение скорости будет происходить теперь только посредством столкновений, и, если эти столкновения изотропны, взаимная независимость функций $f_1(v_1)$ и $f_2(v_2)$ сохранится при повороте системы координат на угол θ и новых значениях скоростей

$$v'_1 = v_1 \cos \theta + v_2 \sin \theta, \quad (8.2a)$$

$$v'_2 = -v_1 \sin \theta + v_2 \cos \theta, \quad (8.2b)$$

как это показано на рис.8.

Распределение скоростей инвариантно относительно вращения системы ко-

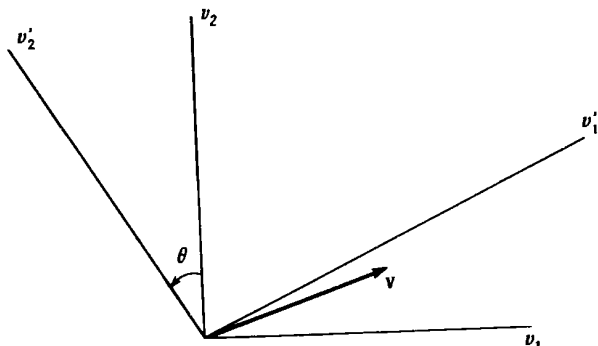


Рис. 8. Вращение системы координат, при котором распределение скоростей остается неизменным.

ординат. Инвариантность взаимной независимости функций распределения означает, что

$$f'_1(v'_1)f'_2(v'_2) = f_1(v_1)f_2(v_2), \quad (8.3)$$

или

$$\ln f'_1 + \ln f'_2 = \ln f_1 + \ln f_2. \quad (8.4)$$

Дифференцируя сначала по v_1 , а потом по v_2 , получим

$$\frac{d^2 \ln f'_1(v'_1)}{dv'^2_1} - \frac{d^2 \ln f'_2(v'_2)}{dv'^2_2} = 0. \quad (8.5)$$

Варьируя по v_1 и v_2 при постоянном значении v'_2 , что возможно при любом фиксированном значении угла θ , найдем, что второй член уравнения (8.5) равен постоянной. Интегрируя первый член, получаем

$$f'_1(v'_1) = e^{a + bv'_1 + cv'^2_1}, \quad (8.6)$$

где a , b и c — постоянные, определяемые из условия изотропности и однородности (коль скоро решение (8.6) справедливо для любой компоненты скорости). Таким образом, функция распределения однородного изотропного равновесного “газа бильярдных шаров” имеет вид распределения Максвелла — Больцмана.

Что касается бесконечных гравитирующих систем, их рассмотрение лучше всего начать с распределения Максвелла — Больцмана, приняв его в качестве начальных условий, поскольку корреляции отсутствуют; такие начальные условия наиболее просты в том смысле, что требуют минимум информации для своего определения. Гравитационное рассеяние является анизотропным и обусловлено силами притяжения, поэтому первое рассеяние изменит гравитационное поле, под влиянием которого происходит второе рассеяние, последнее в свою очередь таким же образом повлияет на третье рассеяние и т. д.; такая система не может долго оставаться однородной и некоррелированной. В при-

менении к сгущиванию галактик этот вопрос будет рассмотрен в ч. II.

В гл. 4 было показано, что нахождением статистических моментов из уравнения Фоккера — Планка можно извлечь некоторую полезную информацию. Применение этого метода к уравнению Больцмана также дает важные результаты. Их характер хорошо виден, если записать уравнение (7.2) в декартовых координатах:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \dot{v}_i \frac{\partial f}{\partial v_i} = 0, \quad (8.7)$$

где $i = 1, 2, 3$ и проводится суммирование по повторяющимся индексам i . Предполагается, что функция распределения при больших скоростях падает так быстро, что

$$\left. \begin{array}{l} \lim v_i^n f = 0, \\ |v_i| \rightarrow \infty, \end{array} \right\} \quad (8.8)$$

для любых компонент скорости и значений показателя степени n . По существу это означает, что конечные системы содержат очень мало объектов со скоростями, превышающими скорость “убегания” из системы, а бесконечные имеют малую плотность звезд и галактик, движущихся с произвольно высокими релятивистскими скоростями. Определим теперь моменты порядка $l + k$ относительно скоростей:

$$\int_{-\infty}^{\infty} v_i^l v_j^k f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) dv_1 dv_2 dv_3 = n(\mathbf{x}, t) \overline{v_i^l v_j^k}, \quad (8.9)$$

где $n(\mathbf{x}, t)$ — плотность числа объектов, а чертой обозначено усреднение по скоростям. Умножим уравнение (8.7) на v_j^k и проинтегрируем по всему пространству скоростей. Первое слагаемое дает

$$\int_{-\infty}^{\infty} v_j^k \frac{\partial f}{\partial t} dv_1 dv_2 dv_3 = \frac{\partial}{\partial t} (n \overline{v_j^k}). \quad (8.10)$$

Второе слагаемое принимает вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} v_i v_j^k \frac{\partial f}{\partial x_i} dv_1 dv_2 dv_3 = \frac{\partial}{\partial x_i} (n \overline{v_i v_j^k}). \quad (8.11)$$

Интегрирование третьего слагаемого приводит к следующему результату:

$$\dot{v}_i \int_{-\infty}^{\infty} v_j^k \frac{\partial f}{\partial v_i} dv_1 dv_2 dv_3 = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq j, \\ -k \dot{v}_j n(\mathbf{x}, t) \overline{v_j^{k-1}} & \text{при } i = j \\ & (\text{по индексу } j \text{ суммирования нет}), \end{cases} \quad (8.12)$$

поскольку гравитационное ускорение не зависит от скорости, и интегрирование по частям производится с использованием условия (8.8). Комбинируя по-

лученные результаты, получим

$$\frac{\partial}{\partial t}(\overline{nv_j^k}) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\overline{nv_i v_j^k}) = k \dot{v}_j n(x, t) \overline{v_j^{k-1}} \quad (\text{по индексу } j \text{ суммирование нет}). \quad (8.13)$$

Здесь записаны три уравнения, по одному для каждого значения j .

Интерпретация результатов применения этого метода может быть получена без всякого труда. При $k = 0$ все три уравнения (8.13) будут выглядеть одинаково:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n \bar{v}) = 0. \quad (8.14)$$

Это не что иное, как уравнение непрерывности (4.3), выражающее сохранение числа частиц (массы) в усредненном по всей системе потоке. Подставив в соотношение (8.13) $k = 1$, получим еще три уравнения, каждое из которых имеет вид

$$\frac{\partial (\overline{n \bar{v}_1})}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_1}(\overline{nv_1^2}) + \frac{\partial}{\partial x_2}(\overline{nv_1 v_2}) + \frac{\partial}{\partial x_3}(\overline{nv_1 v_3}) = \dot{v}_1 n(x, t), \quad (8.15)$$

причем оставшиеся два уравнения получаются циклической перестановкой, т. е. заменой индексов 1→2, 2→3, 3→1 и затем еще одной такой заменой. Уравнение (8.15) описывает перенос импульса. В данном случае это удельный (на единицу массы) импульс объектов одинаковой массы, но его легко обобщить для функции распределения, которая зависит не только от координаты, скорости и времени, но и от массы объекта (упражнение для читателя). Уравнения (8.14), (8.15) были впервые получены Джинсом (*J Jeans*, 1915, 1919, 1922); их часто называют уравнениями звездной гидродинамики.

Уравнения переноса станут более похожими на обычные уравнения гидродинамики жидкостей, если изменить форму девяти слагаемых вида $\partial(\overline{nv_1 v_2})/\partial x_2$. Одно из таких слагаемых, например, представляет собой производную по направлению x_2 среднего потока импульса nv_1 вдоль оси x_2 . Эта величина в общем случае отличается от величины $nv_1 v_2$, которая является потоком среднего импульса $\overline{nv_1}$ вдоль оси x_2 . Причина этого отличия состоит в основном в том, что вследствие флуктуаций противоположного знака средний поток не равен среднеквадратичному потоку, как и в ланжевеновском и фоккер-планковском описаниях. Предполагая, что каждая компонента скорости является суммой двух частей — средней и флуктуирующей:

$$v_i = \bar{v}_i + v'_i, \quad (8.16)$$

и что автокорреляция флуктуаций отсутствует:

$$\bar{v'_i} = 0, \quad (8.17)$$

получаем

$$\overline{v_i v_j} = \bar{v}_i \bar{v}_j + \overline{v'_i v'_j} \equiv \bar{v}_i \bar{v}_j + \frac{P_{ij}}{mn}, \quad (8.18)$$

где $P_{ij} = P_{ji}$ — тензор давления, а m — масса звезды в системе. Отсутствие

автокорреляций является очень сильным допущением, намного менее правдоподобным в отношении гравитирующих систем, чем в отношении атомарных газов. Однако оно согласуется с бесстолкновительным приближением Больцмана и, как увидим, существенно упрощает положение. Поэтому оно часто используется для получения приближенных результатов, которые позволяют достигнуть определенного понимания в конкретных астрономических задачах. Эти задачи, как правило, настолько трудны, что даже частичное их понимание имеет большое значение.

Подставляя соотношение (8.18) в (8.15), учитывая, что величина $\bar{v}_i$ является в общем случае функцией переменных x и t , даже если v_i не зависит от них [см. соотношение (8.9)], и привлекая уравнение непрерывности (8.14), перепишем уравнение переноса импульса в более привычном виде:

$$\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial t} + \bar{v}_1 \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_1} + \bar{v}_2 \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_2} + \bar{v}_3 \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_3} + \frac{1}{mn} \left(\frac{\partial P_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial P_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial P_{13}}{\partial x_3} \right) = \frac{F_1}{m}, \quad (8.19)$$

где $F_1 = m\dot{v}_1$ — “внешняя” сила, обусловленная средним полем. Аналогичные уравнения для компонент скорости v_2 и v_3 получаются циклической перестановкой индексов. Если давление изотропно, так что $P_{ij} = P\delta_{ij}$, то все эти уравнения могут быть объединены в одно векторное уравнение

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + \frac{1}{mn} \nabla P = \mathbf{F} m^{-1}. \quad (8.20)$$

Сила $\mathbf{F}$ определяется уравнением Пуассона (7.13), исходя из плотности числа объектов n , а изменения величин n и $\mathbf{v}$ связаны между собой уравнением сохранения массы (8.14).

И все-таки здесь чего-то не хватает. Даже в простейшем случае изотропного давления имеется восемь переменных — $v_1, v_2, v_3, n, P, F_1, F_2, F_3$ — и только семь уравнений для их определения. Информация, заключенная в соотношениях для моментов, недостаточна для их самосогласованного решения. Вот если бы иметь еще одно уравнение, скажем для давления $\bar{v}^2$! Ну, конечно! Стоит только вернуться назад к уравнению моментов (8.13) и вычислить следующий момент более высокого порядка, положив $k = 2$, чтобы получить уравнение переноса энергии. А дальше, применив разделение компоненты скорости (8.16), мы получили бы необходимое нам уравнение для давления. Здесь, однако, мы наталкиваемся на неожиданную трудность: уравнение для давления содержит члены, в которые входят моменты третьего порядка, обязанные своим происхождением слагаемым вида $\partial(n v_i v_j^k) / \partial x_j$. Легко понять общую закономерность: уравнения для моментов второго порядка содержат моменты третьего порядка, уравнения для моментов третьего порядка — моменты четвертого порядка и так далее до бесконечности. Разрыва этой цепи не видно. То, что выглядело вначале так многообещающе, не оправдало наших ожиданий.

Однако не все потеряно. Возникшая трудность приводит лишь к необходи-

мости новой аппроксимации, которую можно осуществить несколькими способами. Можно, например, вычислить столько моментов, сколько представляется возможным, а следующий момент более высокого порядка положить равным нулю, замкнув тем самым систему уравнений. Преимущество этого метода состоит в том, что разница между решениями, полученными при замыкании системы на разных уровнях, дает представление о точности вычислений. Чем больше моментов будет использовано, тем уже пределы, в которых может изменяться решение, если оно считается решением исходного уравнения Больцмана. Получение бесконечного числа моментов решения было бы равносильно получению самого решения. (Последнее утверждение вытекает из расширения доводов, приведенных вслед за соотношением (3.14), а именно: знание всех моментов функции позволяет получить ее изображение, из которого путем обратного преобразования Лапласа можно найти и саму функцию. Все функции должны при этом удовлетворять стандартным требованиям непрерывности и гладкости.)

Другой возможный подход связан с привлечением физических соображений, и тогда бесконечной информации не потребуется. Если движение звезд и галактик соответствует распределению, близкому к максвелловскому, то $P_{ij} = P_{ii} = \overline{v_i'^2}$, и эта среднеквадратичная случайная скорость будет приблизительно соответствовать дисперсии скоростей, характеризующей данную функцию распределения. В конечной сферической системе кинетическая и потенциальная энергии примерно уравниваются друг друга, так что $\overline{v_i'^2} \approx GM/R$. Это сразу позволяет отсечь весь оставшийся ряд зацепляющихся уравнений моментов. Однако такая возможность имеется лишь в случае равновесного состояния системы, когда ответ и без того наполовину известен. Тем не менее многие вопросы касаются возмущений вблизи равновесного состояния, для описания которых выведенные уравнения подходят идеальным образом. Мы еще не раз вернемся к ним в следующих главах, где они будут рассмотрены в контексте разных проблем и с использованием разных систем координат.

9. ТЕОРЕМА ВИРИАЛА

Бегут моменты чередой, бегут неумолимо,
Как ни пытайся их собрать, как ни старайся
удержать —
Они промчатся мимо.

Аделаида Проктор

Эта теорема используется так часто, а области динамической астрономии, в которых она применяется, так многочисленны, что ее стоит обсудить особо, даже если она является не более чем частным следствием уравнений движения. Первое знакомство с теоремой вириала начнем с записи уравнения движе-

ния (8.20) в компонентной форме

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = - \frac{\partial P}{\partial x_i} + nF_i. \quad (9.1)$$

Здесь $\rho = mn$ — массовая плотность, а полная производная

$$\frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}, \quad (9.2)$$

учитывает движение среды. При дискретном распределении массы для i -й компоненты гравитационной силы, действующей на α -ю звезду, можно написать

$$F_i^{(\alpha)} = m^{(\alpha)} \frac{\partial \phi}{\partial x_i}, \quad (9.3)$$

где потенциал ϕ создается всеми остальными звездами:

$$\phi = G \sum_{\beta \neq \alpha} \frac{m^{(\beta)}}{|\mathbf{x}^{(\alpha)} - \mathbf{x}^{(\beta)}|}. \quad (9.4)$$

Поскольку здесь мы имеем дело с непрерывным распределением, сумму следует заменить интегралом по объему

$$\phi(\mathbf{x}) = G \int \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d\mathbf{x}', \quad (9.5)$$

который является решением уравнения Пуассона (7.13). Здесь мы слегка изменили систему обозначений, поскольку теперь все записи удобнее делать явным образом в декартовой системе координат.

Вычислим первый момент уравнения (9.1) по координатам. Для этого умножим каждый член этого уравнения на x_j и проинтегрируем по всему объему системы. Поскольку масса сохраняется, левая часть после соответствующих преобразований примет следующий вид:

$$\int \rho(\mathbf{x}) x_j \frac{dv_i}{dt} d\mathbf{x} = \frac{d}{dt} \int \rho(\mathbf{x}) x_j v_i d\mathbf{x} - \int \rho(\mathbf{x}) v_i v_j d\mathbf{x}. \quad (9.6)$$

и

Производной давления в уравнении (9.1) будет соответствовать интеграл

и

$$\Pi \delta_{ij} = \int P d\mathbf{x} \delta_{ij}. \quad (9.7)$$

Здесь применено интегрирование по частям и учтено, что давление на границах конечных систем равно нулю, а у бесконечных однородных систем оно обладает пространственной симметрией. Член, описывающий гравитационную

силу (для любой массы, равной m^a), имеет вид

$$\begin{aligned} \int \rho(\mathbf{x}) x_j \frac{\partial \phi}{\partial x_i} d\mathbf{x} &= -G \iint \rho(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}') x_j \frac{(x_i - x'_i)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d\mathbf{x}' d\mathbf{x} \\ &= +G \iint \rho(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}') x'_j \frac{(x_i - x'_i)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d\mathbf{x}' d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (9.8)$$

В последней части равенства штрихованные и нештрихованные переменные поменялись местами. Чтобы записать этот член в симметричной форме, сложим две последние части равенства (9.8) и возьмем половину этой суммы. Получим

$$W_{ij} = -\frac{G}{2} \iint \rho(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}') \frac{(x_i - x'_i)(x_j - x'_j)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d\mathbf{x}' d\mathbf{x}, \quad (9.9)$$

т. е. симметричный тензор потенциальной энергии. Произведя его свертку суммированием по повторяющемуся индексу при $i = j$, получим гравитационную потенциальную энергию системы. Введем обозначение

$$T_{ij} = \frac{1}{2} \int \rho(\mathbf{x}) v_i v_j d\mathbf{x} \quad (9.10)$$

для симметричного тензора энергии — импульса, обусловленного средними скоростями, ибо вклад в энергию случайных скоростей уже учтен в виде интеграла давления (9.7). Используя соотношения (9.6) — (9.10), получаем

$$\frac{d}{dt} \int \rho(\mathbf{x}) x_j v_i d\mathbf{x} = 2 T_{ij} + W_{ij} + P \delta_{ij}. \quad (9.11)$$

Это основное уравнение моментов, которое, однако, легко сделать более информативным. Симметрия правой части наводит на мысль о целесообразности записи левой части в виде суммы симметричного и антисимметричного слагаемых

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int \rho(\mathbf{x}) x_j v_i d\mathbf{x} &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int \rho(\mathbf{x}) (x_j v_i - x_i v_j) d\mathbf{x} \\ &+ \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int \rho(\mathbf{x}) (x_j v_i + x_i v_j) d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (9.12)$$

Поскольку симметрия обеих частей уравнения должна быть одинаковой, антисимметричное слагаемое должно равняться нулю:

$$\frac{d}{dt} \int \rho(\mathbf{x}) (x_j v_i - x_i v_j) d\mathbf{x} = 0. \quad (9.13)$$

что соответствует сохранению момента импульса. Остается антисимметричная часть уравнения (9.11)

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 I_{ij}}{dt^2} = 2T_{ij} + W_{ij} + \Pi \delta_{ij}, \quad (9.14)$$

где

$$I_{ij} = \int \rho(\mathbf{x}) x_i x_j d\mathbf{x} \quad (9.15)$$

— тензор инерции системы. Уравнение (9.14) известно под названием тензорной теоремы вириала. Выполним над ним операцию свертки, т. е. положив $i = j$ и произведя суммирование, получим

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 I}{dt^2} = 2T + W + 3\Pi \quad (9.16)$$

т. е. общепринятый скалярный вариант теоремы.

Эта теорема является не чем иным, как результатом последовательного отыскания моментов бесстолкновительного уравнения Больцмана. Первый момент функции распределения относительно скоростей привел к уравнениям движения Эйлера. Теперь первый момент уравнений Эйлера относительно координат приводит к теореме вириала. Моменты более высоких порядков еще более сузили бы пределы, в которых может изменяться система. Действительно, здесь мы снова видим последовательное зацепление друг за друга моментов все более высоких порядков: тензор инерции уже представляет собой момент второго порядка относительно координат. Чтобы замкнуть систему уравнений моментов на этом шаге, необходимо принять новое физическое ограничение, касающееся момента инерции системы.

Здесь можно ввести некоторые упрощающие предположения. Если система достаточно близка к стационарному состоянию, так что $d^2 I_{ij}/dt^2 = 0$, то давление, сила гравитации и массовое перемещение звезд находятся в равновесии друг с другом. Если, кроме того, между давлением и силой гравитации существует гидростатическое равновесие, а массовое перемещение звезд отсутствует, то $-W_{ij} = \Pi \delta_{ij}$. При другом предположении система должна существовать достаточно долго для того, чтобы была возможность ввести в рассмотрение усредненную по времени произвольную величину α , которая вычислялась бы по формуле

$$\langle \alpha \rangle = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \alpha(t) dt. \quad (9.17)$$

Тогда средний момент инерции запишется в виде

$$\left\langle \frac{d^2 I}{dt^2} \right\rangle = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \frac{dI}{dt} dt = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} [I(\tau) - I(0)]. \quad (9.18)$$

Эта величина может обращаться в нуль, либо когда система локализована в пространстве таким образом, что при любом значении τ производная $\dot{I}(\tau)$ имеет верхнюю границу, либо если периодичность орбит обеспечивает выполнение условия $\dot{I}(\tau) = \dot{I}(0)$ при $\tau \rightarrow \infty$. В обоих случаях уравнение (9.16) принимает вид

$$2\langle T \rangle + \langle W \rangle + 3\langle \Pi \rangle = 0. \quad (9.19)$$

Преобразовав таким образом теорему вириала мы должны вспомнить, что обозначение $\langle T \rangle$ относится не к полной кинетической энергии, а лишь к той ее части, которая обусловлена средними скоростями. При наблюдении звездной системы мы не в состоянии различать эти две составляющие. На практике невозможно также усреднить скорости внутреннего движения в системе по времени, значительно превышающим время динамической релаксации. Первую проблему можно разрешить путем соответствующего преобразования теоремы вириала, чем мы сейчас и займемся. Вторую трудность часто обходят, предполагая, что наблюдаемые в действительности величины суть средние по времени. Правомочность такого предположения будет обсуждаться в гл. 41.

В то время как в предыдущем выводе теоремы вириала система рассматривалась как сплошная среда, сейчас мы будем исходить из основных уравнений движения для дискретных объектов. Это избавит нас от необходимости разделять кинетическую энергию на средний поток и "тепловую" составляющую. Более того, мы рассмотрим более общую ситуацию, предположив, что масса каждого объекта изменяется во времени. Такая постановка вопроса может соответствовать потерям массы галактиками и звездами, аккреции и слиянию галактик, а также, в более умозрительном аспекте, космологическим моделям с переменной массой. Для каждого объекта справедливы следующие уравнения движения:

$$\frac{d}{dt}(m^{(\alpha)}v_i^{(\alpha)}) = F_i^{(\alpha)} = m^{(\alpha)} \frac{\partial \phi}{\partial x_i^{(\alpha)}} = -Gm^{(\alpha)} \sum_{\beta \neq \alpha} \frac{m^{(\beta)}(x_i^{(\alpha)} - x_i^{(\beta)})}{|x^{(\alpha)} - x^{(\beta)}|^3}. \quad (9.20)$$

Здесь использованы соотношения (9.3) и (9.4). Индексы (α) и (β) соответствуют штрихованным и нештрихованным переменным в случае сплошной среды. Массы объектов теперь зависят от времени. Потеря массы для простоты предполагается изотропной, хотя анизотропный случай легко описать, обозначив в производной импульса в уравнении (9.20) потерю массы в каждом направлении как $\dot{m}^{ai}$.

Умножая уравнение (9.20) на $x_j^{(\alpha)}$ и суммируя по α , получаем

$$\sum_{\alpha} x_j^{(\alpha)} \frac{d}{dt}(m^{(\alpha)}v_i^{(\alpha)}) = -G \sum_{\alpha} \sum_{\beta \neq \alpha} m^{(\alpha)}m^{(\beta)} \frac{x_j^{(\alpha)}(x_i^{(\alpha)} - x_i^{(\beta)})}{|x^{(\alpha)} - x^{(\beta)}|^3}. \quad (9.21)$$

Симметризуя правую часть, как мы делали это в уравнении (9.8), получаем тензор потенциальной энергии

$$W_{ij} = -\frac{G}{2} \sum_{\alpha} \sum_{\beta \neq \alpha} m^{(\alpha)}m^{(\beta)} \frac{(x_i^{(\alpha)} - x_i^{(\beta)})(x_j^{(\alpha)} - x_j^{(\beta)})}{|x^{(\alpha)} - x^{(\beta)}|^3}. \quad (9.22)$$

Перепишем левую часть в следующем виде:

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha} x_j^{(\alpha)} \frac{d}{dt} (m^{(\alpha)} v_i^{(\alpha)}) &= \frac{d}{dt} \sum_{\alpha} m^{(\alpha)} x_j^{(\alpha)} v_i^{(\alpha)} - \sum_{\alpha} m^{(\alpha)} v_i^{(\alpha)} v_j^{(\alpha)} \\ &= \frac{d}{dt} \sum_{\alpha} \frac{1}{2} m^{(\alpha)} \{ (x_j^{(\alpha)} v_i^{(\alpha)} + x_i^{(\alpha)} v_j^{(\alpha)}) + (x_j^{(\alpha)} v_i^{(\alpha)} - x_i^{(\alpha)} v_j^{(\alpha)}) \} - \sum_{\alpha} m^{(\alpha)} v_i^{(\alpha)} v_j^{(\alpha)}.\end{aligned}\quad (9.23)$$

Уравнение (9.21) не содержит антисимметричных слагаемых, за исключением того, которое входит в последнюю часть равенства (9.23). Это слагаемое должно, следовательно, обратиться в нуль, что опять-таки отражает сохранение момента импульса. Остающаяся симметричная часть (9.23) равна

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum_{\alpha} m^{(\alpha)} (x_j^{(\alpha)} v_i^{(\alpha)} + x_i^{(\alpha)} v_j^{(\alpha)}) - \sum_{\alpha} m^{(\alpha)} v_i^{(\alpha)} v_j^{(\alpha)} \\ = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} \sum_{\alpha} m^{(\alpha)} x_i^{(\alpha)} x_j^{(\alpha)} - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum_{\alpha} \dot{m}^{(\alpha)} x_i^{(\alpha)} x_j^{(\alpha)} - \sum_{\alpha} m^{(\alpha)} v_i^{(\alpha)} v_j^{(\alpha)},\end{aligned}\quad (9.24)$$

Взяв за образец выражение (9.14), мы использовали в этом равенстве дифференцирование тензора инерции по времени.

Запишем теперь соотношения для тензора кинетической энергии

$$T_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m^{(\alpha)} v_i^{(\alpha)} v_j^{(\alpha)}, \quad (9.25)$$

для тензора инерции

$$I_{ij} = \sum_{\alpha} m^{(\alpha)} x_i^{(\alpha)} x_j^{(\alpha)}, \quad (9.26)$$

и для тензора изменения массы

$$J_{ij} = \sum_{\alpha} \dot{m}^{(\alpha)} x_i^{(\alpha)} x_j^{(\alpha)}. \quad (9.27)$$

Итак, для симметричной части уравнения (9.21) получим

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 I_{ij}}{dt^2} - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} J_{ij} = 2 T_{ij} + W_{ij}. \quad (9.28)$$

Уравнение (9.28) представляет собой тензорную теорему вириала для дискретного набора гравитационно-взаимодействующих объектов. Член, ответственный за кинетическую энергию, представляет теперь все движение объектов без разделения его на среднее движение и соответствующую давлению флуктуационную составляющую. Специальное предположение о пропорциональности скорости потери массы самой массе, т. е. $\dot{m}^{(\alpha)} = f(t) m^{(\alpha)}(t)$, помогает не-

сколько упростить полученный результат, поскольку в этом случае $J_{ij} = f(t)I_{ij}$. Если величины x_i и v_i остаются, как и прежде, ограниченными, а скорость роста $\dot{m}(t)$ меньше скорости роста t при $t \rightarrow \infty$, то после усреднения уравнения (9.28) по времени получим

$$2\langle T_{ij} \rangle + \langle W_{ij} \rangle = 0. \quad (9.29)$$

Здесь усредненные по времени величины могут лишь случайно совпадать со своим мгновенным средним значением, поскольку T_{ij} и W_{ij} явно зависят от времени. Однако эта временная зависимость не меняет форму теоремы вириала. Свертка (суммирование по повторяющимся индексам) тензоров в соотношении (9.29) дает

$$2\langle T \rangle + \langle W \rangle = 0, \quad (9.30)$$

Это соотношение — наиболее часто встречающийся вариант теоремы вириала.

Теорема вириала может применяться в задачах самых разных масштабов. Вращающийся вокруг планеты спутник и скопление галактик могут быть объектами применения этой теоремы. В простейшем случае задачи двух тел, имеющих круговые орбиты, из основных принципов следует, что центробежная и гравитационная силы уравновешивают друг друга: $m^{(\alpha)}v^2/r = Gm^{(\alpha)}m^{(\beta)}/r^2$. Умножение этого равенства на r приводит к теореме вириала. В данном случае средняя по времени величина равна мгновенному значению вследствие симметричности и периодичности орбиты. В приложениях к скоплениям многих объектов теорема вириала дает использованное нами в гл. 2 приблизительное соотношение между размером скопления и дисперсией скоростей в нем: $v^2 \approx GmN/R$. Примерно полстолетия назад с помощью этого соотношения была оценена масса нескольких скоплений галактик по их радиусу и дисперсии скоростей. Исходя из калиброванного соотношения масса — светимость, была получена другая оценка, согласно которой масса скопления на порядок меньше динамической массы. Несоответствие этих двух оценок было названо “загадкой скрытой массы” и будет обсуждаться в разд. 42.1.

10. ОБЩЕЕ ОПИСАНИЕ: УРАВНЕНИЕ ЛИУВИЛЛЯ И ЭНТРОПИЯ

Один за всех, все за одного — вот наш девиз.

Александр Дюма-отец

Уравнения Ланжевена, Фоккера — Планка, Больцмана и основное кинетическое уравнение обеспечивают лишь частичное описание гравитационных систем. Каждое из них построено с помощью различных предположений, при-

способлено к тем или иным условиям. В основе всех этих уравнений лежит физический, достаточно интуитивный, подход к проблеме. Но существует и более общее описание, из которого все предыдущие следуют как частные случаи. В этом нет ничего удивительного, поскольку уравнения движения Ньютона способны дать полное описание всех орбит системы. Неудобство этих уравнений состоит в том, что они не отличаются компактностью: для описания N объектов требуется $6N$ уравнений. Правда, полные импульс, момент импульса и энергия сохраняются, по крайней мере в изолированных системах, но обычно это не слишком упрощает дело.

Воображение в очередной раз должно помочь нам решить проблему. Предшествующее рассмотрение бесстолкновительного уравнения Больцмана проводилось при помощи шестимерного фазового пространства. Каждой точке этого пространства соответствовали три пространственные координаты и три составляющие скорости (или импульса) одной частицы. Такое пространство было несложным обобщением двумерной фазовой плоскости, координаты которой представляют собой значения некоторой величины и ее первой производной, полученной из дифференциального уравнения второго порядка относительно этой величины. Своим названием фазовое пространство обязано, возможно, гармоническому осциллятору, у которого эта плоскость является отражением той или иной стадии, или фазы, периодической последовательности его движений.

А теперь рассмотрим большое “фазовое пространство”, насчитывающее $6N$ измерений. Каждой точке этого пространства соответствует не единственный объект, а вся состоящая из N объектов система. Траектория такой фазовой точки описывает изменение состояния системы во времени. Здесь нет пока ничего нового, за исключением наглядного представления динамических процессов. Следующий шаг, сделанный Гиббсом, заключается в интуитивной догадке огромного значения. Хотя в природе не может существовать более одной системы с вполне определенным набором свойств, предположим, что таких систем много и они образуют, как говорят, ансамбль. Если бы координаты и скорости всех объектов в каждой из таких систем были в точности одинаковы, все системы характеризовались бы одной и той же фазовой точкой. Интереснее, однако, рассмотреть ансамбль Гиббса, в котором каждая система имеет отличное от других распределение координат и скоростей (при том же числе объектов). В $6N$ -мерном фазовом пространстве такому ансамблю будет соответствовать облако точек. Вероятность того, что данная система ансамбля в момент времени t окажется в определенном $6N$ -мерном элементе фазового объема, обозначим

$$f^{(N)}(x^{(1)}, \dots, x^{(N)}, v^{(1)}, \dots, v^{(N)}, t) dx^{(1)} \dots dv^{(N)}. \quad (10.1)$$

Это компактное обозначение избавляет от необходимости записывать миллионы координат в случае, например, шарового скопления. Величина $f^{(N)}$ соответствует доле тех систем ансамбля, координаты и скорости которых попадают в данный элемент фазового объема. Интеграл от функции $f^{(N)}$ по всему

фазовому пространству будет поэтому равен единице:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^{(N)} dx^{(1)} \dots dv^{(N)} = 1. \quad (10.2)$$

Следующим принципиальным шагом является сделанное Гиббсом предположение о том, что вероятность распределения, справедливая для каждого элемента ансамбля, равна вероятности существования одного элемента ансамбля с данным набором координат. В классической статистической механике такое предположение будет оправдано, если все элементы ансамбля считать достаточно похожими друг на друга и рассматривать их как различные микроскопические реализации систем с одинаковыми значениями макроскопических (средних) характеристик, таких, как температура или плотность. Затем к такому ансамблю следует применить эргодическую гипотезу. Некоторым физикам это предположение кажется интуитивно очевидным; они указывают на то обстоятельство, что из него вытекают многие экспериментально подтвержденные гипотезы. Другим оно кажется интуитивно неверным и тем не менее достойным внимания по причине своего кажущегося правдоподобия. Эти последние потратили немало усилий на поиски строгих доказательств в статистической механике. В гравитационных (и других строго гамильтоновых) системах дело обстоит, очевидно, проще: построения Гиббса предполагают наличие точных уравнений движения системы.

Чтобы показать это, определим сначала характер изменения функции $f^{(N)}$ во времени, причем $f^{(N)}$ будем рассматривать как вероятность того, что данная система окажется в определенном элементе фазового объема. Первоначальная вероятность того, что координаты $(x_0^{(1)}, \dots, v_0^{(N)}, t_0)$ данной системы жат внутри малого $6N$ -мерного фазового объема, ограниченного поверхностью S_0 , равна

$$A(t_0) = \int_{S_0} f_0^{(N)}(x_0^{(1)}, \dots, v_0^{(N)}, t_0) dx_0^{(1)} \dots dv_0^{(N)}. \quad (10.3)$$

Некоторое время спустя динамические процессы в системе приведут к преобразованию координат x_0 и v_0 в x и v , функция распределения превратится в $f^{(N)}(x^{(1)}, \dots, v^{(N)}, t)$, а граница S_0 перейдет в S_t . Вероятность того, что претерпевшая изменения система лежит внутри границы S_t , равна

$$A(t) = \int_{S_t} f^{(N)}(x^{(1)}, \dots, v^{(N)}, t) dx^{(1)} \dots dv^{(N)}. \quad (10.4)$$

Но поскольку динамическая эволюция системы непрерывна, что означает невозможность ее скачкообразного перехода из одного состояния в другое, то вероятность попадания системы в новую область фазового пространства равна той вероятности, с какой она могла находиться внутри исходной области, т. е.

$$A(t) = A(t_0) = \text{постоянная}. \quad (10.5)$$

Это рассуждение похоже на то, которое привело нас к уравнению (7.7) и бесстолкновительному уравнению Больцмана, правда, с одним существенным отличием. Если уравнение Больцмана справедливо лишь в том случае, когда движение объектов обусловлено только медленно меняющимся средним гравитационным полем, то для справедливости уравнения (10.5) не требуется ничего, кроме непрерывности уравнений движения системы. Инвариант A можно рассматривать как часть объема фазового пространства, занятую такими системами, координаты которых близки друг к другу и изменяются во времени сходным образом. Величина объема остается при этом постоянной, как это схематически показано на рис. 9.

Рассмотрим подробнее, каким образом это происходит. Величина объема в момент времени $t_0 + \Delta t$ связана с его величиной в произвольный предшествующий момент t_0 соотношением

$$\begin{aligned} A(t_0 + \Delta t) &= \int_{S_{t_0 + \Delta t}} f^{(N)}(\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{v}^{(N)}, t_0 + \Delta t) d\mathbf{x}^{(1)} \dots d\mathbf{v}^{(N)} \\ &= \int_{S_{t_0}} f^{(N)}(\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{v}^{(N)}, t_0 + \Delta t) \frac{\partial(\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{v}^{(N)})}{\partial(\mathbf{x}_0^{(1)}, \dots, \mathbf{v}_0^{(N)})} d\mathbf{x}_0^{(1)} \dots d\mathbf{v}_0^{(N)} \end{aligned} \quad (10.6)$$

Здесь мы лишь изменили область интегрирования. Запишем далее соотношение между значениями функции распределения в эти два момента времени с помощью разложения в ряд Тейлора:

$$\begin{aligned} f^{(N)}(\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{v}^{(N)}, t_0 + \Delta t) &= f_0^{(N)}(\mathbf{x}_0^{(1)}, \dots, \mathbf{v}_0^{(N)}, t_0) + \left(\frac{\partial f_0^{(N)}}{\partial \mathbf{x}_0^{(1)}} \cdot \frac{d\mathbf{x}_0^{(1)}}{dt} + \dots \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial f_0^{(N)}}{\partial \mathbf{v}_0^{(N)}} \cdot \frac{d\mathbf{v}_0^{(N)}}{dt} + \frac{\partial f_0^{(N)}}{\partial t} \right) \Delta t + O[(\Delta t)^2] + \dots \end{aligned} \quad (10.7)$$

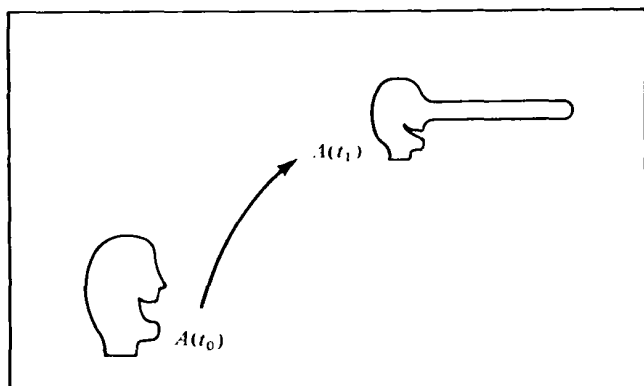


Рис. 9. Иллюстрация изменения объема в $6N$ -мерном фазовом пространстве.

Координаты и скорости в те же два момента связаны равенствами

$$\mathbf{x}^{(n)} = \mathbf{x}_0^{(n)} + \frac{d\mathbf{x}_0^{(n)}}{dt} \Delta t + \dots, \quad (10.8)$$

$$\mathbf{v}^{(n)} = \mathbf{v}_0^{(n)} + \frac{d\mathbf{v}_0^{(n)}}{dt} \Delta t + \dots, \quad (10.9)$$

откуда, используя декартову систему для обозначения компонент вектора, получаем якобиан преобразования

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{v}^{(N)})}{\partial(\mathbf{x}_0^{(1)}, \dots, \mathbf{v}_0^{(N)})} &= 1 + \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{x}}_0^{(1)}}{\partial \mathbf{x}_0^{(1)}} + \frac{\partial \dot{\mathbf{y}}_0^{(1)}}{\partial \mathbf{y}_0^{(1)}} + \frac{\partial \dot{\mathbf{z}}_0^{(1)}}{\partial \mathbf{z}_0^{(1)}} + \dots + \frac{\partial \dot{\mathbf{v}}_{0x}^{(N)}}{\partial v_{0x}^{(N)}} + \frac{\partial \dot{\mathbf{v}}_{0y}^{(N)}}{\partial v_{0y}^{(N)}} + \frac{\partial \dot{\mathbf{v}}_{0z}^{(N)}}{\partial v_{0z}^{(N)}} \right) \Delta t \\ &+ O[(\Delta t)^2] + \dots = 1 + \sum_{\alpha=1}^N (\mathbf{V}_{x_0} \cdot \dot{\mathbf{x}}_0^{(\alpha)} + \mathbf{V}_{v_0} \cdot \dot{\mathbf{v}}_0^{(\alpha)}) \Delta t + \dots. \end{aligned} \quad (10.10)$$

Перемножая равенства (10.7) и (10.10), найдем

$$\begin{aligned} f^{(N)} \frac{\partial(\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{v}^{(N)})}{\partial(\mathbf{x}_0^{(1)}, \dots, \mathbf{v}_0^{(N)})} &= f_0^{(N)} + \sum_{\alpha=1}^N [\mathbf{V}_{x_0} \cdot (f_0^{(N)} \dot{\mathbf{x}}_0^{(\alpha)}) + \mathbf{V}_{v_0} \cdot (f_0^{(N)} \dot{\mathbf{v}}_0^{(\alpha)})] \Delta t \\ &+ \frac{\partial f_0^{(N)}}{\partial t} \Delta t + \dots. \end{aligned} \quad (10.11)$$

Заметим, что пространственные координаты и координаты скорости здесь симметричны. Подставляя (10.11) в (10.6), используя (10.3) и переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, получаем

$$\frac{dA(t)}{dt} = \int_{S_{t_0}} \left(\frac{\partial f_0^{(N)}}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^N [\mathbf{V}_{x_0} \cdot (f_0^{(N)} \dot{\mathbf{x}}_0^{(\alpha)}) + \mathbf{V}_{v_0} \cdot (f_0^{(N)} \dot{\mathbf{v}}_0^{(\alpha)})] \right) d\mathbf{x}_0^{(1)} \dots d\mathbf{v}_0^{(N)}. \quad (10.12)$$

Поскольку из (10.5) следует, что при любой граничной поверхности S_{t_0} $dA/dt = 0$, подынтегральная функция в (10.12) должна обратиться в нуль. Более того, начальное время не играет никакой роли, поэтому индекс "0" в подынтегральном выражении можно опустить, в результате чего получим

$$\frac{\partial f^{(N)}}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^N [\mathbf{V}_x \cdot (f^{(N)} \dot{\mathbf{x}}^{(\alpha)}) + \mathbf{V}_v \cdot (f^{(N)} \dot{\mathbf{v}}^{(\alpha)})] = 0. \quad (10.13)$$

Перед нами уравнение Лиувилля. Область его применения не ограничивается одним лишь описанием динамических процессов: его фазовое пространство может быть образовано и непрерывными дифференциальными уравнениями первого порядка. Сразу же видно близкое сходство этого уравнения с уравнением непрерывности (7.1) в шестимерном фазовом пространстве. Действительно, уравнение Лиувилля является не чем иным, как обобщением уравнения

непрерывности на $6N$ -мерное фазовое пространство и поэтому может быть выведено из физических принципов, как это было сделано с уравнением (7.1). Уравнение Лиувилля показывает, что течение вероятности по фазовому пространству исключает наличие источников и стоков вероятности.

Рассматривая $f^{(N)}(q_i, p_i)$ как функцию $6N$ координат и проекций импульса (импульс взят вместо скорости) и подставляя канонические уравнения Гамильтона (7.16) в уравнение (10.13), получаем

$$\frac{\partial f^{(N)}}{\partial t} + \{f^{(N)}, H\} = 0, \quad (10.14)$$

где скобка Пуассона является результатом суммирования по всем объектам:

$$\{f^{(N)}, H\} = \sum_{i=1}^{3N} \left(\frac{\partial f^{(N)}}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f^{(N)}}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right). \quad (10.15)$$

Другими словами, якобиан (10.10) преобразования динамических переменных был на самом деле, как это мог заметить внимательный читатель, в точности равен единице. Следовательно, в фазовом пространстве плотность вероятности сохраняется.

Соотношение (10.14) можно получить и непосредственно, потребовав, чтобы полная производная функции $f^{(N)}$ по времени была равна нулю:

$$\frac{df^{(N)}}{dt} = \frac{\partial f^{(N)}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3N} \left(\frac{\partial f^{(N)}}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial f^{(N)}}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt} \right) = 0, \quad (10.16)$$

и подставляя сюда канонические уравнения Гамильтона. Это равенство показывает также, что полная производная по времени какой-либо динамической величины равна сумме ее частной производной по времени и скобки Пуассона с гамильтонианом. Если, в частности, гамильтониан явным образом не зависит от времени, то полная энергия системы будет постоянной, ибо $\{H, H\} = 0$. Физическая причина сохранения фазовой плотности состоит в том, что все координаты и скорости полностью и навсегда определены своими значениями в произвольный момент времени. Поскольку канонические уравнения (7.16) являются уравнениями первого порядка по времени, то для каждого объекта системы они определяют единственную траекторию, проходящую через данную точку в шестимерном фазовом пространстве, а тем самым единственную траекторию для системы из ансамбля Гиббса в $6N$ -мерном фазовом пространстве. Фазовые точки не могут покидать ту область с изменяющейся во времени конфигурацией, которую они занимали в фазовом пространстве в начальный момент времени, а объем этой области в ходе эволюции ансамбля не меняется, поэтому фазовая плотность остается постоянной.

Хотя уравнение Лиувилля (10.14) имеет тесное формальное сходство с бесстолкновительным уравнением Больцмана (7.17), в действительности оно намного мощнее, поскольку содержит полную информацию обо всех орбитах си-

стемы без каких-либо предположений или приближений. Действительно, характеристики уравнения (10.14), заданные соотношениями

$$\frac{dt}{1} = \frac{dq_1}{\partial H / \partial p_1} = -\frac{dp_1}{\partial H / \partial q_1} = \frac{dq_2}{\partial H / \partial p_2} = -\frac{dp_2}{\partial H / \partial q_2} = \dots = -\frac{dp_{3N}}{\partial H / \partial q_{3N}} \quad (10.17)$$

являются точными уравнениями движения для всех N объектов системы. Теперь мы видим, как функция распределения всего ансамбля может описывать орбиты объектов одной из систем этого ансамбля. Аналогичную роль в отношении бесстолкновительного уравнения Больцмана играют уравнения (7.15). Впрочем, результат (10.17) носит до известной степени формальный характер, поскольку в гамильтониан H входит сумма или интеграл от функции распределения, которая остается неизвестной, пока не получены решения для всех орбит системы.

Несмотря на эту трудность, уравнение Лиувилля очень полезно не только в качестве единого компактного представления всех орбит системы. Проиллюстрируем это утверждение с трех разных точек зрения.

Если в функции $f^{(N)}$ действительно содержится вся информация о системе, энтропия в $6N$ -мерном фазовом пространстве должна оставаться постоянной, поскольку по мере изменения состояния системы потеря информации не происходит. Такая ситуация не согласуется с поведением шестимерной энтропии Больцмана, которая остается постоянной только при равновесии системы, а в остальных случаях возрастает. Определим $6N$ -мерную энтропию $S^{(N)}$ аналогично соотношению (4.5), т. е. пропорционально среднему значению логарифма плотности вероятности $f^{(N)}$:

$$S^{(N)} = - \int f^{(N)} \ln f^{(N)} dV^{(N)} \quad (10.18)$$

(мы положили здесь постоянную Больцмана $k = 1$, а интегрирование ведется по $6N$ -мерному фазовому пространству). Производная энтропии по времени имеет вид

$$\frac{dS^{(N)}}{dt} = - \int \frac{\partial f^{(N)}}{\partial t} (\ln f^{(N)} + 1) dV^{(N)}. \quad (10.19)$$

Преобразуем теперь первое слагаемое в правой части равенства, воспользовавшись уравнением Лиувилля (10.14) и произведя интегрирование по частям в предположении, что функция $f^{(N)}$ на границах области интегрирования обращается в нуль:

$$\begin{aligned} \int \frac{\partial f^{(N)}}{\partial t} \ln f^{(N)} dV^{(N)} &= - \int \{f^{(N)}, H\} \ln f^{(N)} dV^{(N)} \\ &= \int f^{(N)} \{ \ln f^{(N)}, H \} dV^{(N)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int \{f^{(N)}, H\} dV^{(N)} \\
 &= - \int \frac{\partial f^{(N)}}{\partial t} dV^{(N)}.
 \end{aligned}
 \quad (10.20)$$

Это означает, что подинтегральное выражение в правой части (10.19) равно нулю, и

$$\frac{dS^{(N)}}{dt} = 0. \quad (10.21)$$

Чтобы получить соотношение с возрастающей энтропией, следует ослабить точность описания системы. Этого можно достичь двумя способами. Можно, следуя Гиббсу, рассматривать огрубленную функцию распределения, заменив $f^{(N)}$ ее средним по конечному элементу фазового объема значением

$$\bar{f}^{(N)} = \frac{1}{\Delta V^{(N)}} \int_{\Delta V} f^{(N)} dV^{(N)}. \quad (10.22)$$

По мере движения первоначального набора точек, представляющих системы в фазовом пространстве, — элемента “фазовой жидкости” — его граница приобретает в общем случае очень сложную форму, даже если объем остается постоянным. Это происходит потому, что разные системы ансамбля движутся с разными скоростями, а представляющие их (фазовые) точки перемещаются в разных направлениях. Через некоторый промежуток времени фиксированный элемент фазовой жидкости может потерять первоначальную связность, что приведет к неравенству $\bar{f}^{(N)} \leq f^{(N)}$. Следовательно,

$$\bar{S}^{(N)} = - \int \bar{f}^{(N)} \ln \bar{f}^{(N)} dV^{(N)} \geq S^{(N)}. \quad (10.23)$$

Возрастание во времени огрубленной энтропии

$$\bar{S}^{(N)}(t_1) \leq \bar{S}^{(N)}(t_2 > t_1) \quad (10.24)$$

является результатом стремления большинства элементов фазовой жидкости к приобретению все более нитевидной формы по мере изменения систем во времени. Обычно такое стремление не свойственно лишь нескольким небольшим областям фазового пространства, соответствующим объектам с резонансными или периодическими орбитами. Эволюция систем может принимать в конце концов такой характер, которому соответствует чрезвычайно тесное переплетение элементов фазовой жидкости, так что становится возможным говорить об установлении своеобразного “детального равновесия”. Как только какая-либо нить покидает объем усреднения $\Delta V^{(N)}$, другие входят в него, чтобы занять ее место, так что для любых двух моментов времени

$\bar{f}^{(N)}(t_1) = \bar{f}^{(N)}(t_2)$. Это признак достижения системой состояния равновесия. С гравитирующими системами этого, однако, не происходит.

Недостаток этого способа, включающего процедуру огрубления Гиббса, состоит в том, что точный результат здесь очевидным образом зависит от размеров объема $\Delta V^{(N)}$. Если выбранный объем усреднения слишком мал, то орбиты отдельных объектов будут заметно влиять на движение представляющей точки, и в пределе вместо огрубленной энтропии $\bar{S}^{(N)}$ снова будем иметь обычную энтропию $S^{(N)}$. С другой стороны, выбор слишком большого элемента объема приведет к тому, что представляющая точка длительное время будет находиться внутри одного элемента объема, а затем быстро перемещаться в другой, возможно, очень далекий элемент. Ясно, что в предельном случае усреднения по всему фазовому пространству получим пространство, в котором ничто никогда не происходит. Внезапные скачки из одного большого элемента объема в другой будут, таким образом, зависеть от эволюции системы в течение предшествующего конечного отрезка времени, когда она двигалась внутри определенного элемента, в котором движение ее сделалось вследствие усреднения незаметным. В этом случае описание эволюции в фазовом пространстве становится немарковским.

Стандартное описание энтропии в статистической механике основано на возможности рассмотрения промежуточного случая. Это описание требует такого масштаба усреднения, в котором движение представляющих точек выглядело бы случайным и марковским. Чем шире диапазон масштабов, в котором выполняется это требование, тем лучше описание. Использование такого масштаба приводит к появлению диффузии частиц в фазовом пространстве, а диффузия в свою очередь ведет к росту энтропии аналогично тому, как это было показано в гл. 4.

Существует и другой способ определения энтропии. Этот способ позволяет избежать эффекта “глаза наблюдателя” (Grad, 1958) и, как показано в следующей главе, обеспечивает наиболее удобный метод получения информации о системе. Главная его идея состоит в том, чтобы перейти к приведенным функциям распределения $f^{(n)}$, исключив остальные $6(N-n)$ координат фазового пространства путем интегрирования:

$$f^{(n)} = \int \dots \int f^{(N)} dV^{(N-n)}. \quad (10.25)$$

Так, например, $f^{(2)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{v}_2, t) \equiv f_2(1,2)$ — это вероятность того, что объект с координатой $\mathbf{x}_1$ и скоростью $\mathbf{v}_1$ окажется в элементе фазового объема $dV^{(1)}(1) = d\mathbf{x}_1 d\mathbf{v}_1$, а объект с координатой $\mathbf{x}_2$ и скоростью $\mathbf{v}_2$ — в элементе $dV^{(1)}(2) = d\mathbf{x}_2 d\mathbf{v}_2$. При такой форме записи аргумент у функции и нижний индекс у переменной обозначают номер частицы, верхний индекс указывает число частиц. Рассмотрим для начала только одно- и двухчастичную функции распределения. Поскольку ни один объект не может уйти из фазового пространства, наиболее простыми условиями нормировки будут

$$\int f^{(1)}(1) dV^{(1)}(1) = \int f^{(1)}(2) dV^{(1)}(2) = \int f^{(2)}(1,2) dV^{(2)}(1,2) = 1, \quad (10.26)$$

$$\int f^{(2)} dV^{(1)}(1) = f^{(1)}(2); \quad \int f^{(2)} dV^{(1)}(2) = f^{(1)}(1), \quad (10.27)$$

где $dV^{(2)}(1,2) \equiv dV^{(1)}(1)dV^{(1)}(2)$. Далее, если объекты совсем не взаимодействуют между собой, их распределения будут взаимно независимы. Поскольку независимые вероятности перемножаются, получим

$$f^{(2)}(1,2) = f^{(1)}(1)f^{(1)}(2). \quad (10.28)$$

Любые взаимодействия, однако, должны привести к появлению корреляции между объектами. Вероятность того, что два объекта будут находиться в данном элементе фазового объема, уже не будет равна вероятности того, что там будет находиться один объект, умноженной на такую же вероятность для другого объекта. Присутствие одного объекта может увеличить или уменьшить вероятность того, что поблизости окажется другой объект. Чтобы учесть это, перепишем равенство (10.28), введя в него парную корреляционную функцию $P(x_1, v_1, x_2, v_2, t)$:

$$f^{(2)}(1,2) = f^{(1)}(1)f^{(1)}(2) + P(1,2). \quad (10.29)$$

В пределе, когда взаимодействие исчезнет, функция $P(1,2)$ равна нулю. В случае слабого взаимодействия можно также ожидать, что $P(1,2) \ll f^{(1)}(1)f^{(1)}(2)$. Однако такая ситуация наблюдается в гравитирующих системах далеко не всегда, так как гравитационная энергия нелинейна по массе и насыщения ее не происходит. Поэтому при достаточно большом числе слабо взаимодействующих объектов возможно появление значительных парных корреляций между ними. Из равенства (10.29) и условий нормировки (10.26) видно, что

$$\int P(1,2) dV^{(2)}(1,2) = 0. \quad (10.30)$$

Это не более чем строгая формулировка условия сохранения массы. Преобладание положительных корреляций в одной области должно уравновешиваться преобладанием отрицательных в другой.

Энтропия одночастичной функции распределения

$$S^{(1)}(1) = - \int f^{(1)}(1) \ln f^{(1)}(1) dV^{(1)}(1) \quad (10.31)$$

по форме во многом аналогична рассмотренной ранее [см. уравнения (4.5) и (4.6)]. Она возрастает со временем (за исключением случаев равновесия), так как не содержит полного описания системы. Но теперь мы можем определить

и двухчастичную энтропию

$$S^{(2)}(1,2) = - \int f^{(2)}(1,2) \ln f^{(2)}(1,2) dV^{(2)}(1,2). \quad (10.32)$$

Если бы взаимодействия отсутствовали, то, подставив в это определение выражение (10.28) и воспользовавшись равенствами (10.26) и (10.27), можно было бы убедиться в том, что двухчастичная энтропия $S^{(2)}(1,2)$ является суммой одночастичных энтропий. Более того, тот же результат можно было бы получить и для энтропии $S^{(3)}(1,2,3)$ и т. д. вплоть до N -частичной энтропии $S^{(N)}$. Поэтому возрастание во времени одночастичных энтропий означает и возрастание многочастичных энтропий по $S^{(N-1)}$ включительно. Результат перестает быть справедливым для энтропии $S^{(N)}$, поскольку функция распределения $f^{(N)}$ (и только она) удовлетворяет уравнению Лиувилля, и ее значение эквивалентно полной информации об орбитах системы.

Как повлияет на энтропию $S^{(2)}$ появление взаимодействий? Из соотношений (10.32) и (10.29) видно, что в выражении для энтропии $S^{(2)}$ появится несколько неудобный сомножитель $\ln[f^{(1)}(1)f^{(1)}(2) + P(1,2)]$, в котором оба слагаемых могут иметь самую различную величину. Этому выражению можно придать более отчетливую форму, применив разложение в ряд Тейлора в окрестности точки x , справедливое для произвольной аналитической функции

$$f(x+y) = \sum_{j=0}^m \frac{y^j}{j!} \frac{d^j f(x)}{dx^j} + \frac{y^{m+1}}{(m+1)!} \frac{d^{m+1} f(x')}{dx'^{m+1}} \Big|_{x'=x+\alpha y}, \quad (10.33)$$

где число α удовлетворяет неравенству $0 \leq \alpha \leq 1$. Последний член называется остатком ряда; обычно $y \ll x$, а m выбирается достаточно большим для того, чтобы остаток имел произвольно малую величину. Здесь, однако, мы поступим наоборот: положим $m = 0$, что соответствует большим значениям P , тогда остаток будет приблизительно равен сумме всего ряда. В результате получим

$$\begin{aligned} \ln[f^{(2)}(1,2)] &= \ln[f^{(1)}(1)f^{(1)}(2) + P(1,2)] \\ &= \ln[f^{(1)}(1)f^{(1)}(2)] + \frac{P(1,2)}{f^{(1)}(1)f^{(1)}(2) + \alpha P(1,2)}. \end{aligned} \quad (10.34)$$

Далее, применяя соотношения (10.26) — (10.34), найдем разность

$$\begin{aligned} S^{(2)}(1,2) - [S^{(1)}(1) + S^{(1)}(2)] &= - \int P(1,2) \left[1 + \frac{(1-\alpha)P(1,2)}{f^{(1)}(1)f^{(1)}(2) + \alpha P(1,2)} \right] dV^{(2)}(1,2) \\ &= - \int \frac{(1-\alpha)P^2(1,2)}{f^{(1)}(1)f^{(1)}(2) + \alpha P(1,2)} dV^{(2)}(1,2). \end{aligned} \quad (10.35)$$

На последнем шаге вычислений здесь использовано условие сохранения массы

(10.30). При отсутствии взаимодействий или корреляций отсюда легко получается прежний результат, который состоит в том, что двухчастичная энтропия может быть получена как сумма одночастичных энтропий. Если парная корреляция положительна, то подынтегральная функция в (10.35) также положительна. Если же $P(1,2)$ отрицательна, то

$$f^{(1)}(1)f^{(1)}(2) + \alpha P \geq f^{(1)}(1)f^{(1)}(2) + P = f^{(2)}(1,2) \geq 0 \quad (10.36)$$

и подынтегральная функция тоже отрицательна. Поэтому в обоих случаях

$$S^{(2)}(1,2) \leq S^{(1)}(1) + S^{(1)}(2). \quad (10.37)$$

Наличие корреляций всегда ведет к уменьшению двухчастичной энтропии.

В ч. II будет показано, как благодаря этому результату становится возможным понимание тенденции гравитирующих систем к сгущиванию. Гравитация вносит отрицательный вклад в энтропию, и корреляции, возникающие при сгущивании, ведут к ее уменьшению. Если вспомнить, что изменения в системах происходят в направлении экстремума (в гравитационном случае — отрицательного максимума) энтропии, то следует ожидать образования из бесконечных галактических систем все более плотных групп на все более крупных масштабах. Расширение Вселенной влияет лишь на детали процесса сгущивания, как это будет показано в ч. II, но качественно его характер не меняется. Аналогичные явления характерны и для динамики звезд. Эволюция сферических звездных систем идет в направлении отрицательного максимума гравитационной энтропии. Сгущивание в условиях сферической симметрии ведет ко все большему уплотнению ядра вплоть до того, что звезды начинают сталкиваться как тела. Это приводит к взрывам.

Теперь мы в состоянии понять, к каким изменениям в теореме вириала ведет наличие корреляций. К уравнению Лиувилля можно применить тот же подход, что и к уравнению Больцмана при вычислении его моментов с целью получения теоремы вириала. Начав с уравнения (10.13) и подставляя в него выражение для ускорения, взятое из (9.20), получаем уравнение Лиувилля в декартовых координатах

$$\frac{\partial f^{(N)}}{\partial t} + \sum_{\alpha} v_i^{(\alpha)} \frac{\partial f^{(N)}}{\partial x_i^{(\alpha)}} + Gm \sum_{\alpha} \sum_{\beta \neq \alpha} \frac{x_i^{(\beta)} - x_i^{(\alpha)}}{|x^{(\beta)} - x^{(\alpha)}|^3} \frac{\partial f^{(N)}}{\partial v_i^{(\alpha)}} = 0. \quad (10.38)$$

Здесь для простоты массы всех объектов считаются равными постоянной величине, а к декартовым компонентам применяется суммирование по повторяющемуся индексу i . Поскольку все объекты с одинаковой массой (или любым другим свойством) неразличимы для функции распределения, последняя должна быть симметрична по греческим индексам. В случае объектов с разными свойствами нарушение этой симметрии может быть выявлено интересным способом.

Если проинтегрировать уравнение (10.38) по координатам и скоростям всех

объектов, кроме одного, то получим

$$\frac{\partial f^{(1)}}{\partial t} + v_i^{(1)} \frac{\partial f^{(1)}}{\partial x_i^{(1)}} + (N-1)Gm \int \int \frac{x_i^{(2)} - x_i^{(1)}}{|x^{(2)} - x^{(1)}|^3} \frac{\partial f^{(2)}}{\partial v_i^{(1)}} dx^{(2)} dv^{(2)} = 0. \quad (10.39)$$

Суммирование по индексу $\beta \neq \alpha$ приводит с учетом симметрии функции $f^{(N)}$ к появлению множителя $(N-1)$. Если отвлечься от последнего слагаемого, имеющего сложный вид, уравнение (10.39) очень напоминает уравнение Больцмана (8.7). Мы еще раз очевидным образом приходим к цепочке уравнений, поскольку изменение функции $f^{(1)}$ зависит от функции $f^{(2)}$. Можно тем не менее поступить аналогично тому, как это было сделано в гл. 8 и 9, но усреднение надо вести теперь не по отдельной системе, а по всему ансамблю систем. В результате получим теорему вириала в виде (Chandrasekhar and Lee, 1968)

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 I_{ij}}{dt^2} = 2T_{ij} + \Pi_{ij} + W_{ij}. \quad (10.40)$$

Это уравнение очень похоже на (9.14). Разница состоит в том, что величина P_{ij} , которая определяет интеграл давления Π_{ij} по формуле, аналогичной (9.7), представляет собой среднее по ансамблю, а не по системе, как в равенстве (8.18), а также в том, что теперь для W_{ij} вместо соотношения (9.9) имеем

$$W_{ij} = \frac{1}{2}(N-1)G \int \int \rho^{(2)}(x, x', t) \frac{(x_i - x'_i)(x_j - x'_j)}{|x - x'|^3} dx' dx. \quad (10.41)$$

Основное отличие уравнения (10.40) от теоремы вириала, выведенной из бесстолкновительного уравнения Больцмана, заключается в двухчастичной функции плотности

$$\rho^{(2)}(x, x', t) = \rho^{(2)}(x', x, t) = \iint f^{(2)}(x, v, x', v', t) dv dv'. \quad (10.42)$$

Она выражает вероятность того, что в точке x находится некоторый объект, а в точке x' — какой-либо другой, объект, причем скорости этих объектов не имеют значения. Если эти две вероятности независимы, получим $\rho^{(2)}(x, x') = \rho^{(1)}(x)\rho^{(1)}(x')$ аналогично (10.28). В этом случае соотношение (10.41) переходит в (9.9) с соответствующим изменением нормировки. Однако, если координаты объектов коррелированы, в выражении для W_{ij} появится дополнительное слагаемое, поскольку $\rho^{(2)}$ заменим на $\rho^{(2)}(x, x') = \rho^{(1)}(x)\rho^{(1)}(x') + P^{(2)}(x, x')$. Если выполнить операцию свертки над слагаемым $P^{(2)}$, представляющим собой корреляционную функцию, полученная величина W_{ii} будет представлять гравитационную корреляционную энергию системы. Эта энергия имеет большое значение для понимания сгущивания галактик.

11. ПОЛУЧЕНИЕ ИНФОРМАЦИИ: ЦЕПОЧКА УРАВНЕНИЙ ББГКИ

Где то знание, что затерялось в информации?

Т. Элиот

ББГКИ — начальные буквы имен физиков, которые независимо друг от друга и при решении разных задач разработали строгий метод получения информации из дифференциальных уравнений в частных производных со многими переменными: Борн, Боголюбов, Грин, Кирквуд и Ивон. Основная идея этого метода состоит в том, чтобы вместо одного уравнения с большим числом переменных получить много уравнений с малым числом переменных. Последние не могут быть уравнениями орбит, поскольку каждое уравнение орбиты содержит координаты и скорости всех других объектов. Теорема вириала и уравнения моментов более высоких порядков могут быть полезны при ответе на некоторые вопросы, но для многих других они непригодны, поскольку усредняют слишком много информации. Тем не менее последовательность зацепляющихся уравнений, которые составлены относительно приведенных функций распределения (10.25), может дать достаточно точную информацию.

Для лучшего понимания различий между теми или иными приближенными формулировками задачи многих тел на рис. 10 показаны соотношения между содержащейся в них информацией. Как основное кинетическое уравнение, так и уравнение Лиувилля представляют собой независимую отправную точку в описании задачи многих тел. Уравнение Лиувилля является абсолютно самостоятельным и самосогласованным (на рисунке оно обведено в рамку), тогда

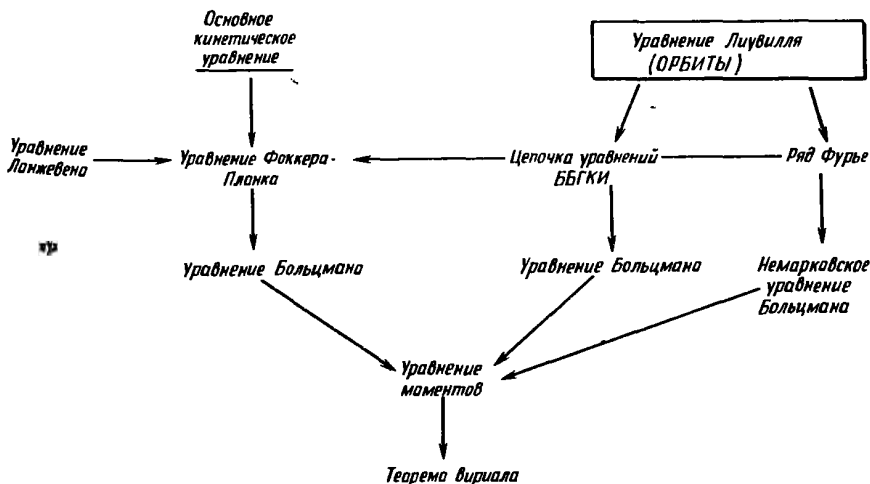


Рис. 10. Соотношения между различными описаниями задачи многих тел.

как основное кинетическое уравнение требует для своего использования ввода дополнительной физической информации. Уравнение Ланжевена имеет настолько феноменологический характер, что выделено на рисунке в отдельный класс.

Стрелки на рис. 10 ведут в направлении потери информации с целью получения разрешимых уравнений. Под информацией здесь подразумевается точность описания в задаче многих тел. Она может быть потеряна в результате сокращения числа переменных, отбрасывания остатка ряда Тейлора, усреднения по моментам. В физике многих тел очень важно умение найти простейший уровень описания, который давал бы достаточную для решения задачи информацию. Один из аспектов этого умения заключается в разработке специальных моделей, позволяющих обойти тот формализм, который мы собираемся теперь использовать. Такой строгий формализм необходим в любом случае, ибо он дает эталон для проверки точности этих моделей.

Цепочку уравнений для приведенных функций распределения мы получим из уравнения Лиувилля в координатной форме (10.38). Изменение нормировки функции $f^{(n)}$ переходом от соотношения (10.25) к равенствам

$$f^{(n)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{x}_n, \mathbf{v}_n, t) \equiv f^{(n)}(1, \dots, n) = \frac{(N/\rho)^N}{(N-n)!} \int f^{(N)}(1, \dots, N) d\mathbf{x}_{n+1} d\mathbf{v}_{n+1} \dots d\mathbf{v}_N, \quad (11.1)$$

$$\int f^{(N)} dV^{(N)} = (\rho/N)^N N! \quad (11.2)$$

позволит избежать нагромождения коэффициентов в записи конечных уравнений. Через ρ здесь обозначена плотность числа объектов. Факториалы в нормировочных множителях отражают число возможных перестановок неразличимых объектов в соотношении для симметричной функции распределения $f^{(n)}$ [см. соотношение (10.39)].

Итак, функция

$$f^{(n)}(1, \dots, n) d\mathbf{x}_1 d\mathbf{v}_1 \dots d\mathbf{x}_n d\mathbf{v}_n \equiv f^{(n)} dV^{(n)} \quad (11.3)$$

равна вероятности того, что n объектов расположены одновременно в различных элементах объема $d\mathbf{x}_1, \dots, d\mathbf{x}_n$, находящихся в точках $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ соответственно, и имеют при этом скорости, заключенные в элементах $d\mathbf{v}_1, \dots, d\mathbf{v}_n$, находящихся в точках $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$.

Умножим равенство (10.38) на $(N/\rho)^N/(N-n)!$ и проинтегрируем по $dV^{(N-n)} = d\mathbf{x}_{n+1} \dots d\mathbf{v}_N$ при произвольном значении n . Первое слагаемое сохранит прежний вид $\partial f^{(n)}/\partial t$. Во второй группе слагаемых члены с номером $\alpha \leq n$ дадут

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial f^{(n)}}{\partial \mathbf{x}_i},$$

где форма записи упрощена заменой индекса i в (10.38) на обозначение скаляр-

ного произведения векторов с помощью точки, а вместо переменной суммирования по частицам (α) введена переменная i . Оставшиеся члены с номером $\alpha > n$ можно проинтегрировать по частям. В результате интеграл каждого из них обратится в нуль, поскольку v_i и x_i — независимые переменные, а вклад на границах области интегрирования

$$v_i f^{(N)}(x_{n+1})|_{x_{n+1} \rightarrow -\infty}^{x_{n+1} \rightarrow \infty}$$

исчезнет, если система конечна. Он исчезает также в случае бесконечной системы, если только она однородна на больших масштабах, так что функция $f^{(N)}$ одинакова на обоих пределах интегрирования; предположим, что именно такую систему мы и рассматриваем. Особый случай представляет сферически-симметричное распределение, которое выражается четной функцией от x_{n+1} . Такое же интегрирование по частям применим и к последней группе слагаемых. Теперь $f^{(n)}$ зависит от всех функций $f^{(n')}$ с номером $n' > n$, поскольку ускорение n -й частицы зависит от координат всех остальных частиц. Тем не менее симметрия функции $f^{(N)}$ позволяет заменить приведенные n' -частичные функции распределения функцией $f^{(n+1)}$.

Результатом интегрирования уравнения (10.38) является цепочка уравнений ББГКИ для гравитирующих систем в отсутствие внешней силы

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^n v_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} - \sum_{i \neq j}^n \mathcal{V}(i, j) \right] f^{(n)}(1, \dots, n) \\ &= \sum_{i=1}^n \int \mathcal{V}(i, n+1) f^{(n+1)}(1, \dots, n+1) dx_{n+1} dv_{n+1}. \end{aligned} \quad (11.4)$$

Здесь использовано обозначение

$$\mathcal{V}(i, j) \equiv \frac{\partial \phi(i, j)}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial}{\partial v_i} \quad (11.5)$$

для взаимодействия пары частиц (i, j) с потенциалом гравитационного взаимодействия

$$\phi(i, j) = - \frac{Gm}{|x_i - x_j|}. \quad (11.6)$$

Уравнение (11.4) в действительности представляет собой последовательность N уравнений, по одному для каждого значения n . Каждое n -е уравнение связано с $(n+1)$ -м вплоть до значения $n = N$, при котором уравнение (11.4) превращается в уравнение Лиувилля. При $n = 1$ мы получили бы бесстолкновительное уравнение Больцмана, если бы правая часть с функцией $f^{(2)}$ под знаком интеграла была равна нулю. Здесь мы можем видеть, как столкновительный член в уравнении Больцмана отражает комбинированные эффекты «рассеяния» одного объекта на всех остальных в отсутствие обычных упрощений

приближения твердых шаров. Каждое уравнение цепочки можно также рассматривать как «проекцию» полной динамики системы на эволюцию соответствующей частичной функции распределения.

Получив цепочку уравнений ББГКИ, мы ничего не выиграли и не потеряли по сравнению с уравнением Лиувилля: число входящих в нее уравнений равно числу звезд в системе. Но при такой формулировке задачи мы надеемся найти подходящее физическое приближение, которое давало бы возможность обрезать цепочку так, чтобы получить разрешимую систему уравнений. Первоначально уравнение (11.4) или эквивалентное ему применялось для решения задач о распределении молекул в газах и жидкостях и ионов в плазме. Такие системы близки к равновесию. Поведение гравитирующих систем иное, и, чтобы сравнить их между собой, надо рассмотреть три характерных времени, существенных при изучении их кинетики (см. гл. 6).

Во-первых, существует характерное время, в течение которого происходят столкновения $\tau_* \approx r_0/v$, где r_0 — характерное расстояние взаимодействия для рассеяния двух объектов на большие углы, а v — относительная скорость этих объектов. Во-вторых, существует время между столкновениями $\tau_0 \approx \lambda/v$, где λ — средняя длина свободного пробега объекта. В-третьих, существует время макроскопической релаксации $\theta_0 \approx L/v_0$, где L — характерное расстояние, на котором меняется тот или иной макроскопический параметр (плотность, температура или давление) при распространении со скоростью v_0 . Часто, хотя и не всегда, v_0 имеет тот же порядок величины, что и дисперсия скоростей.

Некоторые кинетические системы, такие, как слабо неоднородная плазма или молекулярные газы, видимо, удовлетворяют гипотезе, высказанной Боголюбовым. Он предположил, что выполнение условия $\tau_* \ll \tau_0 \ll \theta_0$ позволяет четко различать три этапа динамической эволюции системы N тел.

а. Первоначально все функции распределения $f^{(n)}$ претерпевают быстрые и хаотические изменения в течение времени $\sim \tau_*$, за исключением функции $f^{(1)}$, изменение которой происходит медленно, поскольку она непосредственно не отражает индивидуальные взаимодействия частиц.

б. Кинетический этап наступает по прошествии времени $\sim \tau_*$. Ему предшествует первое сглаживание, в результате которого теряется точная исходная информация, и вся зависимость системы от времени полностью переходит в функцию $f^{(1)}$, которая удовлетворяет функциональному уравнению вида

$$\frac{\partial f^{(1)}}{\partial t} = \mathcal{F}[\mathbf{x}, \mathbf{v}, f^{(1)}]. \quad (11.7)$$

Уравнение Больцмана и Фоккера — Планка являются частными случаями уравнения (11.7)

в. Гидродинамический этап начинается по прошествии времени, в несколько раз превышающего время столкновения τ_0 . Здесь происходит второе сглаживание, после которого между скоростями объектов устанавливается равновесие, а зависимость системы от времени целиком содержится в макроскопических переменных (например, плотности, средней скорости, температуре), которые являются моментами функции $f^{(1)}$ относительно скоростей.

Гравитирующие системы могут быть самыми различными. Чтобы правильно определить их характерные времена, используем выражение для расстояния взаимодействия $r_0 \approx b \approx Gm/v^2$, которое получается из (2.1) при рассеянии на большие углы. В результате приходим к характерным кинетическим временам, которые сведены в табл. 1, причем время гравитационного отклика (6.3) представляется выражением:

$$\tau_G \equiv (R^3/Gm)^{1/2}. \quad (11.8)$$

Такое время отклика имела бы система, содержащая только один объект, масса которого равномерно распределена по всему объему.

Если гравитирующая система близка к равновесию, то функция $f^{(1)}$ близка к распределению Максвелла — Больцмана и теорема вириала приблизительно справедлива. При этих условиях из табл. 1 получим

$$\tau_*/\tau_0 \approx N^{-2} \quad \text{и} \quad \tau_0/\theta_0 \approx N. \quad (11.9)$$

В шаровом скоплении, например, $N \approx 10^5 - 10^6$, и такая система застревает на почти «бесстолкновительном» кинетическом этапе. Как было показано в гл. 6, для слабых далеких сближений в таких системах в отсутствие подавления справедливо соотношение $\tau_{*L} \approx N\tau_{0L}$. При максимальном подавлении такие далекие сближения должны стать некоррелированными через макроскопическое время прохождения, так что $\tau_{*L} \approx \tau_{0L} \approx \theta_0 \approx \tau_G N^{-1/2}$. Предположению Боголюбова не удовлетворяют ни далекие, ни близкие столкновения, по-

Таблица 1. Характерные кинетические времена в гравитирующих системах N тел

	Произвольная система N тел	Произвольная гравитирующая система	Система, близкая к вириальному равновесию	Система с хаббловским расширением
Время столкновения	$\tau_* \approx r_0/v$	Gm/v^3	$\tau_G N^{-3/2}$	$\tau_G N^{-1/2}$
Время между столкновениями	$\tau_0 \approx \lambda/v$	$v^3 R^3/G^2 m^2 N$	$\tau_G N^{1/2}$	$\tau_G N^{-1/2}$
Время макроскопической релаксации	$\theta_0 \approx L/v_0$	R/v_0	$\tau_G N^{-1/2}$	$\tau_G N^{-1/2}$

этому подход ВВГКИ нельзя применять к звездным системам в прямой аналогии с жидкостями, газами или плазмой. В лучшем случае его можно использовать для вычисления небольших отклонений от первичного состояния вещества с малыми начальными корреляциями.

Когда начальное распределение скоростей удовлетворяет закону Хаббла, относительная скорость двух галактик $v \approx rH$, где r — расстояние между ними, а $H \approx (GmN/R^3)^{1/2} \approx \tau_G^{-1} N^{1/2}$. Постоянную Хаббла H можно интерпретировать как величину, обратную характерному времени макроскопической релаксации или времени распространения возмущений по системе. В таких космических системах расстояние взаимодействия имеет тот же масштаб, что и большие неоднородности гравитационного поля, равный приблизительно среднему расстоянию между ближайшими соседями. Поэтому все три характерных времени в этих системах приблизительно равны между собой, и разные этапы кинетической эволюции неотделимы друг от друга. При этом все же существует важная задача, которая может быть решена с помощью подхода БВГКИ: нарастание сгущивания на ранних этапах эволюции в первоначально некоррелированном бесконечном распределении галактик. Мы исследуем эту задачу в ч. II.

12. ПОЛУЧЕНИЕ ИНФОРМАЦИИ ИЗ УРАВНЕНИЯ ЛИУВИЛЛЯ: РЯД ФУРЬЕ

Знание без мысли — потерянный труд, мысль без знания — опасность.
Конфуций

Для получения важных результатов из уравнения Лиувилля Пригожиным (1962) с сотрудниками был разработан формализм, заменяющий цепочку уравнений БВГКИ. Здесь, не вдаваясь в детали, мы опишем лишь общий метод и некоторые выводы из него, относящиеся к гравитирующим системам. В гл. 14 лежащая в основе этого подхода идея будет применена к уравнению Больцмана, и мы покажем, что с ее помощью можно описать эффект помещения массивного зонда в скопление звезд или галактик.

Начнем опять с уравнения Лиувилля (10.14), записанного в виде, аналогичном уравнению Шредингера [см. (7.20)]:

$$i \frac{\partial f^{(N)}}{\partial t} = L f^{(N)}, \quad (12.1)$$

где оператор Лиувилля L определяется равенством

$$L f^{(N)} = i \{H, f^{(N)}\} = i \sum_{j=1}^{3N} \left(\frac{\partial H}{\partial q_j} \frac{\partial}{\partial p_j} - \frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial}{\partial q_j} \right) f^{(N)}. \quad (12.2)$$

Для гамильтониана имеем

$$H = \sum_{k=1}^N \frac{p_k^2}{2m} - \frac{Gm^2}{2} \sum_{j \neq k}^N |\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k|^{-1}. \quad (12.3)$$

(Там, где предел суммирования равен N , индексы нумеруют объекты, а там, где он равен $3N$, индексы относятся к трем компонентам вектора для каждого из объектов системы.) Поскольку сам оператор L не зависит от $f^{(N)}$, уравнение (12.1) линейно по $f^{(N)}$ и суперпозиция решений (12.1), соответствующих различным собственным функциям оператора L , также принадлежит множеству решений (12.1). Умножение уравнения (12.1) на $i = \sqrt{-1}$ имеет целью сделать оператор L эрмитовым, а его собственные значения — действительными числами, что представляет известные удобства. Чтобы показать это, рассмотрим две произвольные функции $f_1(p_1, \dots, q_N)$ и $f_2(p_1, \dots, q_N)$, интегрируемые в фазовом пространстве. Условие эрмитовости, справедливое для каждого члена под знаком суммы в соотношении (12.2), состоит в выполнении (для произвольного члена) равенства

$$\begin{aligned} \int f_1^*(L f_2) dp_j dq_j &= i \int f_1^* \left[\frac{\partial H}{\partial q_j} \frac{\partial f_2}{\partial p_j} - \frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial f_2}{\partial q_j} \right] dp_j dq_j \\ &= -i \int f_2 \left[\frac{\partial H}{\partial q_j} \frac{\partial f_1^*}{\partial p_j} - \frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial f_1^*}{\partial q_j} \right] dp_j dq_j \\ &= \int f_2 (L^* f_1^*) dp_j dq_j. \end{aligned} \quad (12.4)$$

Здесь выполнено интегрирование по частям при обычном предположении об обращении в нуль функций f_1 и f_2 на границах фазового пространства.

Собственным функциям ψ_k оператора L соответствуют собственные значения λ_k , определяемые равенством

$$L \psi_k = \lambda_k \psi_k. \quad (12.5)$$

Умножая (12.5) на ψ_k^* , интегрируя по фазовому пространству и замечая, что условие (12.4) дает, в частности, основание считать $\int \psi_k^* (L \psi_k) dp dq$ действительным, находим, что собственные значения λ_k также действительны.

Предположим, что собственные функции из соотношения (12.5) образуют полную ортонормированную систему, так что функция распределения может быть получена в виде их суперпозиции

$$f^{(N)}(p_1, \dots, q_N, t) = \sum_k a_k(t) \psi_k(p_1, \dots, q_N). \quad (12.6)$$

В таком же виде можно записать и любую другую функцию, определенную в фазовом пространстве.

Подставляя разложение (12.6) в уравнение Лиувилля (12.1) и используя соотношение (12.5), находим, что

$$i \sum_k \psi_k \frac{da_k}{dt} = \sum_k \lambda_k a_k \psi_k. \quad (12.7)$$

Умножая далее на ψ_L^* и используя соотношение ортогональности

$$\int \psi_k \psi_L^* d\mathbf{p} d\mathbf{q} = \delta_{kL} \quad (12.8)$$

[которое следует из (12.5), а также из эрмитовости и общепринятого условия нормировки собственных функций], для каждого собственного значения получаем

$$i \frac{da_k}{dt} = \lambda_k a_k, \quad (12.9)$$

откуда

$$a_k(t) = c_k e^{-i\lambda_k t}, \quad (12.10)$$

где c_k — постоянная. Поэтому формально решение уравнения Лиувилля может быть записано в виде

$$f^{(N)}(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{q}_N, t) = \sum_k c_k e^{-i\lambda_k t} \psi_k(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{q}_N). \quad (12.11)$$

Конечно, отыскание соответствующих конкретному случаю значений c_k , λ_k и ψ_k требует немалых усилий. Многое дает тот факт, что система обратима во времени. Как видно из соотношения (12.11), условие $f^{(N)}(-t) = f^{(N)}(t)$ означает, что каждой собственной функции с собственным значением λ_k соответствует собственная функция с собственным значением $-\lambda_k$. Кроме того, собственные функции комплексны, поскольку $L^* = -L$.

Если бы объекты системы двигались свободно, т. е. без гравитационного взаимодействия, их гамильтониан имел бы вид

$$H = \sum_{\alpha=1}^N \frac{p_{\alpha}^2}{2m}, \quad (12.12)$$

откуда можно получить оператор Лиувилля

$$L = -i \sum_{\alpha=1}^N \frac{p_{\alpha}}{m} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}_{\alpha}}. \quad (12.13)$$

Собственные функции такого оператора являются произведениями

$$\psi(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_N) = D^{-(3N/2)} e^{i\mathbf{z}\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{q}_1}, \quad (12.14)$$

а собственные значения — суммами

$$\lambda(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_N) = \sum_j \mathbf{k}_j \cdot \frac{\mathbf{p}_j}{m}. \quad (12.15)$$

Здесь $\mathbf{k}_j$ — действительный вектор, зависящий от граничных условий, а D — длина ребра куба, содержащего галактики. Для применения теории необходимо перейти к пределу при $D \rightarrow \infty$, вследствие чего граничные условия теряют смысл и могут быть для удобства заменены на обычное условие перио-

личности

$$\mathbf{k}_j = \frac{2\pi}{D} \mathbf{n}_j, \quad (12.16)$$

где $\mathbf{n}_j$ — вектор с целочисленными компонентами. Подставляя собственные функции (12.14) и собственные значения (12.15) в соотношение (12.11), находим, что функция распределения $f^{(N)}$ для невзаимодействующих объектов может быть разложена в ряд Фурье для функции многих переменных. Подробное рассмотрение более простого применения этого метода будет дано в гл. 14.

Для гравитирующих систем подобная задача решается в общем случае путем введения в гамильтониан гравитационной силы в виде возмущения. Далее, исходя из возмущенного оператора Лиувилля, следует найти возмущенные собственные функции, пользуясь в качестве базисной системы собственными функциями в отсутствие взаимодействия. Благодаря гравитационным силам появляются сложные зацепления изменяющихся во времени фурье-компонент, что приводит к кинетическим уравнениям для них. Поскольку гравитирующие системы обладают памятью, эти кинетические уравнения должны быть в общем случае немарковскими. Кроме того, фурье-компоненты тесно связаны с флуктуациями плотности и корреляциями в системе. Кинетические уравнения, таким образом, описывают изменение во времени потока корреляций. При этом немарковские интегралы по времени в фурье-описании связаны с корреляционными интегралами по пространству в ББККИ-описании. Оба типа интегралов отражают отклонения от хаотичности.

Для того чтобы решить эти кинетические уравнения, необходимо сделать некоторые физические предположения и приближения. Газ в ящике, выведенный из состояния устойчивого равновесия, легко поддается описанию. Предполагая существование слабой связи между атомами, можно успешно описать медленное неравновесное возвращение системы в устойчивое состояние. Однако аналогичная трактовка гравитирующих систем сильно затруднена. Гравитационные члены в гамильтониане удерживают конечную систему около виртуального равновесия. Как было показано в гл. 1, эти члены можно разделить на среднее поле и флуктуирующую составляющую. Одно из приближений состоит в рассмотрении областей, малых по сравнению с размерами всей системы. Среднее поле здесь оказывается достаточно постоянным и не оказывает существенного влияния на локальную эволюцию. Если же имеются неоднородности малого масштаба и амплитуды, их корреляции могут быть учтены путем введения дополнительного возмущения в оператор Лиувилля. Требование малости амплитуды также ограничивает масштаб неоднородностей снизу расстоянием $\approx RN^{-1}$ между объектами, при котором происходит их рассеяние на большие углы [уравнение (2.1)]. Если же при очень малых расстояниях между объектами образуются связанные двойные системы, то их можно рассматривать просто как одиночные объекты большей массы. Тройные подсистемы, как и подсистемы более высокого порядка, устроены сложнее, так как в общем случае они неустойчивы; их теоретический анализ пока не выполнен.

При применении метода Фурье к бесконечным однородным системам приходится решать задачи другого рода. Среднее поле в таких системах равно нулю, поэтому становится возможным рассмотрение линейных отклонений от однородного состояния. Эти отклонения приводят к появлению слабой гравитационной связи между объектами. Аппроксимация немарковских кинетических уравнений позволяет получить решения для роста кинетической энергии корреляций в системе. Однако это описание включает только такие процессы, характерное время которых намного превосходит величину $(G\rho)^{-1/2}$. В бесконечных неоднородных системах мы находим свойства как конечных, так и бесконечных однородных систем. В частности, наличие скоплений объектов, обуславливающих нелинейные свойства системы и характеризующихся временем пересечения $\tau_c \approx (G\rho)^{-1/2}$, с одной стороны, и временем τ_R релаксации, обусловленной далекими сближениями, — с другой, приводит к появлению процессов со смешанным характерным временем $(\tau_c \tau_R)^{1/2}$. Исследование с помощью метода Фурье таких систем представляет наибольшие трудности. Применению этого метода к гравитирующим системам посвящен подробный обзор Хэггерти и Северна (*Haggerty and Severne*, 1976).

13. КОЛЛЕКТИВНЫЕ ЭФФЕКТЫ: ГРЕКСОНЫ

Ну-ка, все разом!

Рулевой гребной шлюпки

Биржевая лихорадка, хлынувший на «горячую тему» поток астрономов, действия команды шлюпки, образование галактики — все это примеры коллективных эффектов. Если ход весла гребцов в шлюпке имеет случайное распределение фазы, когда одни гребут вперед, а другие — назад, шлюпка в лучшем случае будет совершать случайные линейные блуждания. Но, если взмахи весел станут синфазными, усилия гребцов будут складываться приблизительно линейно (течение в какой-то степени турбулентно) и шлюпка двинется в определенном направлении. Если число покупателей и продавцов на бирже приблизительно уравновешено, средняя цена акции не претерпевает существенных изменений. Небольшое нарушение равновесия может понизить цены. Если это снижение станет распространяться и углубляться, людей охватит страх потерять состояние. «Продать как можно быстрее!» — мгновенно облетает биржу. Начинается паника. Каждый спешит продать. Биржу лихорадит. Мы видим здесь не только сложные фаз, но и действие, усиливающее само себя. Это действие существенно нелинейно, и результат его — катастрофа. Пример появления модной темы в астрофизике иллюстрирует и другие стороны коллективных явлений (разобрать которые предоставляется читателю в качестве упражнения).

Гравитационным системам свойственны разнообразные коллективные эффекты. Ранее, изучая движение звезды в системе, мы интересовались влиянием системы на звезду, но не наоборот. Очевидно, влияние на систему звезды большой массы значительнее, чем малой, а изменения, вызванные в системе,

в свою очередь окажут воздействие на движение звезды. Чтобы понять, каким образом это повлияет на процесс основной релаксации звездных орбит, описанной в гл. 2, рассмотрим следующее приближенное физическое описание звезды, движущейся через скопление.

В гл. 2 было показано, что в отсутствие влияния на скопление движущейся звезды эта последняя отклоняется от первоначальной траектории на малый угол, средний квадрат которого составляет приблизительно [см. уравнения (2.2), (2.3)]

$$\langle \psi^2 \rangle \approx N \psi^2 \approx \frac{4G^2 m_*^2 N}{v^4 b^2} \text{ радиан} \quad (13.1)$$

при $m_1 = m_2 \equiv m_*$. Более точно, используя соотношение (2.8) и подставляя выражение для дисперсии скоростей в скоплениях

$$v_* = \left(\frac{G m_* N}{R} \right)^{1/2}, \quad (13.2)$$

получаем, что за время одного пересечения $t = Rv^{-1}$

$$\langle \psi^2 \rangle = \frac{24}{N} \left(\frac{v_*}{v} \right)^4 \ln \left(\frac{b_2}{b_1} \right), \quad (13.3)$$

У шаровых скоплений с числом звезд $N = 10^5$, скорость которых $v \geq v_*$, этот угол очень мал. Предположим, однако, что по какой-то причине звезды в скоплении должны были сгруппироваться в несколько когерентных подскоплений. В этом случае величина N должна стать малой, и если бы в систему была введена звезда со скоростью, скажем, $v \approx 2v_*$, то ее угол рассеяния был бы довольно большим. В предельном случае звезда отклоняется всей массой скопления, которое оказывает на нее когерентное воздействие, так что $N \approx 1$ и $b \approx R$. Из уравнения (13.1) в этом случае получается максимальный угол рассеяния

$$\langle \psi^2 \rangle_{\max} \approx (v_*/v)^4. \quad (13.4)$$

Разумеется, такие группы представляли бы собой неравновесные образования (хотя их появление и могло быть обусловлено соответствующими начальными условиями, как при слиянии нескольких скоплений), и коллективное рассеяние на большие углы быстро перераспределило бы орбиты звезд, в том числе и тех, которые принадлежали к этим группам. Эта идея лежит в основе модели «буриной релаксации», которая обсуждается в гл. 38. Прямое перенесение результатов гл. 2 на коллективные эффекты приводит к тому, что полученные формулы оказываются за пределами той области, для которой они были выведены, и мы не вправе ожидать, что они дадут сколько-нибудь точное описание коллективного рассеяния. Тем не менее они в какой-то степени отражают физическое содержание проблемы и обеспечивают введение в точное описание более общего случая.

В этом общем случае массивная звезда массы M_* , имеющая скорость

$v > v_*$, запускается в звездную систему. Двигаясь через нее, она отклоняет орбиты всех остальных звезд, а также отклоняется ими сама. Эти звезды притягиваются более массивной звездой, причем имеется тенденция к возникновению за ней следа, плотность которого превышает среднюю по системе. Орбиты становятся коррелированными, что приводит к появлению внутри системы областей локальной концентрации гравитационной энергии. Часть кинетической энергии хаотического движения звезд, оказавшихся на пути пробной звезды, превращается в энергию направленного движения потока. Время жизни областей концентрации и их точная форма зависят от деталей процесса обмена энергией между звездами внутри следа массивной звезды. Такие области концентрации можно рассматривать как гравитационные возбуждения, созданные быстрой массивной звездой, и назвать их грексонами (grexson). Это слово происходит от латинского grex — «стадо» или «стая» (звезд или галактик) и является также сокращением термина «гравитационное возбуждение» (grex — от слов gravitational excitation — «гравитационное возбуждение». — *Перев.*). Оно имеет, таким образом, двойную этимологию.

Образование грексонов до известной степени аналогично возбуждению плазмонов движущимся в плазме электроном. Однако в отличие от плазмонов грексоны могут становиться неустойчивыми и претерпевать сжатие, что ведет к быстрому усилению их начальных флуктуаций. Такие явления особенно часты в тех системах, которые (временно) имеют дисперсию скоростей, меньшую равновесной, определяемой соотношением (13.2).

Рассмотрим теперь очень простую модель, которая описывает обратное влияние грексонов на орбиту массивной звезды. Чтобы мог образоваться грексон, массивная звезда должна аккрецировать окружающие звезды и сделать их траектории сильно коррелированными. Это происходит за локальное динамическое характерное время

$$\tau_{\text{образ}} \approx (G\rho)^{-1/2}, \quad (13.5)$$

где локальная плотность определяется соотношением

$$\rho = \bar{\rho} + \frac{M_*}{\frac{4}{3}\pi r_g^3} = \bar{\rho} \left(1 + \frac{M_* R^3}{M r_g^3} \right). \quad (13.6)$$

Здесь $\bar{\rho}$ — плотность окружающих звезд, r_g — радиус грексона и M — полная масса звезд в скоплении. Чтобы оценить число грексонов, которые могут образоваться на расстоянии R , приблизительно равном радиусу скопления, рассмотрим два условия появления грексонов. Во-первых, время их образования должно быть меньше того времени, за которое массивная звезда успеет уйти из области аккрецирующих звезд:

$$\tau_{\text{образ}} \lesssim r_g v^{-1}. \quad (13.7)$$

Во-вторых, чтобы мог сформироваться отчетливо выраженный (нелинейный) грексон, вклад массивной звезды в локальную плотность должен быть значительным:

$$\frac{M_*}{r_g^3} \gtrsim \frac{M}{R^3}. \quad (13.8)$$

Таким образом, из соотношений (13.5) — (13.8) найдем, что число грексонов, которые могут образоваться за время движения звезды через систему, составляет приблизительно

$$N_g \approx \frac{R}{r_g} \gtrsim \frac{M}{M_*} \left(\frac{v}{v_*} \right)^2. \quad (13.9)$$

Поэтому чем выше скорость возмущающей звезды и чем меньше ее масса, тем большее число грексонов успеет сформироваться, хотя при этом их масса окажется существенно меньшей.

Рассмотрим далее два предельных случая, которые иллюстрируют рассеяние массивной звезды на образованных ею грексонах. Предположим сначала, что скорости звезд близки к равновесным, а грексоны образуют наиболее симметричный след, согласующийся с распределением статистических флуктуаций позади массивной звезды. Кроме того, поскольку состояние звездной системы так близко к устойчивому, время жизни грексонов невелико, и они не вызывают сгущения второго порядка, поперечного к направлению следа. В этом случае грексон ускоряет возмущающую звезду приблизительно на величину $Gm_g b^{-2} \sin \phi$, где m_g — масса грексона, а $\sin \phi (\approx \phi$, поскольку угол ϕ мал) — угол между орбитой массивной звезды и направлением на центр масс грексона. Если число звезд в грексоне составляет N_{*g} , случайные некоррелированные статистические флуктуации сместят его центр масс на расстояние $\approx r_g N_{*g}^{-1/2}$ от первоначальной орбиты возмущающей звезды. Поскольку такие грексоны являются нелинейными лишь отчасти, число содержащихся в них звезд составит по порядку величины $N_{*g} \approx N (r_g/R)^3$. Наконец, прицельный параметр $b \approx r_g$. Таким образом, уравнение (13.1) переходит в соотношение

$$\langle \psi^2 \rangle \approx \frac{G^2 m_g^2 N_g \phi^2}{v^4 r_g^2} \approx \frac{1}{N} \left(\frac{v_*}{v} \right)^4, \quad (13.10)$$

которое по существу не отличается от уравнения (13.3). Здесь отсутствует логарифмический множитель, поскольку предполагается, что в рассеянии участвуют лишь те грексоны, которые находятся в узкой полосе следа, и интегрирование по полному телесному углу не производится. Итак, в предельном случае отсутствия корреляций рассмотрение взаимодействия грексонов с массивной звездой возвращает нас к исходному анализу. Оно дает также возможность по-иному взглянуть на выводы гл. 2.

С другой стороны, возможно рассмотрение случая сильной корреляции. Если звездная система сама по себе является «холодной» или каким-либо образом неустойчивой, то небольшое число массивных грексонов, образующихся внутри следа, делает движение более удаленных звезд коррелированным. Внутри системы могут, по крайней мере временно, образоваться и вторичные грексоны. Распределенные в большом телесном угле, эти коллективные моды более высокого порядка могут влиять на движение возмущающей звезды, если оно оказывается достаточно медленным. Следует ожидать, что теперь угол рассеяния будет приблизительно определяться формулой

(13.3), где вместо числа рассеивающих центров N будет стоять число грексонов N_g из соотношения (13.9):

$$\langle \psi^2 \rangle \approx \frac{M_*}{M} \left(\frac{v_*}{v} \right)^6 \ln \left(\frac{b_2}{b_1} \right). \quad (13.11)$$

При $M_* \approx m_*$ этот результат совпадает с соотношением (13.3), полученным для некоррелированного случая, поскольку $M = Nm_*$; разница состоит лишь в показателе степени у множителя (v_*/v) , который отличается на 2. Отсюда видно, что в частном случае приближительного равенства $M_* \approx m_*$ и большой величины отношения v/v_* некогерентный вклад различных грексонов преобладает над рассеянием.

Эта оценка верна лишь для малого полного угла рассеяния, не превышающего приблизительно одного радиана. Кроме того, использованные нами до сих пор приближения перестают быть справедливыми при $v \approx v_*$, поскольку отклик системы на движущуюся с малой скоростью массивную звезду значительно сильнее. Он скорее напоминает аккрецию на массивную звезду, чем образование грексоного следа (см. гл. 17). Медленное движение может привести к появлению локальных нелинейных увеличений плотности, которые изменят орбиту массивной звезды приблизительно за локальное динамическое характерное время $\approx \tau_{\text{образ}}$, определяемое соотношениями (13.5) и (13.6). Это ускорит процессы релаксации на фактор порядка N , который может оказаться значительным.

В следующей главе результаты (13.10) и (13.11) будут получены более строгим путем как частные случаи точного рассмотрения отклика звездной системы на пробные объекты. Наш метод состоит в применении ряда Фурье к уравнению Больмана. Он аналогичен решению уравнения Шредингера в задаче о квантовомеханическом рассеянии.

14. КОЛЛЕКТИВНОЕ РАССЕЯНИЕ

14.1 ВЕРОЯТНОСТЬ РАССЕЯНИЯ

Запустим через звездную систему массивную звезду. Как было показано в предыдущей главе, даже в случае симметричной и однородной системы произойдет отклонение пробной звезды теми флуктуациями, которые она сама наводит в распределении звезд. Эти флуктуации предполагают обмен энергией и импульсом между системой и пробной звездой. Поскольку полные энергия и импульс сохраняются, отклонение пробной звезды можно найти, вычислив созданное ею в системе изменение.

Пусть массивная звезда имеет вначале массу M_0 , импульс $\mathbf{P}_0$ и кинетическую энергию $E_0 = P_0^2/2M_0$. Взаимодействие со звездами поля приводит к изменению импульса на величину $-\mathbf{P}_1$, как это показано на рис. 11. Это изменение импульса может быть разделено на две части. Составляющая P_{1a} выражает изменение величины вектора $\mathbf{P}_0$ и совпадает по направлению с новым импульсом $\mathbf{P}_0 - \mathbf{P}_1$; эта часть дает изменение энергии

$$\Delta E = \frac{1}{2M_0} [P_0^2 - (P_0 + P_1)^2] = \frac{P_{1a}P_0}{M_0} - \frac{P_{1a}^2}{2M_0} \quad (14.1)$$

так как $(P_0 - P_1)^2 \equiv (|P_0| - |P_{1a}|)^2$. Вторая составляющая изменения импульса P_{1b} выражает угол отклонения

$$\theta = 2 \arcsin \frac{|P_{1b}|}{2|P_0|}. \quad (14.2)$$

Если скорость пробной звезды достаточно велика по сравнению с дисперсией скоростей в системе, то малое время взаимодействия с проходящей пробной звездой обусловит незначительность отклика звезд и угол отклонения будет мал. Этот случай мы и собираемся рассмотреть как наиболее простой. А затем нас ждет вознаграждение: он окажется хорошим приближением даже и при малых скоростях. Из геометрии рис. 11 и соотношений (14.1) и (14.2) следует с точностью до членов первого порядка малости:

$$|P_{1a}| = P_1^{\parallel} = M_0 \Delta E / P_0, \quad (14.3)$$

$$|P_{1b}| = P_1^{\perp} = P_0 \theta, \quad (14.4)$$

$$P_1 = P_0 [\theta^2 + (\Delta E / 2E)^2]^{1/2}. \quad (14.5)$$

Перейдем теперь к характеристике эволюции распределения звезд. Вначале оно не коррелировано, а простейшим описанием для случая несущественных корреляций является бесстолкновительное уравнение Больцмана (7.20)

$$i \frac{\partial f}{\partial t} = Bf. \quad (14.6)$$

В начальный момент времени задано распределение звезд, а тем самым и га-

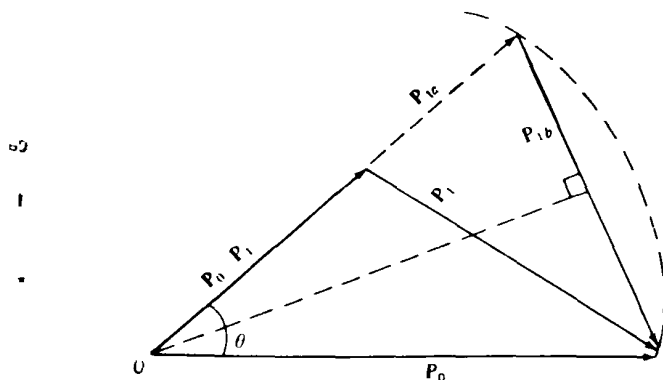


Рис. 11. Изменение первоначального импульса P_0 массивной звезды после прохождения ее через звездную систему.

мильтониан, входящий в оператор Больцмана B , поэтому становится возможным рассматривать (14.6) как линейное уравнение для малых интервалов времени, т. е. линейное до тех пор, пока заметные изменения структуры системы не станут влиять на орбиту пробной звезды. Гамильтониан произвольной звезды системы может быть представлен в виде суммы трех частей:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \mathcal{V}_1(\mathbf{r}) + \mathcal{V}_2(\mathbf{r}), \quad (14.7)$$

где

$$\mathcal{V}_1(\mathbf{r}) = \sum_k \mathcal{V}(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{kl}|) \quad (14.8)$$

— гравитационная потенциальная энергия звезды с координатой $\mathbf{r}$ в поле всех остальных звезд, за исключением массивной пробной звезды, вклад которой в потенциальную энергию равен

$$\mathcal{V}_2(\mathbf{r}) = \mathcal{V}(|\mathbf{r} - \mathbf{R}|), \quad (14.9)$$

причем находится она на расстоянии $|\mathbf{r} - \mathbf{R}|$.

Несмотря на то что функция распределения является действительной величиной, было бы математически корректнее записать ее в виде произведения $f = \psi\psi^*$, где $\psi = \phi e^{i\theta}$ — комплексная амплитуда, а ψ^* — комплексно-сопряженная ей функция, и пользоваться далее модулем ϕ комплексной амплитуды ψ . Подставляя эти соотношения в уравнение (14.6), сразу находим, что модуль ϕ удовлетворяет тому же уравнению эволюции, что и сама функция f :

$$i \frac{\partial \phi}{\partial t} = B\phi. \quad (14.10)$$

Существует несколько способов решения уравнения (14.10). Наиболее простым и, возможно, наиболее прозрачным в смысле физического содержания является фурье-анализ. Начальный этап этого анализа аналогичен анализу уравнения Лиувилля в гл. 12, а его формализм похож на тот, который применяется в задаче о квантовомеханическом рассеянии, хотя интерпретировать его следует по-другому. Если бы звездная система не зависела от времени и была достаточно однородна, так чтобы $\mathcal{V}_1$ и $\mathcal{V}_2$ давали лишь несущественный вклад в гамильтониан, то решения уравнения (14.10) могли бы быть записаны в виде разложений по собственным функциям оператора B_0 , пропорциональным $\sim e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$, которые могут быть найдены из уравнения

$$B_0 \phi_0 = -i \frac{\mathbf{p}}{m} \cdot \frac{\partial \phi_0}{\partial \mathbf{r}} = \omega_k \phi_0. \quad (14.11)$$

Функция распределения и, следовательно, ее амплитуда зависят в общем случае как от импульса (скорости), так и от координаты. Зависимость от импульса может быть выражена через амплитуду каждого коэффициента Фурье, поэтому искомое разложение может быть записано в отсутствие временной зависимости в виде

$$\phi_0(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = D^{-3/2} \sum_k a_k(\mathbf{p}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}, \quad (14.12)$$

$$a_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}) = D^{-3/2} \int \phi_0(\mathbf{p}, \mathbf{r}) e^{(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} d^3\mathbf{r}, \quad (14.13)$$

где волновой вектор $\mathbf{k}$ связан с собственным значением соотношением

$$\omega_{\mathbf{k}} = \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}}{m} \quad (14.14)$$

аналогично формулам (12.12) — (12.15). Здесь мы снова считаем звездную систему заключенной в кубический объем с длиной ребра D . Это нормирует функцию распределения. При увеличении кубического объема, в частности при $D \rightarrow \infty$, эффекты рассеяния на границах становятся пренебрежимо малы по сравнению с рассеянием внутри объема. В этой ситуации граничные условия перестают соответствовать физическому содержанию задачи и могут быть заменены другими, исходя из соображений математического удобства. Чаше всего выбирают условие периодичности, так что $\phi_0(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = \phi_0(\mathbf{p}, \mathbf{r} + D)$ и

$$\mathbf{k} = \frac{2\pi}{D} \mathbf{n}, \quad (14.15)$$

где $\mathbf{n}$ — вектор с целочисленными компонентами, как и в (12.16). Отличие от проведенного ранее рассмотрения уравнения Лиувилля состоит в том, что в данном случае система описывается с помощью единственного трехмерного волнового вектора, тогда как в случае уравнения Лиувилля мы имели N таких векторов, по числу звезд в системе.

Какую же интерпретацию можно дать такому фурье-представлению функции распределения в звездной системе? Как видно из уравнения (14.13), $|a_0(\mathbf{p})|^2$ представляет собой исходную вероятность того, что импульс примет данное значение, т. е. является исходной функцией распределения импульса в системе. Значения $|a_{\mathbf{k}}(\mathbf{p})|^2$ при $\mathbf{k} \neq 0$ представляют вклад в распределение импульса пространственных фурье-компонент полной функции распределения. В таком представлении все пространственные компоненты дискретны. Однако при $D \rightarrow \infty$ разница между различными значениями вектора $\mathbf{k}$, соответствующими различным значениям $\mathbf{n}$, делается сколь угодно малой и состояния системы $a_{\mathbf{k}}$ становятся непрерывными. Поскольку k^{-1} — длина волны в разложении Фурье, $|a_{\mathbf{k}}|^2$ оказывается вкладом пространственных флуктуаций данной длины волны в распределение импульса. Пространственное возмущение однородной системы вызвано возмущением скорости движения звезд, и $a_{\mathbf{k}}(\mathbf{p})$ связывает эти два вида возмущений.

Важно помнить, что каждая волна определенной длины в разложении Фурье имеет нелокальный характер в том смысле, что равномерно пронизывает всю систему. В частности, нельзя сказать, что фурье-компонента с определенной длиной волны сама по себе уже представляет общее возмущение плотности, например, с той же характерной длиной. Чтобы найти действи-

тельное возмущение, необходимо сложить фурье-компоненты всех длин волн, так как все они вносят вклад в это возмущение. Именно в этом состоит существующее в квантовой механике различие между плоской волной и представляющим частицу волновым пакетом.

Исходное состояние реальной системы изменяется со временем в соответствии с уравнением (14.10). Найденные нами не зависящие от времени собственные функции могут быть использованы для построения зависящего от времени вида решения. Поскольку в бесстолкновительном уравнении Больцмана (14.10) функция ϕ допускает разделение переменных, ее можно выразить в виде произведения $\phi(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) = \phi_0(\mathbf{p}, \mathbf{r})\phi_1(t)$ и подставить в (14.10), а затем, используя (14.11), решить полученное уравнение относительно $\phi_1(t)$. В результате получим

$$\phi(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) = D^{-3/2} \sum_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_{\mathbf{k}} t)}. \quad (14.16)$$

Пригодно ли, однако, разложение Фурье для описания эффектов, связанных с возмущающим действием массивной звезды? Очевидно, нет. Даже если бы исходная система продолжала оставаться достаточно однородной, так чтобы потенциалом $\mathcal{V}_1$ можно было пренебречь (а небольшая неоднородность все же должна сохраняться, как это показано в гл. 8), то в отношении потенциала $\mathcal{V}_2$ такой возможности нет. Быстрое движение массивной звезды через систему приводит к возмущениям распределений плотности и скорости звезд поля. Мы видели, что эти два распределения связаны коэффициентами Фурье $a_{\mathbf{k}}(\mathbf{p})$; коэффициенты эти должны, следовательно, также стать функциями времени. Итак, запишем решение в общем виде

$$\phi(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) = D^{-3/2} \sum_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}, t) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_{\mathbf{k}} t)}. \quad (14.17)$$

Определим далее те изменения, которые происходят с коэффициентами Фурье во время движения пробной звезды. Благодаря этому мы сможем понять, каким образом происходит обмен энергией между пробной звездой и системой, рассеяние и замедление пробной звезды. Как видно из уравнений (7.17), (14.9) и (14.10), при возмущении системы пробной звездой эволюция первой описывается уравнением

$$i \frac{\partial \phi}{\partial t} = (B_0 + \delta B) \phi, \quad (14.18)$$

где

$$\delta B = i \frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}. \quad (14.19)$$

Подставляя (14.17) в (14.18) и используя (14.11), находим

$$i \sum_{\mathbf{k}} \frac{da_{\mathbf{k}}}{dt} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_{\mathbf{k}} t)} = \sum_{\mathbf{k}} \delta B a_{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_{\mathbf{k}} t)}. \quad (14.20)$$

Чтобы выделить эволюцию отдельного коэффициента, умножим обе части на

$D^{-3/2} \exp(-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r})$ и проинтегрируем по кубическому объему, используя условия нормировки и ортогональности собственных функций (фурье-гармоник). Поменяв местами переменные суммирования $\mathbf{k}$ и $\mathbf{k}'$, получим

$$i \frac{da_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}, t)}{dt} = D^{-3} \sum_{\mathbf{k}} e^{i\omega_{\mathbf{k}} t} \langle \mathbf{k} | \delta B | \mathbf{k}' \rangle e^{-i\omega_{\mathbf{k}'} t} a_{\mathbf{k}'}(\mathbf{p}, t), \quad (14.21)$$

где матричный элемент оператора

$$\langle \mathbf{k} | \delta B | \mathbf{k}' \rangle = \int e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \delta B e^{i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}} d^3 \mathbf{r} \quad (14.22)$$

действует на величину, стоящую справа от него.

Матричный элемент пропорционален вероятности того, что система перейдет из состояния $\omega_{\mathbf{k}}$ в состояние $\omega_{\mathbf{k}'}$, изменив соответственным образом свою энергию. Чтобы показать это, предположим, что первоначально система находилась в одном определенном «основном состоянии», характеризуемом коэффициентом $a_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}, 0)$, так что при $\mathbf{k} \neq \mathbf{k}'$ $a_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}, 0) = 0$. Интегрирование обеих частей уравнения (14.21) от 0 до t и умножение результата на комплексно-сопряженную функцию дает с точностью до членов первого порядка малости вероятность перехода из состояния $\mathbf{k}'$ в состояние $\mathbf{k}$

$$|a_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}, t)|^2 = 4D^{-6} |\langle \mathbf{k} | \delta B | \mathbf{k}' \rangle a_{\mathbf{k}'}(\mathbf{p}, 0)|^2 \frac{\sin^2[(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}'} t)/2]}{(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}'})^2}. \quad (14.23)$$

Для получения окончательного решения вспомним, что коэффициенты Фурье $a_{\mathbf{k}}$ изменяются во времени и входят в сумму в уравнении (14.21), которое определяет изменение каждого из них в отдельности. Рассматривая решение как ряд последовательных приближений все более высокой точности, мы должны были бы каждый коэффициент $a_{\mathbf{k}}$, полученный в результате первого интегрирования уравнения (14.21), подставить обратно в правую часть этого уравнения и получить второе приближение интегрированием членов, содержащих произведения $\langle \mathbf{k} | \delta B | \mathbf{k}' \rangle \langle \mathbf{k}' | \delta B | \mathbf{k}'' \rangle$ матричных элементов перехода. Третье произведение содержало бы тройные произведения и т. д.

Эта картина, аналоги которой встречаются во многих областях физики, где имеется взаимодействие волн — от теории механических возмущений в газах и жидкостях до квантовой электродинамики, — часто изображается диаграммами, подобными тем, что показаны на рис. 12, а. Система на этом рисунке пребывает в состоянии $\mathbf{k}'$ до момента взаимодействия с потенциалом δV пробной звезды. Затем она переходит в состояние $\mathbf{k}$. Второе приближение описывает результат двух таких взаимодействий. Если потенциал $\frac{1}{2}$ вызывает лишь слабые взаимодействия, то их произведения будут еще слабее, и вклад эффектов высшего порядка в полный обмен энергией будет незначителен. Соотношение (14.23), соответствующее приближению первого порядка, обычно называют борновским приближением; первоначально оно широко применялось в квантовой механике. Его обобщение на взаимодействия второ-

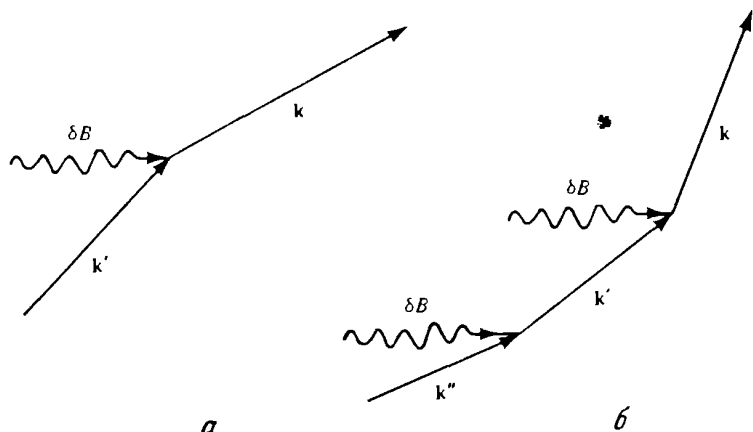


Рис. 12. Схематическое представление в виде диаграмм переходов первого (а) и второго (б) порядка между различными импульсными состояниями звездной системы.

го порядка, представленные на рис. 12,б, (иногда) также называется борновским приближением.

С физической точки зрения борновское приближение получено для случая малых рассеяний. Поэтому оно применимо к пробной звезде, скорость которой превышает скорость хаотического движения звезд поля, и является по существу приближением мгновенного взаимодействия. Оно учитывает как воздействие пробной звезды на исходную систему, так и воздействие возмущенной исходной системы на пробную звезду. Но оно не описывает взаимодействия пробной звезды с теми растущими изменениями в системе, которые были вызваны самими этими возмущениями. Пробная звезда успевает покинуть систему до начала такого взаимодействия.

Исходя из вероятности перехода (14.23), можно вычислить обмен энергии и импульсом между пробной звездой и системой. В конечном счете это дает возможность найти путь пробной звезды в системе и угол ее рассеяния. Сделать это можно двумя равноценными способами. Можно было бы вычислить передачу энергии и импульса из интервала начальных состояний в определенное конечное состояние, но можно также сделать вычисление для определенного начального состояния и интервала конечных состояний. Поскольку нас интересует в основном дифференциальное рассеяние данной звезды в данный телесный угол в единицу времени, второй подход представляется более соответствующим существу задачи.

Проинтегрируем сначала соотношение (14.23) по всем фурье-частотам ω_k (соответствующим различным энергиям), которые вносят вклад в выбранный конечный интервал. Теперь формфактор $(\Delta\omega)^{-2} \sin^2(t\Delta\omega/2)$ в подынтегральном выражении является функцией от $\Delta\omega = \omega_k - \omega_{k'}$, имеющей при больших значениях t резко выраженный максимум, как это показано на рис. 13. При-

равнявая производную этой функции нулю, находим положение ее максимумов: $t\Delta\omega/2 = \operatorname{tg}(t\Delta\omega/2)$ или $t\Delta\omega/2 = 0; 4,49; 7,73; 10,9$ и т. д., а также нулей: $t\Delta\omega/2 = n\pi$, где $n = 0; 1; 2; \dots$; и т. д. Высота центрального максимума равна $t^2/4$, высота следующего отличается на множитель $\approx \sin^2(4,49)/(4,49)^2 = 0,0472$ и т. д. Если время t велико по сравнению с периодом $\sim (\Delta\omega)^{-1}$, соответствующим разности частот между начальным и конечным состояниями, фактор $(\Delta\omega)^{-2} \sin^2(t\Delta\omega/2)$ ведет себя подобно дельта-функции $\delta(\omega - \omega_k)$, которую мы описали в гл. 3. Поскольку он имеет резко выраженный максимум, интеграл по конечному интервалу конечных состояний ω_k в пределе при $t \rightarrow \infty$ может быть заменен интегралом по бесконечному пространству состояний $-\infty \leq \omega_k \leq \infty$. Используя результат интегрирования

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2[(\omega_k - \omega_{k'})t/2]}{(\omega_k - \omega_{k'})^2} d\omega_k = \frac{\pi}{2} t, \quad (14.24)$$

который подтверждает условие нормировки δ -функции, и суммируя по всем конечным состояниям импульса $\mathbf{k}$ внутри телесного угла $d\Omega$, связанным с начальным состоянием матричным элементом $\langle \mathbf{k} | \delta B | \mathbf{k}' \rangle$, получаем вероятность ΔW передачи импульса и энергии в расчете на единицу времени и телесного угла

$$\frac{\Delta W}{t d\Omega} = \frac{2\pi}{D^6} \sum_{\mathbf{k}} (|\langle \mathbf{k} | \delta B | \mathbf{k}' \rangle| |a_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}, 0)|)^2 \delta(\omega - \Delta\omega_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}). \quad (14.25)$$

Здесь мы снабдили обозначение $\Delta\omega_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = \omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}'}$ нижними индексами, чтобы напомнить о зависимости ω от $\mathbf{k}$, выражаемой основными уравнениями рассеяния (14.1) и (14.14), из которых следует также зависимость между $\Delta\omega$ и ΔE .

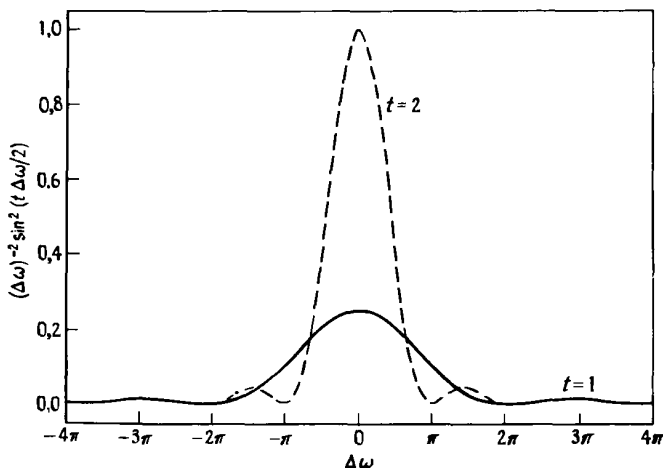


Рис. 13. Графики функций $(\Delta\omega)^{-2} \sin^2(t\Delta\omega/2)$ при $t = 1$ (сплошная линия) и $t = 2$ (штриховая линия).

Физическая интерпретация уравнения (14.25) связана с интересной тонкостью. Это уравнение является аналогом «золотого правила» в квантовой механике, но здесь применяется к небесным объектам (сопоставление, звучащее более естественно по-китайски). Наличие множителя $\delta(\omega - \Delta\omega_{kk'})$ означает сохранение энергии при переходах, так что частоты начального и конечного состояний связаны между собой именно разностью частот этих состояний. Правда, этот результат был получен в пределе бесконечно большого интервала времени, а при больших интервалах поправками более высокого порядка к решению уравнения (14.21) уже вряд ли можно пренебречь. Но здесь проявляется и противоположная тенденция. Увеличивающиеся поправки к коэффициентам a_k ведут к изменению собственных частот основного состояния системы. Резонанс новых частот $\omega_k + \omega_k^{(1)}$ с ω_k нарушается, что приводит к уменьшению их вклада в энергию конечного состояния. С течением времени конечное состояние получает энергию из постоянно сужающегося интервала частот $|\omega_k - \omega_k'| \approx \pi/t$. Таким образом, по мере возрастания t небольшое изменение ω_k может все более сокращать резонансное поглощение энергией конечным состоянием.

Можно представить себе наглядно следующую картину. Массивная пробная звезда рассеивается грексоном за короткий промежуток времени, затем грексон претерпевает изменения и обычно рассеивается окружающими звездами. Внутри следа пробной звезды могут образоваться новые грексоны. Каждый из них за все время своей жизни рассеивает ее на небольшой угол. Пробная звезда движется дальше. Если она движется в существенно однородной среде, процесс коллективного рассеяния может возобновиться далее по траектории при тех же по существу начальных условиях, что и прежде. Таким образом, кумулятивное рассеяние за большие промежутки времени может быть с успехом описано суммой коротких некоррелированных обменов энергией и импульсом. Это приводит к описанному в разд. 14.3 экспериментальному результату, который заключается в том, что борновское приближение пригодно даже для медленно движущихся звезд. Вот еще один пример того, как результат может выходить за рамки первоначально сделанных ограничений.

Легко понять, что следующий шаг, который нам предстоит сделать, — это вычисление матричного элемента в соотношении (14.25). Из определения матричного элемента (14.22) и выражения для возмущенного оператора Больцмана на (14.19) имеем

$$\langle k | \delta B | k' \rangle = i \int e^{-ik \cdot r} \frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial \mathbf{R}} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} e^{ik' \cdot r} d^3 \mathbf{r}. \quad (14.26)$$

Возмущающий потенциал $\mathcal{V}_2$ является здесь суммой по всем тем звездам, которые участвуют в передаче энергии между системой и пробной звездой с координатой $\mathbf{R}$:

$$\mathcal{V}_2(\mathbf{R}) = \sum_j \mathcal{V}(\mathbf{r}_j - \mathbf{R}). \quad (14.27)$$

Это равенство по существу показывает происхождение действующих на пробную звезду коллективных эффектов. Выражение для потенциала $\mathcal{V}_2$ можно пе-

реписать таким образом, чтобы выделить зависимость от координаты с помощью разложения Фурье

$$\mathcal{V}_2 = \sum_j \sum_{\mathbf{k}} \mathcal{V}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_j - \mathbf{R})}. \quad (14.28)$$

Здесь величины $\mathcal{V}_{\mathbf{k}}$ (которые ниже будут представлены в явном виде) представляют собой коэффициенты Фурье функции $\mathcal{V}(\mathbf{r})$. Поменяв порядок суммирования, можно переписать затем внутреннюю сумму в виде

$$\begin{aligned} \sum_j e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_j} &= \sum_j \int e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) d^3\mathbf{r} \\ &= \int n(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d^3\mathbf{r} \equiv n_{\mathbf{k}}^+. \end{aligned} \quad (14.29)$$

Как видим, суммирование $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j)$ по j выполняет роль счетной функции, благодаря которой происходит сложение числа звезд с координатой $\mathbf{r}$ и как результат — получение плотности числа звезд, причем $n_{\mathbf{k}}^+$ — фурье-образ этой плотности с положительным показателем экспоненты. Если волновой вектор $\mathbf{k} = 0$, n_0^+ равно полному числу звезд N . Можно изменить условие нормировки, разделив эту величину на объем, и тогда получим среднюю плотность. При $\mathbf{k} \neq 0$ $n_{\mathbf{k}}^+$ дает флуктуации числа звезд около среднего значения, причем длина волны этих флуктуаций $\lambda = 2\pi/k$. Поскольку волновые векторы не зависят от координаты, они дают еще один пример нелокального описания, которое одинаково применимо в любой точке системы.

Таким образом, фурье-компоненты плотности числа звезд могут быть использованы для описания возбужденных пробной звездой коллективных мод. Из двух последних уравнений получаем выражение

$$\mathcal{V}_2 = \sum_{\mathbf{k}} \mathcal{V}_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}}^+ e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}}, \quad (14.30)$$

в котором координаты и импульсы разделены. Подставляя его в (14.26), найдем матричный элемент перехода из состояния $\mathbf{k}'$ в определенное состояние $\mathbf{k}$ [для чего требуется распространить суммирование (14.29) на все состояния]:

$$\langle \mathbf{k} | \delta B | \mathbf{k}' \rangle = \mathcal{V}_{\mathbf{k}} (n_{\mathbf{k}}^+)_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}} \mathbf{k} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}. \quad (14.31)$$

Это те матричные элементы, которые суммируются по соответствующим $\mathbf{k}$ -состояниям в соотношении (14.25). Множитель $(n_{\mathbf{k}}^+)_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$ представляет собой матричный элемент перехода для флуктуаций плотности числа звезд между состояниями $\mathbf{k}$ и $\mathbf{k}'$. Мы сохраним для него это общее обозначение до тех пор, пока не найдем спектр флуктуаций.

Вычислим сначала коэффициенты $\mathcal{V}_{\mathbf{k}}$. В результате интегрирования получим

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}_{\mathbf{k}} &= -GmM_0 \int \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|} e^{-i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{R})} d^3(\mathbf{r} - \mathbf{R}) \\
&= -GmM_0 \int \frac{1}{r} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d^3\mathbf{r} \\
&= -2\pi GmM_0 \int_0^\infty \int_{-1}^1 \frac{1}{r} e^{-ikr \cos \theta} r^2 d(-\cos \theta) dr \\
&= -\frac{4\pi GmM_0}{k^2}
\end{aligned} \tag{14.32}$$

(поскольку при $k \neq 0$ и $r \rightarrow \infty$ осциллирующий член под знаком интеграла исчезает при усреднении). Отметим то удобство (в плане наших представлений о переходах в определенное состояние), которое заключается в представлении одного фурье-образа, входящего в (14.28), в интегральной форме, а отвечающего ему обратного фурье-образа — в виде дискретной суммы, даже если она в пределе подразумевается непрерывной. Далее, комбинируя выражения (14.31) и (14.32) с (14.25), получаем

$$\frac{\Delta W(\mathbf{p}, \omega)}{i d\Omega} = \frac{32\pi^3 G^2 m^2 M_0^2}{D^6 k^4} \sum_{\mathbf{k}} \left[(n_{\mathbf{k}}^+)_{\mathbf{k}\mathbf{k}} \cdot \mathbf{k} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} |a_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}, 0)| \right]^2 \delta(\omega - \Delta\omega_{\mathbf{k}\mathbf{k}}). \tag{14.33}$$

Мы смогли здесь вынести множитель k^{-4} за знак суммы, поскольку он должен иметь одинаковую величину для каждого члена суммы, соответствующего переходу из однородного начального состояния, т. е. такую величину, при которой энергия сохраняется, как это и должно быть ввиду множителя $\delta(\omega - \omega_{\mathbf{k}\mathbf{k}})$. Суммирование проводится по всем конечным состояниям с импульсом, соответствующим этой энергии. Этот результат является общим для описания рассеяния в бесстолкновительных гравитирующих системах с использованием борновского приближения первого порядка. Чтобы применить его к системам частного вида, перейдем к более глубокой интерпретации этой суммы и к способам определения ее величины.

14.2 ФЛУКТУАЦИИ, КОРРЕЛЯЦИИ, ФОРМФАКТОРЫ И ПРАВИЛО f -СУММ ДЛЯ ЗВЕЗДНЫХ СИСТЕМ

Возвратимся еще раз к невозмущенному состоянию системы. Движение звезд вызывает флуктуации ее плотности во времени. В предыдущих главах мы использовали уравнение движения звезд и функций распределения, применяя для вычисления этих флуктуаций точное выражение для силы или приближение диффузии. Однако эту последовательность действий можно обратить, взяв за основу сами флуктуации. Исходя из точных значений их фаз и корреляций в разные моменты времени и в разных точках пространства, мы можем восстановить точные уравнения движения. Новое открытие законов Ньютона было бы, однако, нелегким делом. Впрочем, мы пройдем лишь небольшую

часть этого пути с тем, чтобы вывести некоторые полезные ограничения для флуктуационных переходов $(n_k^+)_{kk'}$.

Поскольку плотность $n(\mathbf{r}, t)$ является интегралом от функции распределения в пространстве импульсов, а эволюция (14.6) самой функции распределения совпадает с эволюцией модуля ϕ в уравнении (14.10), в невозмущенном ($\mathcal{V}_2 = 0$) состоянии плотность изменяется со временем в соответствии с равенством

$$n(\mathbf{r}, t) = n(\mathbf{r}, 0) e^{-i\omega_k t}. \quad (14.34)$$

Если над обеими частями равенства (14.34) выполнить пространственное преобразование Фурье, единственным его результатом будет замена в (14.34) n на n_k , откуда следует, что эволюция флуктуаций плотности с определенным волновым вектором совпадает с эволюцией самой плотности. Это объясняется тем, что линейные флуктуации амплитуды (при малой величине $\mathcal{V}_1$) не связаны между собой. Поэтому можно ограничить рассмотрение одним членом ряда Фурье. Теперь мы в состоянии найти корреляции этих линейных флуктуаций в объеме всей системы между начальным $t = 0$ и конечным t моментами времени. Чтобы получить временную корреляцию, следует усреднить по всей системе произведение $n_k(\mathbf{r}, t) n_k^+(\mathbf{r}, 0)$. Для этого достаточно вычислить матричный элемент перехода из состояния $\mathbf{k}'$ в то же состояние в более поздний момент времени

$$\begin{aligned} F(\mathbf{k}, t) &\equiv \langle \mathbf{k}' | n_k(t) n_k^+(0) | \mathbf{k}' \rangle \\ &= \sum_{\mathbf{k}''} \langle \mathbf{k}' | n_k(t) | \mathbf{k}'' \rangle \langle \mathbf{k}'' | n_k^+(0) | \mathbf{k}' \rangle \\ &= \sum_{\mathbf{k}''} |(n_k^+)_{\mathbf{k}''\mathbf{k}'}|^2 e^{-i\omega_{\mathbf{k}''} t}. \end{aligned} \quad (14.35)$$

Второе выражение представляет собой сумму по всем собственным состояниям невозмущенной системы, а третье содержит временную зависимость в явном виде. Сумма по всем собственным состояниям имеет физический смысл суммы по всем «виртуальным состояниям», в которые могла бы перейти система с последующим возвращением в первоначальное состояние.

Таким образом, величина $F(\mathbf{k}, t)$ определяет также спектральную плотность состояний, в которые может перейти система. Выполнив над ней преобразование Фурье относительно времени путем умножения последней формулы в (14.35) на $e^{i\omega t}$ и интегрирования по времени, получим функцию

$$F(\mathbf{k}, \omega) = \sum_{\mathbf{k}''} |(n_k^+)_{\mathbf{k}''\mathbf{k}'}|^2 \delta(\omega - \omega_{\mathbf{k}''\mathbf{k}'}), \quad (14.36)$$

которая известна под названием динамического формфактора. Он выражает непосредственно спектр возбуждения флуктуаций плотности, а их корреляции — через свой фурье-образ. Это соотношение между флуктуациями и корреляциями служит частным примером теоремы Винера — Хинчина в теории анализа Фурье.

Динамический формфактор отличается от суммы в соотношении (14.33) только на величину воздействия пробной звезды. Для расчета этого воздействия предположим, что исходное распределение достаточно однородно, так что $a_{\mathbf{k}'} = 0$ для всех $\mathbf{k}' \neq 0$, т. е. преобладают флуктуации с очень большой длиной волны. В этом случае хорошей оценкой для исходного распределения импульса звезд оказывается изотропная функция Максвелла

$$a_0^2(\mathbf{p}, 0) = a_0^2(p^2, 0) = (3/2\pi)^{3/2} \langle p^2 \rangle^{-3/2} e^{-3\mathbf{p} \cdot 2\langle p^2 \rangle}. \quad (14.37)$$

Здесь она нормирована на единицу, а средний квадратичный импульс равен $\langle p^2 \rangle^{1/2}$. Далее, используя соотношение (14.14), найдем

$$\mathbf{k} \cdot \frac{\partial a_0}{\partial \mathbf{p}} = -\frac{3a_0(\mathbf{p}, 0)}{2\langle p^2 \rangle} \mathbf{k} \cdot \mathbf{p} = -\frac{3m\omega_{\mathbf{k}} a_0(\mathbf{p}, 0)}{2\langle p^2 \rangle}. \quad (14.38)$$

Подставив этот результат в (14.33), получим вклад в рассеяние произвольной звезды поля с импульсом $\mathbf{p}$. Интегрирование по всему пространству импульсов даст выражение для рассеяния всеми звездами поля:

$$\frac{\Delta W(\mathbf{k}, \omega)}{t d\Omega} = \frac{9(2\pi)^3 G^2 M_0^2 m^4 \delta(\omega - \omega_{\mathbf{k}\mathbf{k}'})}{D^6 \langle p^2 \rangle^2 k^4} \sum_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}}^2 (n_{\mathbf{k}})_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}. \quad (14.39)$$

Таким образом, воздействие пробной звезды приводит к появлению момента второго порядка динамического формфактора относительно частот перехода.

Для вычисления этого момента выведем известное из классической механики правило f -сумм. Оно является аналогом правила f -сумм, применяемого к силам осцилляторов атомных переходов. Из соотношения (14.29) и преобразования Фурье равенства (14.34) замечаем, что произведение флуктуации плотности на ее производную по времени очень похоже на отдельное слагаемое в соотношении (14.39). Более того, из формулы (7.17) видно, что вся сумма связана со скобкой Пуассона функции $n_{\mathbf{k}}^+$ с ее производной по времени. Но производная функции по времени сама равна скобке Пуассона этой функции с гамильтонианом. Отсюда следует, что мы должны выяснить смысл величины

$$\left\{ -\frac{\partial n_{\mathbf{k}}}{\partial t}, n_{\mathbf{k}}^+ \right\} = \{ \{ n_{\mathbf{k}}, H \}, n_{\mathbf{k}}^+ \}. \quad (14.40)$$

Соотношение (14.29) позволяет преобразовать внутреннюю скобку следующим образом:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial n_{\mathbf{k}}}{\partial t} = \{ n_{\mathbf{k}}, H \} &= \left\{ \sum_j e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_j}, \sum_j \frac{\mathbf{p}_j \cdot \mathbf{p}_j}{2m} + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \gamma(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \right\} \\ &= -\frac{i}{m} \mathbf{k} \cdot \sum_j \mathbf{p}_j e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_j} \equiv -i\mathbf{k} \cdot \mathbf{J}_{\mathbf{k}}. \end{aligned} \quad (14.41)$$

Этот результат имеет важный физический смысл. Направленное движение звезд в системе описывается плотностью их потока

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \sum_j \frac{\mathbf{p}_j}{m} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j), \quad (14.42)$$

а $\mathbf{J}_k$ представляет собой фурье-образ этой величины. Таким образом, уравнение (14.41) является преобразованием Фурье уравнения непрерывности, выражающего сохранение массы.

Итак, двойная скобка Пуассона принимает вид

$$\begin{aligned} \{ \{n_k, H\}, n_k^+ \} &= \left\{ -\frac{i}{m} \mathbf{k} \cdot \sum_j \mathbf{p}_j e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_j}, \sum_j e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_j} \right\} \\ &= -\frac{k^2 N}{m}, \end{aligned} \quad (14.43)$$

ибо скобка Пуассона, являясь линейной функцией, обладает свойством дистрибутивности, и перекрестные произведения $(\partial/\partial p_j)(\partial/\partial r_i) = 0$, в результате чего в конечной сумме остается N слагаемых.

Существует и другой способ вычисления двойной скобки Пуассона; сравнение двух результатов и должно дать искомое правило сумм. Из соотношений (14.29) и (14.34) для функций, сопряженной n_k^+ , имеем

$$\frac{\partial n_k}{\partial t} = i\omega_k n_k(t). \quad (14.44)$$

Далее, наподобие того как функцию, описывающую возмущенное состояние $\mathbf{k}$ системы, можно разложить по собственным функциям основного состояния $\mathbf{k}'$, основное состояние может быть разложено по собственным функциям возмущенного состояния или по любой другой полной системе функций. Найдя таким способом математическое ожидание двойной скобки Пуассона для основного состояния и разложив его по полной системе $\mathbf{k}''$, получим

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{k}' | \{ \{n_k, H\}, n_k^+ \} | \mathbf{k}' \rangle &= \langle \mathbf{k}' | \{ -i\omega_k n_k, n_k^+ \} | \mathbf{k}' \rangle \\ &= 2 \sum_{\mathbf{k}} \{ \langle \mathbf{k}' | -i\omega_k n_k | \mathbf{k}'' \rangle, \langle \mathbf{k}'' | n_k^+ | \mathbf{k}' \rangle \} \\ &= 2 \sum_{\mathbf{k}''} \{ -i\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}''} (n_k)_{\mathbf{k}-\mathbf{k}''}, (n_k^+)_{\mathbf{k}''-\mathbf{k}} \} \\ &= 2 \sum_{\mathbf{k}''} \left\{ \frac{-i\mathbf{k}'' \cdot \mathbf{p}}{m} (n_k)_{\mathbf{k}-\mathbf{k}''}, (n_k^+)_{\mathbf{k}''-\mathbf{k}} \right\} \\ &= -2 \sum_{\mathbf{k}''} \frac{k''^2}{m} (n_k)_{\mathbf{k}-\mathbf{k}''}^2. \end{aligned} \quad (14.45)$$

Появление множителя 2 на втором шаге вычислений объясняется тем, что состояния $\mathbf{k}''$ двукратно вырождены: каждому из них соответствует состояние $\mathbf{k}$

обращенным временем. На четвертом шаге мы воспользовались равенством (14.14). Поскольку этот результат эквивалентен полученному ранее равенству (14.43), из их сопоставления получаем правило f -сумм

$$\sum_{\mathbf{k}''} k''^2 (n_{\mathbf{k}})^2_{\mathbf{k}'' \mathbf{k}} = \frac{N k^2}{2}. \quad (14.46)$$

В атомной физике в этом равенстве обычно фигурирует частота перехода; каждый член левой части, умноженный на $2k^{-2}$, называется здесь силой осциллятора перехода $f_{\mathbf{k}'' \mathbf{k}}$.

Правило сумм можно применять двояким образом. Во-первых, если спектр флуктуаций известен почти во всем диапазоне частот (или волновых векторов), правило сумм позволяет сделать оценку спектра на недостающих частотах. Во-вторых, если в спектре преобладает одна частота, правило сумм дает возможность оценить амплитуду флуктуаций на этой частоте. Здесь будет разобран второй случай.

Связь между частотой и волновым вектором описывается разложением по плоским волнам (14.17). Фронт такой волны движется с фазовой скоростью V_p , которая определяется требованием постоянства фазы волны (в частном случае она может быть равна нулю: $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_k t = 0$). Фазовая скорость волн, движущихся вдоль волнового вектора $\mathbf{k}$, определяется соотношением

$$V_p = \frac{\mathbf{r}}{t} = \omega k^{-2} \mathbf{k}, \quad (14.47)$$

а величина $\mathbf{k}$ составляет $|\mathbf{k}| = \omega/V_p$.

Хотя звезда и не является плоской волной, ее движение может быть представлено в виде суперпозиции плоских волн с различными фазами. Сочетание плоских волн, по которым разложена функция распределения, дает изменяющуюся во времени вероятность $F(\mathbf{r}, t)$ найти звезду в данной точке $\mathbf{r}$ пространства

$$F(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) - i\omega(\mathbf{k})t} d^3 \mathbf{k}. \quad (14.48)$$

Здесь $F(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)$ — функция с резко выраженным максимумом в точке $\mathbf{k} = \mathbf{k}_0$; эта функция определяет профиль волнового пакета. Частота обычно является функцией волнового вектора; такая функция носит название дисперсионного соотношения, поскольку первоначально она применялась для описания дисперсии волн в среде с разным показателем преломления n для разных длин волн [в этом случае угловая частота $\omega = ck/n(k)$]. Из уравнения (14.48) следует, что наиболее конструктивная интерференция составляющих волновой пакет волн наблюдается в тех случаях, где показатель экспоненты достигает экстремума; вероятность найти звезду в этих точках максимальна. Таким образом, здесь должно выполняться условие

$$\frac{d}{d\mathbf{k}} [i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) - i\omega(\mathbf{k})t] = 0, \quad (14.49)$$

или

$$\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{t} = \frac{d\omega}{d\mathbf{k}}, \quad (14.50)$$

и максимум волнового пакета движется в пространстве с групповой скоростью

$$\mathbf{v}_g = \left(\frac{d\omega}{d\mathbf{k}} \right) \Big|_{\mathbf{k}=\mathbf{k}_0} \quad (14.51)$$

В случае простого изотропного линейного дисперсионного соотношения $\omega = ck$ фазовая скорость совпадает с групповой. В гл. 15 мы увидим, что такое соотношение применимо (не точно, но в качестве хорошего приближения) и в нашем случае рассеяния на малые углы. Объясняется это тем, что в основе дисперсии лежит неравновесный отклик звезд поля на движущуюся массивную звезду. К приближению коллективных мод, которые настолько малы, что вызывают рассеяние лишь на малые углы, следует добавить неизменность основной частоты их гравитационного отклика. В этом случае доминирующая частота отклика системы составит

$$\omega = \omega_g = (4\pi G\rho_0)^{1/2} = \frac{\langle p^2 \rangle^{1/2}}{m} k = \frac{\langle p^2 \rangle^{1/2}}{m} k_g. \quad (14.52)$$

Этот результат можно было бы получить, исходя из соображений размерности. Комбинируя соотношения (14.52) и (14.47) при произвольном значении импульса, получаем

$$\mathbf{p} = \frac{m\omega}{k^2} \mathbf{k} = \frac{m\omega_g}{k_g^2} \mathbf{k} = \frac{\langle p^2 \rangle^{1/2}}{k_g} \mathbf{k} = \frac{\langle p^2 \rangle}{m\omega_g} \mathbf{k}. \quad (14.53)$$

Подставляя два последних уравнения в (14.46), находим

$$\sum_{\mathbf{k}''} \omega_{\mathbf{k}''}^2 (n_{\mathbf{k}})^2_{\mathbf{k}'\mathbf{k}''} = \frac{N\omega_g^2 p^2}{2\langle p^2 \rangle}. \quad (14.54)$$

В такой форме правило сумм дает простой способ отыскания суммы в выражении для вероятности рассеяния (14.39). Теперь мы в состоянии завершить ее вычисление.

14.3. УГОЛ ОТКЛОНЕНИЯ. СНОВА ДИНАМИЧЕСКОЕ ТРЕНИЕ

И ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Задача нахождения угла отклонения теперь уже почти решена. Попутно мы получили точное выражение для динамического трения. Подставляя соотношения (14.52) — (14.54) в (14.39), находим, что при данной величине $\mathbf{p}$ передачи импульса

$$\frac{\Delta W(\mathbf{p}, \omega)}{i d\Omega} = \frac{(3\pi)^2 M_0^2 G \langle p^2 \rangle \delta(\omega - \omega_g)}{m D^3 p^2}. \quad (14.55)$$

Для интегрирования по всем значениям передачи импульса необходимо знать плотность состояний в пространстве импульсов. Эта величина связана с плотностью состояний η в k -пространстве соотношениями (14.53) и (14.15). Поскольку $d\eta = (D/2\pi)^3 dk_x dk_y dk_z$, где $k_x = 2\pi l/D$ (l — целое), и т. д., находим, что в пространстве импульсов

$$d\eta = \left(\frac{Dm\omega_g}{2\pi\langle p^2 \rangle} \right)^3 d^3\mathbf{p}. \quad (14.56)$$

Воспользовавшись симметрией в импульсном пространстве, введем цилиндрические координаты, ось которых направлена вдоль исходного импульса массивной звезды, так что из (14.4) получим

$$d^3\mathbf{p} = 2\pi p_\perp^\perp dp_\perp^\perp dp_\parallel^\parallel = p_0^2 dp_\parallel^\parallel d\Omega. \quad (14.57)$$

Чтобы найти вероятность углового рассеяния в единицу времени на единицу обмена энергией, проинтегрируем (14.55) по координатам импульса (исключая малый телесный угол $d\Omega = 2\pi\theta d\theta$), которым соответствует изменение энергии ΔE :

$$\begin{aligned} T(\theta, \omega) &= \left(\frac{Dm\omega_g}{2\pi\langle p^2 \rangle} \right)^3 p_0^2 \int \frac{\Delta W(\mathbf{p}, \omega)}{t d\Omega} \delta(\Delta E - p_\parallel^\parallel V_0) dp_\parallel^\parallel \\ &= \frac{9M_0^2 G m^2 \omega_g^3 \delta(\omega - \omega_g)}{8\pi\langle p^2 \rangle^2 V_0 [\theta^2 + (\Delta E/2E)^2]}. \end{aligned} \quad (14.58)$$

Здесь мы воспользовались формулой

$$\delta(f(x) - f(x_0)) = \frac{1}{\left| \frac{df}{dx} \right|} \delta(x - x_0), \quad (14.59)$$

которая следует из свойств δ -функции, рассмотренных после уравнения (3.4). При выводе этой формулы используется равенство $\delta(f)df = \delta(x)dx$. Отметим особо случай $f(x_0) = 0$.

Вычислим теперь полную скорость обмена энергией между массивной звездой и звездной системой. Обмен энергией $\Delta E = p \Delta p/m$ связан с частотой соотношением (14.47) или $p = m\omega/k$. Основываясь на сделанном нами предположении о том, что в этом обмене преобладает гравитационная частота, получаем $\Delta E = m\omega_g \omega/k_g^2 = \langle p^2 \rangle \omega/m\omega_g$. Таким образом, скорость передачи энергии в телесный угол Ω составляет

$$\frac{dE(\Omega)}{dt} = \int_0^\infty (\Delta E) T(\theta, \omega) d(\Delta E) = \frac{9M_0^2 G \omega_g^2}{8\pi V_0 [\theta^2 + a^2]}, \quad (14.60)$$

где

$$a \equiv \frac{\Delta E_g}{2E}, \quad (14.61)$$

и для единичного акта рассеяния $\Delta E_g = \langle p^2 \rangle / m$. Интегрирование соотношения (14.60) по телесному углу $2\pi \sin\theta d\theta \approx 2\pi\theta d\theta$ даст скорость полного обмена энергией между массивной звездой и звездной системой

$$\frac{dE}{dt} = \frac{9GM_0^2\omega_g^2}{8V_0} \ln\left(\frac{\theta_{\max}^2}{a^2} + 1\right). \quad (14.62)$$

Здесь $\theta_{\max}$ — максимальный угол, в который передается энергия вследствие индивидуальных актов рассеяния (и который не обязательно совпадает с максимально возможным углом рассеяния массивной звезды). Величина угла $\theta_{\max}$ и максимальное волновое число $k_{\max}$, в которое передается энергия, связаны соотношением $p_{l\max}^\perp = p_0\theta_{\max} = \langle p^2 \rangle k_{\max} / m\omega_g$, так что

$$\frac{\theta_{\max}}{a} = \frac{k_{\max} V_0}{\omega_g}. \quad (14.63)$$

Время релаксации по энергии при коллективном рассеянии можно получить из уравнения (14.62):

$$\tau_{R\text{колл}} = \frac{E}{\dot{E}} = \frac{V_0^3}{9\pi G^2 M_0 m n \ln\left(\frac{\theta_{\max}^2}{a^2} + 1\right)}. \quad (14.64)$$

Сопоставление этой формулы с (2.9) показывает, насколько значительно влияние коллективных эффектов. Возьмем частный случай, когда параметры пробной звезды совпадают с параметрами обычной, т. е. $M_0 = m$, а $V_0 = v$. Вспомогательное за формулой (2.8) обсуждение, из которого следует, что при использованном для вывода (14.64) максвелловском распределении правая часть (2.9) должна быть умножена на ~ 5 , видим, что $\tau_{R\text{колл}} \approx 0,7\tau_R$. Таким образом, коллективная релаксация так же существенна, как и обычная. В общем же случае

$$\tau_{R\text{колл}} \approx 0,7 \left(\frac{V_0}{v_*}\right)^3 \frac{m}{M_0} \tau_R. \quad (14.65)$$

Если скорость массивной звезды ненамного превышает скорость звезд поля v_* , то коллективное рассеяние будет очевидным образом преобладать. Звезда же с промежуточной массой не оставит преобладающего следа.

Чтобы найти распределение вероятности для угла рассеяния, после того как массивная звезда пройдет расстояние R , вернемся к уравнению (14.58) и проинтегрируем его по всем частотам. Сейчас мы можем оценить ΔE_g , исходя из соотношения $\Delta E_g \approx \dot{E}R/V_0$, которое приводит (если воспользоваться уравнениями (14.61) — (14.63) и вириальным соотношением) к приближенному равенству

$$a \approx \frac{27 M_0}{8 m N} \left(\frac{v_*}{V_0}\right)^4 \ln\left[\left(\frac{k_{\max} V_0}{\omega_g}\right)^2 + 1\right]. \quad (14.66)$$

Кроме того, при значениях $0 \leq \theta \leq \theta_1$, где θ_1 — максимальный угол рассеяния в этом процессе, интеграл может быть нормирован на единицу. В результате получим

$$T(\theta) = \frac{a}{\arctg(\theta_1/a)} \frac{1}{\theta^2 + a^2}. \quad (14.67)$$

Распределение угла отклонения имеет резко выраженный максимум при $\theta < a$ и падает как θ^{-2} при больших значениях θ (но по-прежнему удовлетворяет условию $p_1 \ll p_0$). В статистике это соотношение известно под названием распределения Коши и встречается достаточно часто. Здесь же оно обрезается при $\theta = \theta_1$, представляя собой точное распределение, лежащее в основе простых результатов, полученных для средних квадратичных отклонений в гл. 13.

Чтобы вновь получить эти результаты, вычислим среднее квадратичное отклонение, исходя из соотношений

$$\langle \psi^2 \rangle = \int_0^{\theta_1} \theta^2 T(\theta) d\theta = \frac{a\theta_1}{\arctg(\theta_1/a)} - a^2, \quad (14.68a)$$

$$\approx 0.28\theta_1^2 \quad \text{при } \theta_1 < a, \quad (14.68б)$$

$$\approx \frac{2}{\pi} a\theta_1 \quad \text{при } \theta_1 > a. \quad (14.68в)$$

Величина $\langle \psi^2 \rangle a^{-2}$ из соотношения (14.68a) показана на рис. 14 как функция от $\theta_1 a^{-1}$.

Когда рассеяние не коррелировано и массивная звезда рассеивается приблизительно на $\sqrt{N}$ звездах, находящихся на расстоянии $\sim R$, имеем $\theta_1 \approx N^{-1/2} (v_*/V_0)^2 < a$, а из соотношения (14.68б) получаем $\langle \psi^2 \rangle \approx N^{-1} (v_*/V_0)^4$, что совпадает с ранее полученным результатом (13.10). С другой стороны, если массивная звезда рассеивается преимущественно малым числом грексонов, то, как следует из (13.4), $\theta_1 \approx (v_*/V_0)^2$, и, используя (14.68в), вновь получаем результат (13.11).

Выбор величины $k_{\max}$, входящей в соотношение (14.66), зависит от характера системы. К счастью, как и в формуле (2.7), результат слабо зависит от точного значения этой величины. Если рассеяние существенным образом не коррелировано, максимальное волновое число приблизительно равно обратному расстоянию между частицами, $N^{1/2} R^{-1}$ и $k_{\max}^2 V_0^2 \omega_g^{-2} \approx N^{3/2} (V_0/v_*)^2 \gg 1$. Для сильно коррелированного рассеяния существует несколько возможностей, и все они приводят примерно к одному результату. Если грексоны распределены вдоль одной линии внутри следа очень массивной звезды и $k_{\max} \approx N_g R^{-1}$, т. е. обратно пропорционально расстоянию между грексонами, то $k_{\max}^2 V_0^2 \omega_g^{-2} \approx N_g^{3/2} (V_0/v_*)^2 \gg 1$. Но если грексоны имеют более сферичное распределение, так что $k_{\max} \approx N_g^{1/2} R^{-1}$, то $k_{\max}^2 V_0^2 \omega_g^{-2} \approx N_g^{3/2} (V_0/v_*)^2 \gg 1$. С другой стороны, если $k_{\max} \approx r_{\text{гп}}^{-1}$, т. е. обратно пропорционально характерному линейному размеру грексона, то из (13.9) получим $k_{\max}^2 V_0^2 \omega_g^{-2} \approx (Nm/M_0)^2 (V_0/v_*)^3 > 1$. На данном этапе задача еще недо-

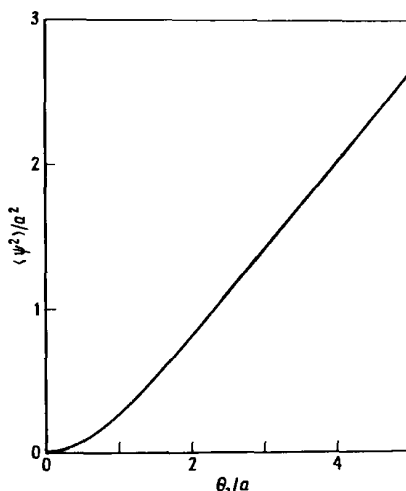


Рис. 14. График уравнения (14.68a) для среднего отклонения.

статочно определена для того, чтобы сделать выбор между этими возможностями. В любом случае, однако, в аргументе логарифма преобладает то слагаемое, которое содержит $k_{\max}$.

Уравнения (14.66) и (14.67) определяют распределение вероятности для угла рассеяния массивной звезды, движущейся через звездную систему. Их вывод потребовал некоторых упрощающих предположений. Основные физические допущения состоят в том, чтобы считать систему однородной, а взаимодействие между массивной звездой и системой — настолько слабым, что отклик системы определяется ее свойствами в отсутствие массивной звезды. Система может состоять даже из звездных групп, если они представляют собой однородно распределенные центры рассеяния, внутренней структурой которых можно пренебречь. Матричные элементы возмущенного оператора Больцмана, сохраняющего в однородной системе волновой вектор, а следовательно, и импульс, описывают переходы между различными импульсными состояниями системы. Изменения орбиты массивной звезды отражают эти переходы. Такой анализ сравнительно простым способом может быть обобщен и на более сложные случаи. Возмущения звездной системы зависящей от времени внешней силой, которые происходят в движущихся вокруг центра галактики шаровых скоплениях, — только первый пример такого рода. Другой пример — приливные взаимодействия при сближении двух или более галактик. Вращающиеся и анизотропные системы представляют третий пример, а передача энергии массивной звезды звездному скоплению — четвертый.

Динамическое трение в форме, аналогичной (14.62), также играет довольно общую роль во взаимодействующих астрономических системах. Динамическое трение испытывают, например, галактики при столкновении, когда происхо-

дит их взаимопроникновение. Конкретный вид происходящих под действием динамического трения процессов зависит от относительной скорости посторонних звезд и галактики, а также от исходного и связанного с приливными силами моментов импульса галактик. Две галактики обычно стремятся к слиянию.

Под действием динамического трения происходит выравнивание средних скоростей. Та звезда, которая движется быстрее окружающих ее звезд, замедляется по отношению к ним. Верно и обратное утверждение [см. уравнение (3.1) и его следствия]. Если скорость звезды меньше средней скорости окружающих ее звезд, последние отклоняются в сторону медленной звезды, и их орбиты слегка фокусируются в направлении ее движения. Гравитационная сила, обязанная своим происхождением увеличенной плотности, оказывает дополнительное воздействие на медленную звезду и ускоряет ее.

Во многих астрономических ситуациях относительная скорость возмущающей звезды и звезд поля не очень велика. Имея в виду эти ситуации, мы утверждали в разд. 14.1, что угол рассеяния обычно остается мал, так что справедливость соотношения (14.62) сохраняется. Для подтверждения правильности такого рода утверждений всегда требуется их проверка численным моделированием задачи N тел ввиду невозможности лабораторных экспериментов. Такая проверка была сделана Уайтом (*White*, 1978). В его модели 250 звезд единичной (в соответствующем масштабе) массы образуют достигшее состояния равновесия самогравитирующее скопление. Распределение плотности $n(r)$ в этом скоплении было аналогично распределению в изотермической сфере, т. е. $n(r) \approx v^2/12\pi Gr^2$, где v — трехмерная дисперсия скоростей. Массивная ($M_0 = 25$) звезда была введена в систему по приблизительно круговой орбите. Эта орбита вскоре стала еще ближе к круговой, поскольку такая орбита обеспечивает минимум энергии при заданном значении момента импульса, а энергия терялась вследствие динамического трения. По истечении значительного времени продолжающееся трение привело к спиральному движению массивной звезды по направлению к центру.

Рассмотрим теперь соответствующую аналитическую модель. В каждый момент времени гравитационная энергия массивной звезды составляет $E = E_0 - (2/3)M_0 v_0^2 \ln(r/r_0)$. Характерными величинами здесь можно считать $E = E_0$ и $r = r_0$ (исходя из модели изотермической сферы с плотностью $n \sim r^{-2}$ и предполагая, что средняя скорость на круговой орбите равна одномерной дисперсии скоростей звезд поля). Тогда соотношение (14.62) принимает вид $\dot{E} = 0,6GM_0^2(v/\sqrt{3})r^{-2} \cdot \ln[k_{\max}^2 V_0^2 \omega_g^{-2} + 1]$, что приводит к $r = r_0(1 - t/T)^{1/2}$ и $E = E_0 - M_0(V_0^2/3)\ln(1 - t/T)$, где $T = vr_0^2/GM_0 \times \ln[k_{\max}^2 V_0^2 \omega_g^{-2} + 1]$. Показано, что эти соотношения находятся в хорошем согласии с результатами численного моделирования динамического трения до тех пор, пока время t приблизительно не сравняется с T . Наилучшее согласие достигалось при $k_{\max} V_0 \omega_g^{-1} \approx 1,1$, откуда следует, что в этом случае $k_{\max} \sim R^{-1}$ и эффективное число грексонов составляет около единицы. Разумеется, когда массивная звезда находится очень близко к центру, величина V_0 становится слишком малой и весь приведенный анализ оказывается недействительным. Однако в остальном приближение рассеяния на малые углы является

ся хорошим даже в этом крайнем случае.

Весь предыдущий анализ может быть также обобщен с целью учета корреляций. Вместо возмущенного бесстолкновительного оператора Больцмана можно использовать возмущение операторов Фоккера — Планка или ББГКИ. В этом возникает необходимость при точном описании эволюции изначально холодной, далекой от равновесия системы. Такая ситуация наблюдается, например, в случае массивной звезды, движущейся через газовое облако, в котором образование звезд произошло недавно, и они не успели достигнуть гравитационного равновесия. Случай массивной звезды, движущейся через галактическое скопление, когда преобладает движение звезд по орбитам вокруг центра галактики, а не движение, вызванное их взаимным притяжением, также заслуживает более подробного рассмотрения

15. ЛИНЕЙНЫЙ ОТКЛИК И ДИСПЕРСИОННЫЕ СООТНОШЕНИЯ

15.1. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

В предыдущей главе мы показали, как определить отклик системы на одну (пробную) звезду. В настоящей главе будет показан ее отклик на группу звезд. Начнем опять с идеализированной, пространственно-однородной системы. Поскольку такое предположение может оказаться слишком сильным, объектом рассмотрения можно считать локальную область системы, первоначально неоднородной на значительно больших масштабах. Это рассмотрение позволит выяснить основные свойства более реальных систем.

Итак, предположим, что в системе возникают возмущения в виде сгущений звезд. Будут эти группы расти или же они постепенно рассеются? Чтобы ответить на этот вопрос, можно сделать грубую оценку; при этом детальный анализ звездных орбит или знание функции распределения не потребуются. Сгущение звезд с полной массой M образует гравитационную потенциальную яму с характерным радиусом $\sim R$ и отрицательной гравитационной энергией, приблизительно равной GM^2R^{-1} . Если движение звезд в сгущении близко к случайному и характеризуется в пределах ямы дисперсией скоростей V , то полная «тепловая» энергия звезд будет приблизительно равна MV^2 (множители ~ 2 нас не интересуют). По мере возрастания массы сгущения с постоянным радиусом гравитационная энергия этого сгущения начинает преобладать над его тепловой энергией, что должно привести к сжатию сгущения. К аналогичному результату приводит и уменьшение радиуса при неизменной массе. Если амплитуда возмущения мала, плотность сгущения не претерпевает значительных изменений, $\rho \approx MR^{-3}$, и приравнивая гравитационную и тепловую энергии, найдем критический радиус

$$R_c \approx V(G\rho)^{-1/2}. \quad (15.1)$$

Сгущения с большим радиусом (при фиксированной плотности) гравитационно сжимаются, с меньшим — рассеиваются. Также следует ожидать, что по порядку величины радиус R_c будет равен характерному размеру изолирован-

ных скоплений, в которых гравитационная и тепловая энергии в среднем по скоплению уравновешены, как, например, в случае вириального равновесия.

Хотя с помощью этих соображений размерности мы получили основной результат, естественным образом возникает ряд существенных вопросов. Во-первых, не очевидно, что в выражение для энергии потенциальной ямы должна входить не масса всего возмущения, а полная масса, заключенная в пределах ямы. Во-вторых, должно быть существенное отличие между случаями газа или непрерывной жидкости и дискретной звездной системы. В последнем случае из-за «зернистого» характера гравитационного поля появляется дополнительное множество разнообразных взаимодействующих мод. В-третьих, поведение неустойчивости в какой-то степени должно определяться тем, как происходит образование сгущения. И в-четвертых, что произойдет, если распределение звезд по скоростям не будет максвелловским? Ведь на самом деле только часть из наблюдаемых во Вселенной систем являются прореагировавшими. Первые два вопроса мы обсудим в данной главе, а два последующих — в гл. 16.

15.2. ГАЗООБРАЗНЫЕ СИСТЕМЫ

Гравитирующий газ в некоторых отношениях проще звездных систем, поэтому его рассмотрение полезно для лучшего понимания этих систем и сравнения с ними. Вопрос об устойчивости бесконечной, первоначально однородной гравитирующей непрерывной среды был впервые проанализирован Джинсом (*J Jeans*, 1902). Эти системы описываются уравнением непрерывности, выражающим сохранение массы:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (15.2)$$

уравнением движения (Эйлера), выражающим сохранение импульса:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla P + \rho \nabla \phi, \quad (15.3)$$

и уравнением Пуассона, связывающим массу с гравитационным потенциалом:

$$\nabla^2 \phi = -4\pi G \rho. \quad (15.4)$$

Первые два уравнения являются моментами столкновительного уравнения Больцмана для газообразных систем. В отличие от случая бесстолкновительных гравитирующих систем эти моменты образуют замкнутую последовательность, если только выполняется условие микроскопического равновесия, а условие детального баланса ограничивает свойства симметрии столкновений. Эти вопросы обсуждаются в учебниках по кинетической теории газов.

Коллективное возмущение можно представить в виде малого изменения плотности, давления, гравитационного потенциала и скорости:

$$\rho = \rho_0 + \rho_1(\mathbf{r}, t), \quad (15.5)$$

$$P = P_0 + P_1(\mathbf{r}, t), \quad (15.6)$$

$$\phi = \phi_0 + \phi_1(\mathbf{r}, t), \quad (15.7)$$

$$v = v_0 + v_1(\mathbf{r}, t), \quad (15.8)$$

где $\rho_1 \ll \rho_0$ и т. д. Поскольку невозмущенный газ однороден, величины нулевого порядка являются постоянными. Для полной согласованности задачи будем считать их равными нулю. Если же принять $\rho_0 \neq 0$, то перейдем к так называемому «обману Джинса». Однако возникающее здесь противоречие не столь важно, поскольку мы можем предположить, что бесконечная среда является неоднородной на масштабах, которые велики по сравнению с областями возможной неустойчивости. Однако реальные конечные системы всегда неоднородны, поэтому при анализе их возмущений, как правило, нужно учитывать градиенты изменения физических величин. Подставляя соотношения (15.5) — (15.8) в (15.2) — (15.4) и сохраняя только члены первого порядка малости, получаем три линейных уравнения для малых изменений четырех переменных ρ_1 , P_1 , ϕ_1 и v_1 . Чтобы получить необходимое четвертое уравнение, связывающее эти переменные, обычно вводят условие адиабатичности или изотермичности возмущений. Тогда флуктуации давления и плотности оказываются связаны соотношением

$$P_1 = \frac{\partial P}{\partial \rho} \rho_1 = c^2 \rho_1 = \frac{\gamma P}{\rho} \rho_1, \quad (15.9)$$

где c — скорость звука, а эффекты гравитации считаются пренебрежимо малыми. Поскольку $P \sim \rho^\gamma$, условию изотермичности соответствует $\gamma = 1$, что следует из уравнения состояния идеального газа.

Подставляя (15.9) в линеаризованное уравнение Эйлера, применяя операцию дивергенции и используя линеаризованные уравнения Пуассона и непрерывности, чтобы исключить ϕ_1 и v_1 , получаем

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \rho_1 + k_J^2 \rho_1 = 0, \quad (15.10)$$

где

$$k_J \equiv \frac{(4\pi G \rho_0)^{1/2}}{c} = \frac{2\pi}{\lambda_J} \quad (15.11)$$

— волновое число Джинса. В отсутствие гравитации $k_J = 0$ и уравнение (15.10) описывает обычные звуковые волны в идеальном газе. Чтобы понять, как гравитация влияет на движение волны, будем искать решения в виде

$$\rho_1 = \text{const} \cdot e^{i(kx - \omega t)}, \quad (15.12)$$

что соответствует распространению волн вдоль оси x . Подставляя эти реше-

ния в уравнение (15.10), получаем, что такие решения должны удовлетворять требованию

$$\omega^2 = c^2(k^2 - k_J^2). \quad (15.13)$$

Это не что иное, как дисперсионное соотношение, устанавливающее зависимость между частотой и волновым числом. Из него, как и в (14.47), получим фазовую скорость волн

$$V_p = \frac{\omega}{k} = c \left(1 - \frac{k_J^2}{k^2} \right)^{1/2} \quad (15.14)$$

Ее изменение показано на рис. 15. Поскольку волны занимают все пространство, а не распространяются отдельными импульсами, нас здесь интересует скорее фазовая скорость, чем групповая. Как можно заметить, эти результаты не зависят от амплитуды волны, что свойственно всей теории возмущений, поскольку уравнения однородны по возмущению. Амплитуда, таким образом, может быть произвольной, лишь бы она была мала.

Некоторые особенности, возникающие при учете гравитации, очевидны. Пока длина волны возмущений мала, среда очень напоминает идеальный газ, в котором распространяются обычные акустические волны. По мере увеличения длины волны влияние гравитации начинает ощущаться все сильнее. Волны становятся все более медленными, а при $\lambda = \lambda_J$ перестают распространяться совсем. В этот момент их энергия самогравитации сравнима с тепловой. С точностью до множителя $\sqrt{\pi}$ это условие совпадает с критерием (15.1).

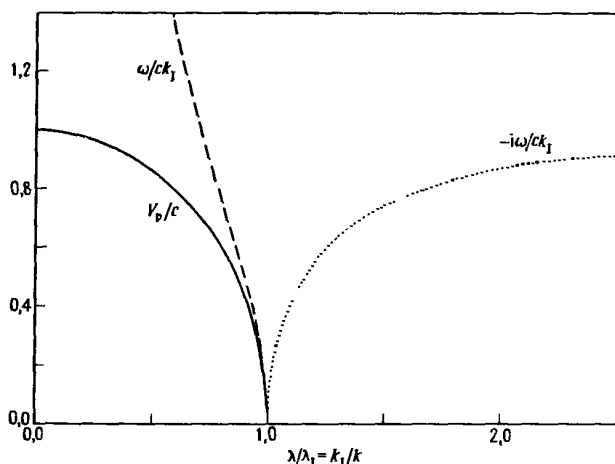


Рис. 15. Фазовая скорость распространения (сплошная линия) в гравитирующем газе и джинсовское дисперсионное соотношение (штриховая линия для действительных значений ω , пунктирная — для мнимых значений ω).

При больших длинах волн преобладает гравитация, и плотность возмущения растет со временем. Дисперсионное соотношение $\omega(k)$ становится комплексным, и мода плотности возрастает со скоростью, которая асимптотически стремится к величине

$$\rho_1 \propto e^{t/\tau} \quad (15.15)$$

при $\lambda \gg \lambda_J$, где $\tau = (4\pi G \rho_0)^{-1/2}$. Имеется также затухающая мода $\sim e^{-t/\tau}$, но она быстро исчезает. Дисперсионное соотношение $\omega = i\kappa k_J$ в сущности то же самое, что и (14.52); более строго это будет показано при рассмотрении звездных систем.

Возмущение не может сжиматься со скоростью, соответствующей (15.15) бесконечно долго, поскольку при $\rho_1 \approx \rho_0$ рост становится нелинейным. Хотя дальнейшее сжатие не описывается рассмотренной выше линейной теорией возмущений, основные уравнения (15.2) — (15.4) остаются применимыми. Вместе с уравнением переноса энергии путем излучения они описывают дальнейшую эволюцию сжимающейся области как изолированного плотного облака. Если гравитационную энергию, выделяющуюся при сжатии, мгновенно превращать в тепло и излучать, то начнется свободное падение и за время, приблизительно равное еще одному периоду $\approx \tau$, облако сожмется в точку. Реальная ситуация намного сложнее, и для ее анализа пришлось бы слишком далеко уйти от предмета исследования (простые примеры см. в работе von Hoerner and Saslaw, 1976).

Таким образом, из линейного анализа видно, как гравитация уменьшает «упругость» звуковых волн. Из него также следует ответ на наш первый вопрос, поскольку в характерное время сжатия входит полная плотность флуктуации $\rho \approx \rho_0$, а не ее превышение над средней плотностью ρ_1 . Но одна волна еще не делает облака. Существуют другие виды решений уравнения (15.10), к которым мы сейчас и перейдем.

Вместо того чтобы заниматься анализом волн произвольного вида, мы можем с помощью уравнения (15.10) проследить изменение возмущения специальной формы. Это равнозначно выбору достаточно простых (т. е. искусственных) для понимания задачи начальных условий. Разумеется, волна любой начальной конфигурации может быть разложена в ряд Фурье, а уравнение (15.10) позволяет следить за изменением спектра, так что для любого момента времени можно восстановить профиль возмущения. Но такой метод, как показано в гл. 14, может оказаться слишком трудоемким. Чтобы еще больше упростить задачу, мы поступим наоборот: определив конкретный вид развития возмущения, найдем, какую пространственную форму оно принимает.

В качестве примера рассмотрим экспоненциально растущее возмущение с произвольным значением τ . Если возмущение сферическое, то его плотность имеет вид

$$\rho_1(r, t) = \rho_1(r) e^{t/\tau}, \quad (15.16)$$

а подстановка $\rho_1(r, t)$ в уравнение (15.10) приводит к уравнению Гельмгольца

$$(\Delta^2 + \chi^2) \rho_1(r) = 0, \quad (15.17)$$

где

$$\chi^2 \equiv k_J^2 - c^{-2} \tau^{-2}. \quad (15.18)$$

В сферических координатах оно принимает вид

$$\frac{d^2 \rho_1}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\rho_1}{dr} + \chi^2 \rho_1 = 0. \quad (15.19)$$

С помощью тривиальной замены переменной

$$\rho = ur^{-1} \quad (15.20)$$

оно преобразуется в обычное уравнение гармонического осциллятора относительно $u(r)$

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \chi^2 u = 0. \quad (15.21)$$

Имеются три класса решений этого уравнения в зависимости от величины χ^2 . При $\chi = 0$ распределение плотности имеет вид $\rho = a + br^{-1}$. Чтобы плотность в центре была конечной, необходимо, чтобы выполнялось условие $b = 0$, т. е. чтобы она была постоянной. Это согласуется с требованием бесконечной длины волны, которое должно выполняться при $\chi = 0$; однако этот случай не очень интересен. При $\chi^2 < 0$ неоднородность будет сжиматься быстрее, чем при свободном падении, поэтому такой случай следует исключить, исходя из физических соображений. При $\chi^2 > 0$, однако, имеются разумные решения вида

$$\rho_1(r) = \rho_1(r=0) \frac{\sin(\chi r)}{\chi r}, \quad (15.22)$$

обеспечивающие конечную плотность в центре. Если такое распределение плотности задать с самого начала, то оно будет сохранять свой вид затухающей синусоиды и в дальнейшем; при этом амплитуда возмущения как целого будет экспоненциально возрастать. Соответствующее распределение гравитационного потенциала, получаемое в результате подстановки (15.22) в уравнение Пуассона, имеет вид

$$\phi_1(r) = c_1 + \frac{c_2}{\chi r} + \frac{4\pi G \rho_1(r=0)}{\chi^2} \frac{\sin(\chi r)}{\chi r}. \quad (15.23)$$

Таким образом, потенциал ϕ_1 равен суперпозиции постоянного члена (который можно выбрать равным нулю), члена, аналогичного по своей природе точечному заряду, и затухающего экранирующего члена, который становится отрицательным при $\chi r > \pi$ и осциллирует по знаку при дальнейшем увеличении r .

Полная возмущенная масса неоднородного облака, таким образом, составляет

$$M = 4\pi \int_0^R \rho_1(r) r^2 dr = 4\pi \rho_1(0) \chi^{-3} [\sin(\chi R) - \chi R \cos(\chi R)]. \quad (15.24)$$

В этом случае плотность падает слишком медленно, что приводит к расхождению объема. При некотором конечном радиусе R влияние окружающих неоднородностей приводит, однако, к эффективному обрезанию распределения (15.22). Если облако образовано путем добавления массы M при сохранении вида распределения плотности, то его радиус определяется соотношением (15.24). Однако если оно образовано путем перегруппировки газа внутри системы, то результирующая возмущенная масса оказывается равной нулю при условии, что радиус R удовлетворяет соотношению

$$\chi R = \text{tg}(\chi R). \quad (15.25)$$

Тогда слои с повышенной плотностью будут в точности компенсировать слои с пониженной плотностью. Критические значения величины χR приблизительно составляют 4,5; 7,7; 10,9; 14,1; 17,2; 20,4; 23,5; 26,7 и т. д. Такое осциллирующее распределение плотности обусловлено сохранением массы (появление избытка вещества в середине облака означает образование дефицита в более удаленных областях), а также тем, что облако не может когерентно взаимодействовать на интервалах времен, меньших времени прохождения облака звуком.

Отметим, что неоднородности, плотность которых меняется как $\rho_1 \sim \sim a_1 + a_2 t^2$ или имеет любой вид гармонической зависимости от времени, будут характеризоваться таким же пространственным распределением плотности. Анализ этих гармонически изменяющихся со временем неоднородностей полезен также для введения важного понятия о гравитационном экранировании. В плазме электронное облако, окружающее положительный ион, экранирует на больших расстояниях его электростатический потенциал. На первый взгляд может показаться, что в гравитирующей системе ничего подобного быть не может, поскольку масса в отличие от электрического заряда имеет только один знак. Однако мы можем перенормировать плотность путем вычитания средней плотности среды. В результате средняя плотность окажется равной нулю, а области с положительной и отрицательной плотностью будут имитировать положительную и отрицательную массу. Отрицательные слои будут эффективно экранировать внешние частицы от внутренних положительных слоев, создающих флуктуирующую гравитационную силу. Таким образом, результирующая сила вне облака, радиус которого удовлетворяет соотношению (15.25), равна нулю.

15.3. ЗВЕЗДНЫЕ СИСТЕМЫ

Установив с помощью анализа непрерывных систем некоторые основные принципы, перейдем к намного более обширной и интересной области — динамике дискретных объектов. «Зернистый» характер гравитационного поля звездных систем приводит к такому их поведению на малых масштабах, при котором их свойства могут накапливаться и давать существенные эффекты на много больших масштабах. Методы анализа таких эффектов на протяжении последних трех десятилетий часто заимствовались из физики плазмы. Однако это заимствование носило обоюдный характер, поскольку многие из ранних плазменных методов, такие, как метод адиабатических инвариантов и уравне-

ние Больцмана, были заимствованы из звездной динамики, которая в свою очередь переняла их из небесной механики и кинетической теории газов. Между всеми этими родственными областями установилась прочная взаимосвязь. В настоящее время физика плазмы является ведущей областью, поскольку исследования в ней стимулируются поиском управляемого термоядерного синтеза.

Чтобы получить дисперсионное соотношение, аналогичное (15.13), для звездных систем, начнем рассмотрение с бесстолкновительного уравнения Больцмана, записанного в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \nabla \phi \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = 0, \quad (15.26)$$

и уравнения Пуассона

$$\nabla^2 \phi = -4\pi Gm \int_{\mathbf{v}} f d\mathbf{v} \quad (15.27)$$

для одночастичной функции распределения. Можно было бы усложнить задачу — учесть распределение звезд по массам или использовать фоккер-планковское или ББГКИ-описания. Однако наша цель состоит в том, чтобы описать основной метод, поэтому более подробный анализ предоставим выполнить самому читателю.

Когда исходная система однородна, ее функция распределения $f_0(\mathbf{v})$ зависит только от скорости. Отклонение части звезд от равновесного положения создает небольшое возмущение, которое отражается в изменении функции f :

$$f = f_0(\mathbf{v}) + f_1(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t). \quad (15.28)$$

Гравитационный потенциал претерпевает аналогичное возмущение

$$\phi = \phi_0 + \phi_1(\mathbf{r}, t). \quad (15.29)$$

Подставляя два последних уравнения в два предыдущих и вычитая из результата уравнения нулевого порядка, относящиеся к состоянию равновесия, получим линеаризованную систему первого порядка

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{r}} + \nabla \phi_1 \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} = 0, \quad (15.30)$$

$$\nabla^2 \phi_1 = -4\pi Gm \int_{\mathbf{v}} f_1 d\mathbf{v}, \quad (15.31)$$

описывающую коллективное возмущение.

Обратимся теперь к таким решениям, в которых f_1 и ϕ_1 имеют вид (15.12) плоских бегущих волн:

$$f_1(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = g(\mathbf{v}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad (15.32a)$$

$$\phi_1(\mathbf{r}, t) = a e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad (15.32b)$$

Если подставить выражение (15.32а) в уравнение (15.30), решить последнее относительно f_1 , проинтегрировать по скоростям и подставить ϕ_1 из формул (15.31) и (15.32б), станет видно, что условием для такого рода решений является выполнение равенства

$$1 = -\frac{4\pi Gm}{k^2} \int \frac{\mathbf{k} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}}}{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega} d^3\mathbf{v} \quad (15.33)$$

Это дисперсионное соотношение между k и ω аналогично (15.13). Оно должно несколько озадачить читателя.

В отличие от случая непрерывных систем соотношение (15.33) может применяться только в интегральной форме, что затрудняет установление явной зависимости между ω и k . (Для электронной плазмы справедливо такое же дисперсионное соотношение, но с другой постоянной и противоположным знаком.) Однако главная трудность состоит в том, что соотношение (15.33) устанавливает зависимость между ω и k только при определенных условиях. Особенность в подынтегральной функции означает, что при заданном значении k может быть много значений ω , удовлетворяющих решению (15.32) при разных значениях v . Физически этим модам соответствуют потоки звезд, движущихся с одинаковой скоростью v , которая оказывается фазовой скоростью волны. Чтобы построить такие моды, нужно найти в системе все звезды с одинаковой скоростью и ввести пространственное возмущение именно этих звезд, поставив ему в соответствие волновой вектор $\mathbf{k}$ и частоту $\omega = \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}$. Возмущение будет переноситься потоком. Суперпозиция различных потоков может дать волну с произвольными значениями ω и k . По мере распространения волн может происходить как возрастание, так и затухание их амплитуды.

Эти моды просты, но имеют искусственный характер. В действительности возмущение возникает в определенной области пространства и затрагивает звезды с самыми различными скоростями. Такая задача с более реальными начальными условиями будет рассмотрена в гл. 16, но прежде обратим внимание на ряд вопросов, которые могут быть исследованы с помощью соотношения (15.33). Кроме того, мы увидим, что это дисперсионное соотношение появляется и в более реальном случае, где его роль, однако, сложнее.

Если функция распределения такова, что не существует звезд, скорость которых в точности совпадала бы с фазовой скоростью v_0 какой-либо из волн, т. е. функция распределения имеет в точках $v = v_0$ экстремум $(\partial f_0 / \partial v) = 0$, то соотношение (15.33) можно проинтегрировать по частям, в результате чего получим

$$1 = -4\pi Gm \int \frac{f_0(v)}{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega)^2} d^3\mathbf{v} . \quad (15.34)$$

Здесь учтено, что другое слагаемое, возникающее при интегрировании по частям, обращается в нуль, поскольку функция $f_0(\mathbf{v})$ быстро убывает при больших значениях v . Чтобы упростить задачу, мы можем направить вектор $\mathbf{k}$ параллельно скорости волны, а знаки векторов опустить. В частном, но поучи-

тельном примере, когда в системе имеется много холодных звездных потоков, движущихся с постоянной скоростью в направлении $v = v_x$, функция распределения описывается выражением

$$f_0(v) = \sum_{\beta} n_{\beta} \delta(v - v_{\beta}), \quad (15.35)$$

где n_{β} — плотность числа частиц β -го потока. Тогда дисперсионное соотношение принимает вид

$$4\pi Gm \sum_{\beta} \frac{n_{\beta}}{(kv_{\beta} - \omega)^2} = -1. \quad (15.36)$$

Ясно, что оно может удовлетворяться только в том случае, если по крайней мере одно из значений ω является комплексным, что выполняется для потоков, у которых амплитуда колебаний возрастает или затухает со временем.

В случае единственного потока решение уравнения (15.33) будет иметь вид

$$\omega = kv \pm i(4\pi G\rho)^{1/2}. \quad (15.37)$$

Волны, рождающиеся вдоль потока, являются неустойчивыми (в отличие от случая электронной плазмы); при этом характерное время развития неустойчивости равно хорошо известному времени гравитационных процессов. А происходит здесь следующее. Области с повышенной плотностью образуют гравитационные потенциальные ямы, которые движутся вместе с волной. Они возмущают скорости других звезд потока. Звезды, возмущенное движение которых происходит в том же направлении, что и движение потенциальной ямы, постепенно нагоняют ее, а звезды, возмущенное движение которых имеет противоположное потоку направление, постепенно настигаются ямой. Захваченные звезды колеблются внутри гравитационной ямы, и, поскольку масса ямы становится больше, она углубляется. Теперь она сильнее притягивает все более удаленные звезды, что приводит к развитию неустойчивости. По мере углубления ямы она прочнее удерживает звезды, и они находятся в ней дольше. Такая положительная обратная связь приводит к экспоненциальному росту возмущений. Поскольку невозмущенный поток является холодным, т. е. имеет нулевую дисперсию скоростей, волны произвольной длины будут неустойчивы с характерным временем развития неустойчивости порядка времени свободного падения.

В другом простейшем случае рассматриваются два холодных взаимопроницающих потока. Здесь возможны конкретные астрономические приложения. Так, например, с помощью этих потоков можно очень идеализированно описать движение звездного скопления через галактику со скоростью, намного превышающей дисперсию скоростей каждой из двух систем. Положим плотность числа частиц в потоках равной n_1 и $n_2 = \alpha n_1$. Задача несколько упростится, если на скорости наложить условие $v_2 = -\alpha v_1$ (обратное условию для скоростей центров масс). Тогда дисперсионное соотношение принимает вид

$$\frac{4\pi Gmn_1(1 + \alpha)(\omega^2 + \alpha k^2 v_1^2)}{[\alpha k^2 v_1^2 + kv_1(1 - \alpha)\omega - \omega^2]^2} = -1. \quad (15.38)$$

Читатель имеет возможность приятно провести вечер, пытаясь уяснить из этого соотношения, каким образом изменение отношения плотностей α влияет на рост мод. Мы же получим здесь наиболее примечательный результат, рассмотрев два потока одинаковой плотности. При $\alpha = 1$ уравнение (15.38) легко решается:

$$\omega^2 = k^2 v_1^2 - 4\pi G m n_1 \left[1 \pm \left(1 - \frac{k^2 v_1^2}{\pi G m n_1} \right)^{1/2} \right]. \quad (15.39)$$

При $v_1 \rightarrow 0$ положительное значение квадратного корня дает ту же неустойчивую моду, что и решение (15.37) для одного потока (хотя и с удвоенной против прежнего плотностью). Для того чтобы мода была комплексной, а ее амплитуда — возрастающей, необходимо, чтобы значение корня было комплексным, т. е.

$$\lambda < 2v_1 \left(\frac{\pi}{G m n_1} \right)^{1/2} \quad (15.40)$$

Малость длин волн неустойчивых мод, возможно, выглядит неожиданной. Мы привыкли думать о гравитации как о явлении, действующем эффективно на больших масштабах. Здесь же происходит следующее: быстрые звезды второго потока проходят гравитационные ямы с такой скоростью, что эти ямы оказываются сглаженными. Чем больше скорость v_1 , тем больше масштаб, на котором может произойти сглаживание и достигнута устойчивость за обычное время свободного падения.

В случае взаимопроникновения многих потоков дисперсионное соотношение сильно усложняется, и каждому значению k будет соответствовать очень большое число мод. Реальное непрерывное распределение скоростей будет представлено бесконечным числом потоков, и анализ соответствующих мод станет совершенно невозможен. В действительности дело обстоит, к счастью, не так, а в некоторых отношениях ситуация даже упрощается.

Причина этого упрощения состоит в том, что при гладком распределении скоростей пропадает необходимость учитывать те моды, которые появляются в каждом отдельном односкоростном потоке. Нас должно больше интересовать поведение тех мод, которые включают все скорости в данной области пространства. Среди всех этих мод есть, в частности, одна, которая не возрастает и не затухает. Она также и не распространяется и вообще существует только в данной области. Это критическая мода $\omega = 0$, соответствующая порогу джинсовской неустойчивости. При максвелловском распределении скоростей в направлении k

$$f_0(v) = \frac{n}{\sqrt{(2\pi)\langle v^2 \rangle}} e^{-v^2/2\langle v^2 \rangle} \quad (15.41)$$

дисперсионное соотношение (15.33) легко решается в случае $\omega = 0$, в результате чего получаем

$$k_J^2 = \frac{4\pi G \rho}{\langle v^2 \rangle}. \quad (15.42)$$

Это — дисперсионное соотношение (14.52) для частоты гравитационного отклика.

Таким образом, волновое число Джинса для звездной системы по существу совпадает с волновым числом Джинса (15.11) для газа. Отличие состоит только в скорости, входящей в каждую формулу. В случае идеального газа скорость звука и дисперсия скоростей отличаются на множитель порядка единицы, который зависит от удельной теплоемкости. В самом деле, в дискретной бесстолкновительной системе нет ничего, что могло бы служить точным эквивалентом скорости звука, поскольку никакое обрезание уравнений моментов не дает их точного решения. Дисперсия скоростей является здесь основной характерной величиной.

Здесь же может быть рассмотрен и другой полезный случай применения формулы (15.33). Предположим, что функция распределения обрезается на некоторой максимальной скорости $v_{\max}$. Тогда при возмущениях достаточно высокой частоты и большой длины волны $\omega/k > v_{\max}$ проблемы сингулярности не возникает. С физической точки зрения звезды в этом случае не успевают сколько-нибудь заметным образом среагировать на проходящую волну. Поэтому можно использовать соотношение (15.34) и разложить подынтегральную функцию по малому параметру $\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}/\omega$:

$$1 = -\frac{4\pi Gm}{\omega^2} \int \left[1 + 2 \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}}{\omega} + 3 \left(\frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}}{\omega} \right)^2 + \dots \right] f_0(\mathbf{v}) d^3\mathbf{v}. \quad (15.43)$$

Если распределение изотропно, второй интеграл исчезнет, что приведет к соотношению

$$\begin{aligned} \omega^2 &= -\omega_g^2 \left[1 + 3 \frac{\langle (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v})^2 \rangle}{\omega^2} \right] = -\omega_g^2 \left[1 + \frac{k^2 \langle v^2 \rangle}{\omega^2} \right] \\ &\approx -(\omega_g^2 + k^2 \langle v^2 \rangle), \end{aligned} \quad (15.44)$$

в котором последнее выражение верно с точностью до членов второго порядка малости.

Все эти длинноволновые моды неустойчивы. Их образование в конечных системах невозможно, поскольку им соответствуют длины волн, превышающие размеры самой системы! Их образование и сжатие могли бы, однако, происходить в бесконечных системах или же в малых холодных областях систем большего размера. Кроме того, поскольку характерное время роста этих возмущений меньше времени свободного падения, они должны начинаться с толчка, направленного внутрь. Таким образом, эти возмущения возникают только при достаточно специальных условиях.

Упомянутые нами ранее возмущения, возникающие более естественным путем, можно исследовать с помощью функции распределения $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t = 0)$, задавая ее в некоторый начальный момент времени и прослеживая ход ее эволюции. При этом потребуются несколько иное описание, включающее интегрирование преобразованного уравнения Больцмана, начиная с момента $t = 0$.

При таком подходе попутно разрешается проблема сингулярности, возникающая в соотношении (15.33). В награду за потраченные усилия мы достигнем также нового понимания общей природы тех функций распределения, которые приводят к возрастающим модам, и выясним, что происходит с теми модами, амплитуда которых не возрастает.

16. ЗАТУХАНИЕ И РАСПАД

16.1. ФИЗИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ

Если при анализе механической системы вы ищете моду отклика определенного вида, вы можете ее найти, но если вы ее не ищете, то не найдете никогда. Недостаточное понимание этого трюизма часто тормозило прогресс, порождая мнение, что исследование системы можно считать законченным, коль скоро найдены ее фурье-моды. Поэтому большой неожиданностью для исследователей физики плазмы было открытие Ландау (Ландау, 1946) того факта, что в бесстолкновительной плазме, описываемой бесстолкновительным уравнением Больцмана, волны могут затухать и распадаться. В то время это открытие было особенно неожиданным, поскольку причиной затухания считали вязкость, а в бесстолкновительной плазме вязкость отсутствует. Аналогичное явление наблюдается и в гравитационных системах.

Физическая причина бесстолкновительного затухания коренится в точных условиях взаимодействия волны со звездами фона, не входящими в нее. Этот эффект не проявляется в приближении сплошной среды, где волны свободно распространяются, не возрастая и не распадаясь.

Чтобы посмотреть, как это происходит, рассмотрим идеализированную треугольную (а не синусоидальную) волну, показанную на рис. 16. Будем наблюдать за ней в сопутствующей системе координат, движущейся с фазовой скоростью волны $v = \omega/k$. Такая волновая структура создается в начальный момент времени $t = 0$ наложением периодического треугольного возмущения плотности одновременно по всему объему системы, что приводит к похожему возмущению гравитационного потенциала ϕ . Однако, поскольку звезды движутся вдоль оси x в том же направлении, что и волна, задача остается одномерной.

Некоторые звезды будут двигаться немного быстрее, чем волна, другие — немного медленнее, даже если средняя фоновая плотность числа звезд n будет оставаться постоянной. Рассмотрим сначала те звезды, которые движутся немного быстрее и имеют в момент $t = 0$ малую скорость v_1 относительно волны. На звезды, находящиеся в области A , действует постоянная сила F_A , поскольку в этой области существует постоянный градиент потенциала. Одновременно на звезды, находящиеся в области B , действует такая же сила, но с противоположным знаком $F_B = -F_A$. За малый интервал времени t звезды из области A сместятся относительно волны на величину

$$\Delta x_A = v_1 t + \frac{F_A}{m} \frac{t^2}{2}, \quad (16.1)$$

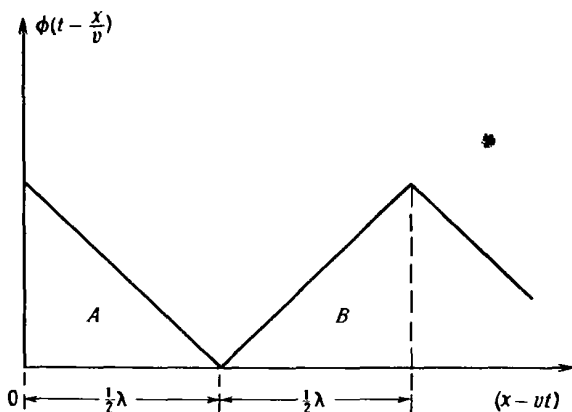


Рис. 16. Треугольная волна в сопутствующей системе координат.

а звезды из области B — на величину

$$\Delta x_B = v_1 t + \frac{F_B t^2}{m}. \quad (16.2)$$

Если в области A звезды ускоряются, то в области B — замедляются. Число звезд, покидающих область A и переходящих в область B , составит $n |\Delta x_A|$, а число звезд, покидающих область B и переходящих в область A , равно $n |\Delta x_B|$. Таким образом, число звезд в области A составит

$$\begin{aligned} N_A &= n \left(\frac{\lambda}{2} - |\Delta x_A| + |\Delta x_B| \right) \\ &= n \left(\frac{\lambda}{2} + \frac{F_B - F_A t^2}{m} \right) = n \left(\frac{\lambda}{2} - \frac{F_A t^2}{m} \right), \end{aligned} \quad (16.3)$$

а в области B —

$$N_B = n \left(\frac{\lambda}{2} - |\Delta x_B| + |\Delta x_A| \right) = n \left(\frac{\lambda}{2} + \frac{F_A t^2}{m} \right). \quad (16.4)$$

Разумеется, переходы звезд между областями A и B характерны для всей волны, так как она имеет периодическую структуру.

Поскольку между областями A и B возникает ненулевой результирующий поток звезд, происходит обмен энергией между звездами, меняющими свое пространственное распределение, и волной. Это равносильно тому, что волна совершает работу по перемещению звезд. Скорость, с которой совершается эта работа, равна полной силе, определяемой градиентом потенциала, умноженной на скорость волны относительно звезд. Предполагая, что выполняет

ся условие $v = \omega/k > v_{\text{тепл}} \gg v_1$, получаем приближенное выражение для этой скорости

$$\dot{W} = (F_A N_A + F_B N_B) \left(\frac{\omega}{k} \right) = -2 \frac{F_A^2}{m} n \frac{\omega}{k} t^2. \quad (16.5)$$

Таким образом, работа волны по перемещению звезд отрицательна, что означает передачу энергии от быстро движущихся звезд к волне. Поскольку звезды теряют энергию, существует тенденция к их захвату волнами. Этот процесс приводит к усилению волн.

Однако для звезд, которые первоначально двигались несколько медленнее волны, возникнет обратная ситуация. Если величина v_1 отрицательна, то величины N_A и N_B в предыдущих выкладках следует поменять местами. Тогда анализ, подобный приведенному выше, показывает, что медленные звезды получают от волны такое же по абсолютной величине количество энергии, выраженное формулой (16.5). Следовательно, взаимодействие с этими звездами будет приводить к затуханию волны. Если при скоростях, близких к ω/k , медленных звезд больше, чем быстрых, результирующим эффектом будет затухание волны. Таким образом, знак результата зависит от наклона функции распределения скоростей в окрестности точки $v = \omega/k$. Кроме того, степень затухания (или роста) зависит от полного числа звезд, вовлеченных в процесс. Обычно она больше вблизи пика распределения скоростей (где наклон, как правило, больше), чем на периферии, в хвосте распределения. Следовательно, можно ожидать, что если распределение по скоростям близко к максвелловскому, то эффективнее всего будут затухать волны с фазовой скоростью, приблизительно равной дисперсии скоростей. В результате мы снова приходим к критерию Джинса.

Распространение волн с длиной больше джинсовской в любом случае невозможно, поскольку силы «упругости давления» не могут превысить силы самогравитации. Следовательно, только волны с длиной меньше джинсовской испытывают затухание Ландау. Характерное время прохождения через волну звезд с различными скоростями и дисперсией скоростей $\langle v \rangle$ составляет $\lambda/\langle v \rangle$. В качестве грубой оценки эта величина может быть принята за характерное время затухания волны.

16.2. РАСЧЕТ СКОРОСТИ ЗАТУХАНИЯ ЛАНДАУ

Принимая во внимание рассмотренную выше приближенную физическую картину, сделаем далее набросок более строгого анализа линейного взаимодействия звезд с волнами. Начнем с уравнений Больцмана (15.30) и Пуассона (15.31). Вместо того чтобы анализировать общие решения в виде плоских волн, будем теперь искать волны, образующиеся при реальных начальных условиях. Итак, мы хотим определить конкретный вид функции распределения $f_1(r, v, 0)$ и выяснить, как зависит от него конечный результат. Математический подход состоит в применении интегральных преобразований к основным

5 Заказ 30

уравнениям. Мы воспользуемся пространственным преобразованием Фурье функции распределения и временным преобразованием Лапласа этой функции.

Пространственное преобразование Фурье, как и ранее, состоит в разложении функции $f_1(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ на члены, представляющие собой пространственно-периодические возмущения с данным волновым вектором

$$f_1(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = f_1(\mathbf{v}, t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}. \quad (16.6)$$

Можно было бы взять волну более сложной формы, но мы ограничимся указанным простым случаем. Потенциал ϕ_1 имеет прежний вид. Если вектор $\mathbf{k}$ направлен вдоль оси x , то уравнения (15.30) и (15.31) записываются в виде

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + ikv_x f_1 + ik\phi_1 \frac{\partial f_0(\mathbf{v})}{\partial v_x} = 0, \quad (16.7)$$

$$k^2 \phi_1 = 4\pi Gm \int_{-\infty}^{\infty} f_1 d^3\mathbf{v}, \quad (16.8)$$

где $f_1(\mathbf{v}, t)$ и $\phi_1(t)$ представляют собой зависящие от скорости и времени части возмущенных функций. В результате частные производные по координате сводятся к алгебраическому оператору — умножению на ik .

Чтобы понизить порядок производных по времени, используем преобразование Лапласа

$$F_1(p, \mathbf{v}) = \int_0^{\infty} f_1(\mathbf{v}, t) e^{-pt} dt. \quad (16.9)$$

(Общепринятый параметр p не нужно путать с импульсом!) Выражение для ϕ_1 имеет аналогичный вид. При таком преобразовании сохраняется информация о начальной функции распределения $f_1(\mathbf{v}, 0)$. Значение p должно быть достаточно большим, чтобы интеграл сходил. В общем случае величина p является комплексной, что позволяет рассматривать различные виды возмущений — устойчивые, неустойчивые и осциллирующие. Чтобы восстановить характер возмущений, нужно выполнить обратное преобразование Лапласа на комплексной плоскости

$$f_1(\mathbf{v}, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-ix+\sigma}^{+ix+\sigma} F_1(p, \mathbf{v}) e^{pt} dp. \quad (16.10)$$

Путь интегрирования показан на рис. 17. Он проходит вдоль некоторой параллельной мнимой оси p линии, слева от которой находятся все особые точки функции $F_1(p, \mathbf{v})$, обозначенные $p_1, p_2, \dots, p_j$, и замыкается полукругом при очень больших значениях p (в предположении, что точки ветвления отсутствуют). Эта процедура дает возможность определить функцию $f_1(\mathbf{v}, t)$ по свойствам особых точек ее изображения при условии, что все они являются полюсами. (С математической точки зрения изображение Лапласа является

мероморфной функцией; см. литературу по основам комплексного анализа и интегрирования.) Она во многом аналогична определению гравитационного поля во всем пространстве при условии, что известно расположение определяющих его точечных масс, которые представляют собой особые точки в распределении потенциала.

Умножая уравнения (16.7) и (16.8) на e^{-pt} и интегрируя (частную производную по времени по частям) по t от 0 до ∞ , получим алгебраические выражения для изображения Лапласа функций f_1 и ϕ_1 :

$$(p + ikv_x)F_1(v, p) + ik\phi_1 \frac{\partial f_0}{\partial v_x} = f_1(v, 0), \quad (16.11)$$

$$k^2 \phi_1(p) = 4\pi Gm \int_{-\infty}^{\infty} F_1(v, p) d^3v. \quad (16.12)$$

В отличие от фурье-мод, эти результаты понятным образом зависят от начального возмущения $f_1(v, 0)$.

Проще, однако, иметь дело не с функцией $F_1(v, p)$, которая зависит от двух переменных, а с функцией $\phi_1(p)$, зависящей от одной переменной. Исключая из этих двух уравнений F_1 , мы разрешим их относительно функции ϕ_1 :

$$\phi_1(p) = \frac{4\pi Gm \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_1(v, 0)}{p + ikv_x} d^3v}{k^2 g(p, k)}, \quad (16.13)$$

где

$$g(p, k) = \left[1 - \frac{4\pi Gm}{k} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f_0 / \partial v_x}{ip - kv_x} d^3v \right]. \quad (16.14)$$

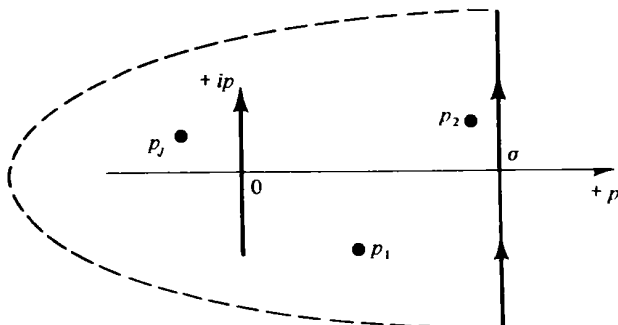


Рис. 17. Путь интегрирования при обратном преобразовании Лапласа.

Интегрирование по координатам v_y и v_z пространства скоростей формально легко выполняется. Введение равенства $v_x = u$ равносильно замене v_x на u . Следовательно, $f_0(\mathbf{v})$ заменяется на

$$f_0(u) = \int f_0(\mathbf{v}) dv_y dv_z, \quad (16.15)$$

начальное возмущение $f_1(\mathbf{v}, 0)$ — на

$$f_1(u, 0) = \int f_1(\mathbf{v}, 0) dv_y dv_z, \quad (16.16)$$

а интегрирование по $d^3\mathbf{v}$ в уравнениях (16.13) и (16.14) — на интегрирование по du . Будем считать, что все эти операции выполнены.

Устойчивость или неустойчивость таких возмущений отражается обеими функциями f_1 и ϕ_1 , поскольку рост потенциала предполагает усиление возмущения плотности. Таким образом, выполняя для ϕ_1 обратное преобразование Лапласа, аналогичное (16.10), получаем

$$\phi_1(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty + \sigma}^{+i\infty + \sigma} \phi_1(p) e^{pt} dp, \quad (16.17)$$

откуда можно определить, являются волны растущими или затухающими. Ясно, что поведение волн в большой степени зависит от функции $g(p, k)$. Эта функция аналогична диэлектрической проницаемости в электродинамике сплошных сред. Ее обратная величина $1/g(p, k)$ характеризует степень отклика гравитационного поля на малое изменение в распределении звезд. Отметим, что при возмущениях функции распределения с очень малой длиной волны, имеющих место при больших значениях k , отклик поля становится слабым. Это, очевидно, связано с тем, что вовлеченная в возмущение масса мала и масштаб взаимной компенсации возмущений также становится все меньше. Подобным же образом, если бы гравитационная сила стала слабее вследствие, например, уменьшения гравитационной постоянной G , то поле стало бы слабее реагировать на возмущения в распределении массы.

В электродинамике сплошных сред диэлектрическая проницаемость (или диэлектрическая постоянная) равна отношению электрической индукции D к напряженности электрического поля E . Она характеризует поляризацию среды, вызванную возмущением функции распределения. Типичным примером является возмущение среды движущимся через нее электроном или ионом. Гравитационный отклик системы на движущуюся массу, описанный в гл. 14, также можно интерпретировать по аналогии с электрической поляризацией. Энергия, идущая на гравитационную поляризацию, черпается из энергии движения массы, что приводит к замедлению массы. Это позволяет определить динамическое трение еще одним способом, который состоит в применении обратного преобразования Лапласа к выражению (16.13). При этом функция f_1 представляет одну движущуюся звезду, а градиент полученного потенциала

$\phi_1(r, t)$ описывает возмущенную силу. Работа этой силы по перемещению массы и приводит к динамическому трению. Вместо того чтобы еще раз исследовать динамическое трение, продолжим изучение неустойчивости, возникающей под действием коллективных процессов, с помощью обратного преобразования (16.17).

Обратное преобразование может быть сопряжено с известными трудностями. Во-первых, нужно найти правильный контур интегрирования. Будем анализировать функцию ϕ на p -плоскости. Из соотношений (16.13) и (16.14) видно, что особые точки функции ϕ_1 представляют собой полюса числителя и нули знаменателя $g(p, k)$. Нули функции g также дают полюса функции ϕ_1 . В каждом из этих полюсов выражение $\phi_1(p)e^{pt}$ будет иметь вычет, определяемый как коэффициент a_{-1} в разложении функции $\phi_1(p)e^{pt}$ в ряд Лорана $\sum a_n(p-a)^n$ в окрестности полюса $p_j = a$. Чтобы вычислить (16.17), можно использовать теорему вычетов. В ней утверждается, что если функция $f(z)$ является аналитической во всей области комплексной плоскости, ограниченной замкнутым контуром C , за исключением конечного числа полюсов, то значение контурного интеграла $\oint_C f(z)dz$ будет равно сумме вычетов функции $f(z)$ в полюсах, находящихся внутри контура, умноженной на $2\pi i$. При этом точная форма контура не существенна. Таким образом, в нашем случае

$$\phi_1(t) = \sum_{j=0}^N e^{p_j t} \text{Выч } \phi_1(p_j). \quad (16.18)$$

Отсюда сразу же становится ясно, как физическое поведение $\phi_1(t)$ зависит от положения полюсов. Так, полюса, принадлежащие действительной оси, соответствуют осцилляциям возмущений. Полюса, расположенные по левую сторону от мнимой оси, соответствуют затуханию возмущений, а по правую — их росту. Полюса, более удаленные от мнимой оси вправо, вносят больший вклад, чем расположенные вблизи от оси, что особенно существенно при больших интервалах времени.

Изображенный на рис. 17 контур был выбран потому, что, с одной стороны, он включает в себя все полюса, а с другой стороны, криволинейный интеграл, взятый вдоль штрихованной части пути, равен нулю, поэтому интегрирование вдоль этого контура эквивалентно интегрированию по прямому пути, как и должно быть в соответствии с (16.17). Замыкая первоначально прямой путь, мы можем использовать теорему вычетов. Интеграл по штрихованному пути обращается в нуль, потому что при больших p по абсолютной величине отрицательных значениях p , где контур пересекает действительную ось, функции $\phi_1(p) \sim 1/p$ и e^{pt} малы. Однако в последнем утверждении, касающемся малости e^{pt} , есть одна тонкость. Эта величина будет вносить достаточно малый вклад в интеграл в окрестности точки пересечения только в том случае, если время t отлично от нуля. Сказанное означает, что такой анализ непригоден для физического описания переходного поведения системы при слишком малых значениях времени, т. е. непосредственно после введения в систему на-

чальных возмущений. Это переходное поведение включает начальное ускорение звезд волной.

Далее, займемся поиском полюсов функции $\phi_1(p)$. На первый взгляд кажется, что числитель функции (16.13) имеет полюса при значениях $p = -iku$, соответствующих модам фазовой скорости, рассмотренным в гл. 15 (положим $p = -i\omega$). Однако теперь это верно только в том случае, если для потоков, введенных в гл. 15, выполняется условие $f_1(u, 0)du \neq 0$ при $du \rightarrow 0$. Поскольку в данном случае начальные возмущения явно заданы в некоторой области пространства независимо от распределения скоростей, эти моды не могут существовать. (Чтобы они существовали, нужно в окрестности этих мод придать функции $f_1(u, 0)$ структуру δ -функции.) Попытаемся теперь найти нули знаменателя.

Знаменатель $g(p, k)$ содержит знакомое выражение — дисперсионное соотношение (15.33). Когда это соотношение выполняется, $g(p_j, k) = 0$ и функция $\phi_1(p)$ имеет полюс в точке p_j :

$$g(p_j, k) = 0 = 1 - \frac{4\pi Gm}{k} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f_0 / \partial u}{ip_j - ku} du. \quad (16.19)$$

Первоначально мы определили преобразование Лапласа (16.9) только для положительных и достаточно больших для сходимости интеграла значений p . Очевидно, это означает, что на комплексной p -плоскости функция $g(p, k)$ определена только по правую сторону от полюсов. Но, для того чтобы найти полюса, нужно знать $g(p, k)$ при всех значениях p . Если нам известна аналитическая функция на одной половине комплексной плоскости, то мы можем продолжить ее на другую половину посредством аналитического продолжения при условии, что у функции нет естественной границы. (Таких границ нет у функций, имеющих конечное число полюсов.)

Поскольку в соотношение (16.19) входит интеграл по скоростям, разумно искать аналитическое продолжение функции $g(p, k)$ на комплексной u -плоскости. На рис. 18 показан путь интегрирования функции (16.19) на комплексной u -плоскости при таких значениях p , действительная часть которых положительна. С этими значениями, дающими полюса в верхней половине u -плоскости, мы уже имели дело при определении преобразования Лапласа. Теперь, чтобы аналитически продолжить функцию, мы должны ввести полю-

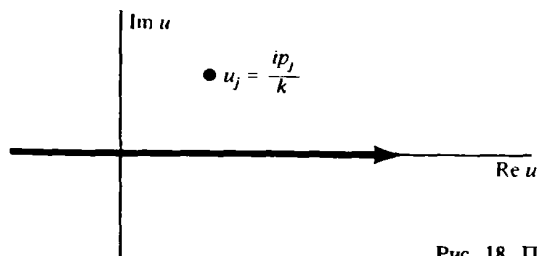


Рис. 18. Путь интегрирования при $\text{Re } p > 0$.

са, соответствующие отрицательным значениям действительной части p , которые лежат ниже оси $\text{Re } u$. Поэтому нужно видоизменить контур интегрирования. Полюса, которые находились выше первоначального контура, должны там же и оставаться, поскольку расширение области не должно приводить к изменению начального интеграла. Кроме того, поскольку функции $\phi_1(t)$ и $g(p, k)$ непрерывны, полюса не должны пересекать линию контура и при отрицательных значениях $\text{Re } p$. Пересечение полюсом контура приводит к разрыву подынтегрального выражения. Это можно показать с помощью теоремы вычетов, если только функция $f_0(u)$ и ее производные обращаются в нуль при больших мнимых скоростях (т. е. в случае усеченного максвелловского распределения по скоростям) и контур замыкается в верхней половине плоскости. Следовательно, единственный способ включить полюса, находящиеся в нижней половине u -плоскости, заключается в том, чтобы использовать деформированный контур, огибающий их снизу, как показано на рис. 19. Этот способ применим даже тогда, когда контур нельзя замкнуть бесконечным полукругом (что имеет место в случае неусеченного максвелловского распределения), поскольку вклад этого полюса не только не исчезает, а наоборот, может оказаться доминирующим.

Здесь появляется другая тонкость. Предвидя, что этот контур будет использован при анализе гравитационного затухания Ландау, изобразим его в виде «леденца на палочке». Вклад от интегрирования вдоль «палки» обращается в нуль, поэтому остаются только вклад от интегрирования вдоль действительной оси скоростей и вклад от отрицательного полюса, находящегося вне оси. Но контур при огибании полюса снизу обязательно должен иметь форму дуги или полукруга (как в случае больших длин волн в физике плазмы). В чем же отличие? Положение отрицательного полюса отражает степень за-

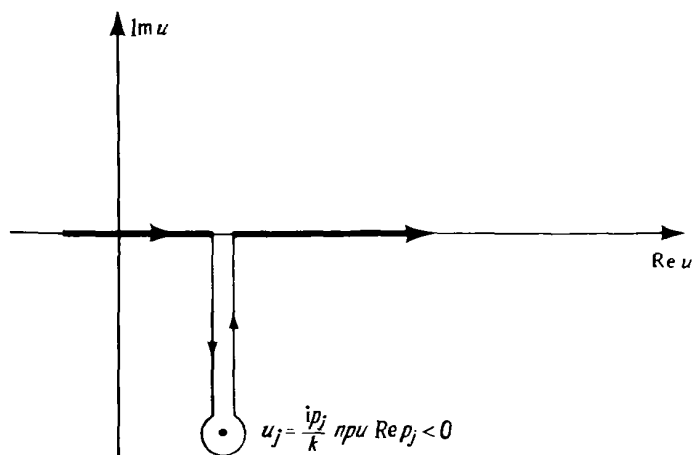


Рис. 19. Путь интегрирования при $\text{Re } p < 0$.

затухания, которая определяется действительной частью p_j . Когда затухание бесконечно мало, полюс находится чуть ниже действительной оси. Поскольку физическая система ведет себя непрерывным образом, бесконечно малое смещение полюса вниз от действительной оси даст бесконечно малое изменение величины затухания по сравнению с тем, какое имеет система, если полюс находится на оси. Если полюс действительно находится на оси, то, чтобы рассмотреть эффекты затухания, нам нужно было бы деформировать контур таким образом, чтобы он оказался ниже этого полюса. Соответствующий вклад был бы равен произведению данного вычета на πi , что равно точно половине того результата, который получили бы, огибая полюс целиком. Однако если затухание достаточно велико, что, как показано ниже, характерно для гравитационных систем, то полюс находится далеко от действительной оси и контур огибает его целиком.

Выполняя интегрирование в соотношении (16.19), мы не учитывали тот факт, что возмущения с длиной волны, превышающей критическое джинсовское значение, возрастают. Поэтому нет смысла анализировать их на затухание. В непрерывных средах возмущения с меньшей длиной волны распространяются (не затухают). Посмотрим, что происходит с ними в дискретном случае звездных систем.

Чтобы упростить задачу, будем исследовать волны очень малой длины, т. е. при $k \rightarrow \infty$. Разделяя действительную и мнимую части изменения возмущения со временем, запишем

$$p = -i\omega - \gamma. \quad (16.20)$$

Волны затухают, если $\gamma > 0$. Ранее при описании физики затухания мы предполагали, что характерное время затухания составляет $\sim \lambda/\langle v \rangle$, поэтому при малых значениях λ величина γ , которая обратно пропорциональна времени, очень велика. Можно показать, что при малых длинах волн $|\gamma| \gg \omega$ и $\omega/k \rightarrow 0$, в то время как $|\gamma|/k \rightarrow \infty$. С учетом этого очевидно, что на комплексной u -плоскости полюс $u = ip/k = -i\gamma/k + \omega/k$ будет расположен далеко от действительной оси, но вблизи мнимой так, как это показано на рис. 19.

С точки зрения физики наиболее приемлемыми функциями распределения $f_0(u)$ являются четные функции скорости, которые обращаются в нуль при больших действительных значениях $|u|$. Подобно максвелловской функции распределения (15.41), они, как правило, неограниченно возрастают при больших мнимых значениях u . В этом случае основной вклад в дисперсионное соотношение (16.19) дает полюс, поэтому интегралом, взятым вдоль действительной оси, можно пренебречь. В результате получим

$$\begin{aligned} 1 &= 2\pi i \left(\frac{4\pi Gm}{k^2} \right) \frac{df_0}{du} \bigg|_{ip/k} \\ &= (2\pi)^{1/2} \frac{\omega_g^2 p}{\langle k^2 v^2 \rangle^{3/2}} e^{p^{2/2} \langle k^2 v^2 \rangle}, \end{aligned} \quad (16.21)$$

где второе выражение рассчитано для максвелловского распределения скоростей. Зависимость от наклона функции распределения следует из приведенного выше физического анализа. Чтобы найти зависимость величин γ и ω от k , подставим выражение (16.20) в (16.21) и возьмем модуль от обеих частей полученного уравнения в приближении $|\gamma| \gg \omega$, в результате чего получим

$$\gamma e^{\gamma^2/2 \langle k^2 v^2 \rangle} = \frac{\langle k^2 v^2 \rangle^{3/2}}{(2\pi)^{1/2} \omega_g^2}. \quad (16.22)$$

Из этого уравнения видно, что величина γ положительна и что волна на самом деле должна распадаться с характерным временем порядка $\lambda/\langle v \rangle$, как и ожидалось.

Чтобы получить величину ω , отметим, что в соотношении (16.21) фаза приблизительно равна $-e^{i\omega\gamma/k^2 v^2}$. Поскольку она должна иметь действительные положительные значения, положим

$$\frac{\omega\gamma}{k^2 \langle v^2 \rangle} = \pi. \quad (16.23)$$

Существуют и полюса более высокого порядка, соответствующие фазе, равной 3π , 5π и т. д., но они не столь важны, поскольку соответствуют меньшим значениям γ и меньшему затуханию (что следует из решения двух последних уравнений). Подобным же образом можно рассмотреть и случай осциллиаций возмущенной функции распределения f_1 , но оставим эту задачу самому читателю. При $k \rightarrow \infty$ полученные соотношения между ω и $|\gamma|$ остаются справедливыми, но только для логарифмической асимптотики.

Таким образом, в результате анализа эволюции коллективных возмущений в реальных системах, выполненного с использованием мощного метода Ландау, показано, что в звездных системах с максвелловским распределением скоростей моды с длиной волны, меньшей джинсовской, распадаются. С помощью уравнения (16.21) нетрудно исследовать системы и с другим начальным распределением скоростей. В дополнение к предыдущему замечанию можно также сделать некоторые общие выводы, касающиеся условий устойчивости. Из предыдущего анализа ясно, что критерий устойчивости системы относительно линейных возмущений состоит в том, что дисперсионное соотношение при реальных значениях k не должно иметь корней с $\text{Re } p > 0$. В физике плазмы этот критерий был разработан с помощью метода Найквиста Нердлингером (Noerdlinger, 1960) и Пенроузом (Penrose, 1960). Полученные ими результаты рассматриваются во многих учебниках. Критерий для гравитирующих систем во многом аналогичен; при этом основное отличие связано с изменением знака на противоположный в гравитационном дисперсионном соотношении. Таким образом, там, где по критерию Пенроуза плазма должна быть устойчива, гравитирующие системы оказываются неустойчивыми. Так, если функция распределения имеет одну выпуклость, (например, максвелловская функция), то плазма устойчива, а гравитирующие системы неустойчивы

по критерию Джинса. Критерии устойчивости не обеспечивают детальное описание основных свойств растущих мод. Для такого описания необходим анализ системы на всех масштабах, подобный выполненному Линден-Беллом (*Lynden-Bell*, 1962) в применении к вращающимся системам.

Если линейный анализ показывает, что система устойчива относительно бесконечно малых возмущений, то соответствующий нелинейный анализ, в котором учтены члены разложения более высокого порядка, также покажет, что система устойчива. И этот результат вполне естествен, поскольку, для того чтобы возмущения из бесконечно малых стали нелинейными, они должны сначала пройти через линейную стадию. Однако существует и другой вид неустойчивости, которая ведет себя совсем иначе. Это неустойчивость, которая начинается в нелинейном режиме и имеет в то же время конечную амплитуду. Очевидным примером такой неустойчивости является прохождение шарового скопления через галактику. Достаточно большое возмущение может изменить функцию распределения окружающего вещества настолько, что его отклик становится совершенно непохожим на линейные моды и сильно воздействует на основные свойства неустойчивости.

Хотя до сих пор мы рассматривали однокомпонентные системы, легко обобщить задачу и на случай многокомпонентных систем. Если каждая компонента характеризуется невозмущенной функцией распределения f_α , то дисперсионное соотношение принимает вид

$$\sum_{\alpha} \frac{4\pi G m_{\alpha}}{k^2} \mathbf{k} \cdot \int \frac{\partial f_{\alpha} / \partial \mathbf{v}}{i\mathbf{p} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}} d^3 \mathbf{v} = 1. \quad (16.24)$$

Меняя местами порядок суммирования и интегрирования, видим, что это эквивалентно использованию приведенной функции распределения

$$f(\mathbf{v}) = \frac{1}{M} \sum_{\alpha} m_{\alpha} f_{\alpha}(\mathbf{v}), \quad (16.25)$$

которую можно нормировать на массу M наиболее массивной компоненты (или любой другой компоненты промежуточной массы, если это более удобно). В этом случае можно использовать все предыдущие результаты, если вместо функции распределения подставить приведенную функцию распределения. Их можно также легко обобщить на случай, когда распределения различных масс имеют различные начальные возмущения. Такая ситуация возникает в системах, в которых звезды или галактики, имеющие различные массы, образуются с различными распределениями.

16.3. ДРУГИЕ МЕХАНИЗМЫ ЗАТУХАНИЯ

Механизм линейного затухания Ландау — это не единственный механизм, приводящий к распаду коллективных движений. Здесь мы кратко остановимся на некоторых других механизмах, которые будут рассмотрены более подробно в последующих главах. Как правило, они являются более сложными и их аналитическое описание затруднительно.

Может показаться, что следующим по сложности шагом должно стать рассмотрение нелинейного затухания Ландау. Однако это верно лишь в случае электронной плазмы, а в случае гравитирующих систем ситуация вновь оказывается иной. Чтобы исследовать нелинейное затухание Ландау в плазме, в возмущенную функцию распределения и потенциал вводятся поправки второго и третьего порядков малости. На этом уровне рассмотрения решения по-прежнему имеют волновой вид, но волны связаны друг с другом и могут взаимодействовать между собой. В частности, сложение двух волн может привести к биениям. Результирующая волна с частотой биения может, наоборот, обмениваться энергией с резонансными частицами, имеющими скорость, близкую к фазовой скорости волны. Так выглядит нелинейное затухание Ландау в его обычном виде. Но, как уже, наверное, догадался читатель, этот подход нельзя прямо применять к гравитирующим системам, поскольку в этих системах характерное время затухания очень мало, или $|\gamma| \gg \omega$. По этой причине волны распространяются только в течение короткого промежутка времени и не успевают провзаимодействовать или образовать биения подобно тому, как это происходит в плазме.

Тем не менее существуют некоторые нелинейные механизмы, действие которых можно легко понять на качественном уровне. Так, захват звезд скоплением является аналогом нелинейного захвата частиц плазменными волнами. Этот захват может происходить различными путями. Так, при образовании скопления оно сжимается. Его гравитационная потенциальная яма со временем становится глубже. В момент, когда звезда пытается выйти из скопления, яма оказывается более глубокой, чем при вхождении звезды в скопление, и в результате происходит захват. Это процесс захвата средним полем. Но, даже если звезда не будет захвачена средним полем, она может обмениваться энергией с отдельными членами скопления вследствие далеких сближений. Кумулятивные эффекты далеких случайных сближений могут привести к уменьшению энергии звезды настолько, что она окажется захваченной скоплением. Эти сближения могут включать в себя рассеяния как на отдельных звездах, так и на коллективных модах системы. Третий вид захвата связан с сильными взаимодействиями нескольких звезд. Именно, орбиты нескольких соседних звезд могут случайным образом сблизиться так, что произойдет захват проходящей через них звезды. Конечно, возможен и обратный процесс, при котором далекие или же тесные сближения будут приводить к выбросу звезды из скопления. Результат на данном временном масштабе будет зависеть от распределения орбит в данном скоплении. Как правило, эти процессы следует рассматривать с помощью точных численных расчетов, хотя в последующих главах будет показано, что при определенных условиях они поддаются и аналитическому описанию.

Другим видом нелинейных взаимодействий является приливное разрушение скоплений. В гл. 1 было показано, как дифференциальная сила, создаваемая внешней массой, может изменить форму скопления или даже разрушить его. Когда сильные неоднородности плотности оказывают приливное воздействие друг на друга, это приводит к сглаживанию неоднородностей. Одним из край-

них примеров такого взаимодействия является случай, когда два скопления звезд проходят друг через друга, имея при этом такую кинетическую энергию, что в основном остаются нетронутыми. Однако некоторые звезды оказываются выбитыми и образуют длинный приливный след. Этот след может в конце концов рассеяться. В самом предельном случае наблюдается столкновение двух галактик, оставляющих за собой потоки светящегося вещества.

Еще одним видом нелинейных взаимодействий является фазовое перемешивание. Основную идею этого взаимодействия можно понять на простом одномерном примере. Предположим, что траектории звезд неизменны. Тогда каждая звезда будет двигаться по прямой $x = x_0 + vt$ с постоянной скоростью, а возмущенная функция распределения будет иметь вид $f_1(x, v, t) = f_1(x_0 + vt, v, t)$. Например, начальное возмущение, имеющее синусоидальный вид $f_1 \sim \sin(kx_0 + kv t - \omega t)$, будет баллистически распространяться вдоль орбит. При этом возмущения с разными скоростями будут иметь разные фазы. Чтобы определить результирующее возмущение плотности в данной точке пространства в данный момент времени (возможно, это шаг на пути определения возмущения гравитационного потенциала), проинтегрируем f_1 по всем скоростям и получим результат, пропорциональный $k^{-1} t^{-1} \cos[kx_0 + kv t - \omega t] v_{\min}^{v_{\max}}$. По прошествии времени, которое велико по сравнению с временем пересечения типичной звездой длины волны k^{-1} , результирующие возмущения плотности и потенциала окажутся близкими к нулю. Этот результат обусловлен тем, что сложение орбит звезд с различными скоростями привело к перемешиванию фаз. Аналогичные процессы происходят и в случае нелинейных начальных возмущений, когда допускается наличие сил, меняющих орбиты звезд. Мы также рассмотрим случай, когда функция распределения быстро осциллирует, а потенциал осцилляций не испытывает.

Читатели, которые обратили внимание на предположение, введенное после уравнения (16.23), очевидно, отметили, что у функции распределения $F_1(v, p)$ помимо полюсов функции ϕ_1 имеется еще один полюс в точке $p = -ik \cdot v$. Поэтому в функции $f_1(t)$ появляется дополнительный член $\sim e^{-ik \cdot v t}$, обусловленный свободным потоком. Этот член со временем не исчезает, а сохраняет память о начальном возмущении в течение длительного времени. Однако при $t \rightarrow \infty$ он соответствует осцилляциям в пространстве скоростей со все возрастающей частотой; при этом его вклад в потенциал становится пренебрежимо малым. В некоторых случаях этот вклад может не исчезать полностью. Если на систему наложить еще одно возмущение, возможна конструктивная интерференция осцилляций функций распределения обоих возмущений. Со временем резонансные члены могут стать причиной появления заметного возмущения плотности, что приведет к явлению гравитационного эха, аналогичного плазменному.

Хотя в бесстолкновительном бальмановском приближении память о начальных условиях сохраняется бесконечно долго, она тем не менее затухает, если принять во внимание столкновения более высоких порядков. Таким образом, дополнительные флуктуации, присутствующие в фоккер-планковском или же ББГКИ-описаниях, могут также привести к распаду волн. Простой ил-

люстрацией этого эффекта является сжатие скопления звезд в режиме свободного падения, когда вначале имеется единственная составляющая скорости, направленная к центру скопления. Такое движение в сущности соответствует сходящейся сферической нелинейной волне. Если бы звезды двигались только под влиянием сферически-симметричного среднего поля, то они все столкнулись бы в центре. Однако этого не происходит, поскольку локальные неоднородности («зернистость» поля) вызывают возмущение орбит. Взаимодействие звезд с флуктуациями приводит к достаточно хаотическим отклонениям орбит в радиальном и тангенциальном направлениях, и за время, в несколько раз превышающее начальное время пересечения, система релаксирует к квазиравновесному состоянию с дисперсией скоростей, близкой к максвелловской.

Такая эволюция также является примером обширного класса нелинейных механизмов затухания, которые не совсем точно называют «бурной релаксацией». Несмотря на то что механизм бурной релаксации характерен главным образом для неоднородных систем, его стоит здесь упомянуть, поскольку его рассмотрение занимает важное место в последующих главах. Для осуществления бурной релаксации необходимо, чтобы распределения плотности и скорости в системе сильно отличались от квазиравновесных. Как правило, это условие означает, что в пространстве координат и скоростей существуют группы объектов. При этом гравитационно связанные подсистемы составляют только малую их часть. В системе царит хаос. Звезды и группы рассеиваются на группах. Старые группы исчезают, возникают новые. Любые когерентные явления имеют временный характер и быстро замыкаются новыми коллективными модами. Эти взаимодействия являются настолько сильными, что все описанные в этой главе нелинейные процессы протекают с характерным временем порядка $(G\rho)^{-1/2}$. Через интервал времени, в несколько раз превышающий эту характерную величину, начальные группы распадаются, а неоднородности сглаживаются. В результате система достигает квазиравновесного состояния с распределением скоростей, близким к максвелловскому. При этом окончательный результат определяется не прямыми столкновениями, как в случае идеального газа, а нелинейными взаимодействиями между коллективными модами.

17. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЗВЕЗД С ГАЗОМ

17.1. ГАЗОДИНАМИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ

При движении звезд через газовые облака происходит много различных явлений. К наиболее заметным из них относится образование ударной волны и ионизационного следа, особенно вокруг звезд, интенсивно излучающих в ультрафиолетовой области спектра. Ионизирующее излучение может исходить как непосредственно от звезды, так и от ударной волны, возникающей при сверхзвуковом движении. Хотя мы, как правило, не включаем в рассмотрение газодинамические процессы и процессы излучения, для настоящего случая ввиду его важности будет сделано исключение. Здесь мы дадим краткое общее описание этих эффектов. Затем будут рассмотрены бесстолкновительная аккре-

ция, замедление движения звезд газом и различные виды джинсовской и двух-поточковой неустойчивостей.

Предположим, что звезда движется со сверхзвуковой скоростью через облако водорода. (Роль более тяжелых атомов состоит обычно в усилении и усложнении процессов излучения.) В направлении ее движения образуется головная ударная волна, которая окружает звезду тем плотнее, чем выше число Маха ($v/v_{\text{звук}}$). Для оценки температуры непосредственно за фронтом ударной волны приравняем тепловую энергию $3kT/2$ кинетической энергии атома, в результате чего получим соотношение $T \approx 10^5 v_{\perp 100}^2$ К, где $v_{\perp 100}$ — нормальная к волновому фронту составляющая скорости входящих в ударную волну частиц (в единицах 100 км/с). По мере продвижения этого разогретого ударной волной газа в область за звездой происходит его расширение и охлаждение. Частично это охлаждение обусловлено свободно-свободным излучением и частично — собственно расширением. Из обычных формул, описывающих свободно-свободное излучение ионизованного газа, нетрудно получить характерное время высвечивания энергии $\tau_{\text{ff}} \approx 10^6 v_{100} n^{-1}$ лет, где n — число атомов газа в 1 см^{-3} . Другие процессы излучения (например, плазменные колебания, излучение в линиях тяжелых атомов в случае более реального состава газа) могут заметно уменьшить время высвечивания. Однако в любом случае оно значительно превышает характерное время свободного расширения $\tau_{\text{расш}} \approx r_*/v \approx 3 \cdot 10^{-4} (r_*/r_{\odot}) (v_{100})^{-1}$ лет. Поэтому основным процессом охлаждения является адиабатическое расширение.

Форма расширяющегося следа может быть грубо оценена на основе упрощенной картины, в которой предполагается, что звезда испускает ряд цилиндрических самосогласованных детонационных волн (Saslaw and De Young, 1972). Интервал времени между ними равен по порядку величины r_*/v . Поскольку радиус цилиндрической самосогласованной детонационной волны возрастает пропорционально $t^{1/2}$, поперечный размер следа будет увеличиваться приблизительно как $a^{1/2}$, где $a \gg r_*$ — расстояние от данной точки следа до звезды, измеренное вдоль следа. Этот результат справедлив лишь в случае однородной внешней среды и неприменим в области вблизи звезды, где газ вовлекается в поток.

Часть атмосферы может быть снесена вследствие неустойчивости Кельвина — Гельмгольца и других видов неустойчивостей, возникающих в потоке за фронтом ударной волны. Так образуется турбулентный поток, содержащий горячий газ, магнитное поле, частицы высоких энергий и вещество звезды. Из общих энергетических соображений ясно, что масса теряемого звездой газа должна быть меньше массы межзвездного газа, проходящего через ударную волну в атмосферу звезды. Чтобы оторваться от звезды за счет абляции, вещество должно приобрести энергию $Gm_* m_{\text{абл}}/r_*$. Источником этой энергии является газовый поток за фронтом ударной волны, и величина ее должна быть меньше кинетической энергии межзвездного газа, набегающего на звезду, поскольку потеря не достигает 100%: $Gm_* m_{\text{абл}}/r_* \leq m_{\text{внут}} v^2$, или $m_{\text{абл}}/m_{\text{внут}} \leq E_{\text{кин}}/E_{\text{грав}} \approx v^2/v_{\text{убег}}^2$. Разумно предположить, что кинетическая энергия звезды $E_{\text{кин}}$ меньше ее собственной гравитационной энергии связи $E_{\text{грав}}$. Это условие, разумеется, выполняется в случае когерентного уско-

рения звезд гравитационными силами. Следовательно, $m_{\text{абл}} < m_{\text{внут}}$, причем это неравенство обычно легко удовлетворяется. Например, звезда с размерами Солнца и скоростью $v_*/v_{\text{звук}} = 10$ при движении через область НII ($T \approx 10^4$ К) испытывает потерю вещества, которая составляет не более нескольких процентов от массы набегающего на звезду газа. Однако кумулятивные эффекты потери вещества могут стать значительными.

Очень горячие звезды, движущиеся через нейтральный газ, могут сильно ионизовать его. Конфигурация области НII, созданной быстро движущимся источником ионизирующего излучения, имеет достаточно сложный вид даже в среде нейтрального водорода, но в общих чертах может быть представлена следующим образом. Мгновенно включенный стационарный источник создает сферически-симметрично расширяющуюся НII-оболочку, радиус которой определяется соотношением (Spitzer, 1968)

$$R_{\text{НII}}^3 \approx \frac{S_{(0)} t}{4n_{\text{H}}}. \quad (17.1)$$

Здесь $S_{(0)}$ — полное число фотонов лаймановского континуума, испускаемых с поверхности звезды в секунду, n_{H} — суммарная плотность числа ионов и нейтральных атомов водорода, а t — эффективное время, в течение которого была освещена область данного радиуса. Это соотношение справедливо лишь для интервалов времени малых по сравнению с временем установления точного равновесия между фотоионизацией и рекомбинацией. Соответствующую пространственную область называют зоной Стремгрена.

Во время движения звезды ионизационный фронт, образовавшийся в определенной области пространства, распространяется вначале со скоростью, превышающей скорость звезды. Затем происходит его замедление, вызванное тем, что остаточные нейтральные атомы уменьшают поток фотонов. Достигнув, например, координаты D ; звезда догоняет фронт, образовавшийся в тот момент, когда она имела координату $D - vt$. Можно предположить, что до этого распространение фронта происходило приблизительно сферически-симметрично, а затем по существу прекратилось, и образовался новый сферический фронт. Такая идеализация лучше всего подходит для удаленных от траектории звезды областей, которые включают большую часть объема излучающего газа. Итак, с помощью равенства $R_{\text{НII}} = vt$ исключим t из соотношения (17.1) и получим приближенное значение максимального радиуса области НII

$$R_{\text{НII}} \approx \frac{1}{2} \left[\frac{S_{(0)}}{n_{\text{H}} v} \right]^{1/2}. \quad (17.2)$$

Считая поверхность звезды черным телом с температурой T , получим число испускаемых в секунду ионизирующих фотонов лаймановского континуума

$$S_{(0)} = 2 \times 10^{12} \beta(T) r_*^2 T^3. \quad (17.3)$$

Существуют удобные таблицы, где представлено отношение числа фотонов лаймановского континуума к полному числу фотонов $\beta(T) = N_{0-912\text{\AA}}/N_{0-\infty}$ (Allen, 1963). Это отношение очень сильно зависит от температуры межзвездной среды. Ионизация обычными звездами поздних спектральных типов малоэффективна, но яркие горячие звезды ранних спектральных типов, и особенно сверхмассивные звезды или окруженные излучающими газовыми дисками компактные массивные объекты, могут полностью изменить ионизационную структуру газовых облаков, через которые они проходят. Важное обстоятельство состоит в том, что ионизационный фронт создает волну давления, которая по мере движения через облако может перейти в ударную волну. Поскольку излучение звезды может быть сильно переменным, а форма облака — неправильной, может образоваться сложная система ударных волн, под действием которых произойдет сжатие части облака, испытывающей теперь тепловую и гравитационную неустойчивость. Таким образом, достаточно массивная звезда или другой объект могут стимулировать процесс звездообразования, оставляя за собой след из ярких звезд, освещающих диффузную межзвездную среду.

Другим важнейшим газодинамическим процессом, о котором следует упомянуть, является звездный ветер. Он приводит к обмену веществом между звездами и окружающей их средой. Сила звездного ветра может быть разной, но самый сильный ветер наблюдается в случае молодых массивных звезд, где он даже может полностью подавлять аккрецию. Появление звездного ветра может быть обусловлено тепловым давлением газа, давлением излучения, или же действием центробежной или магнитной силы. Результирующая потеря массы может быть и не изотропной. Некоторые звезды могут терять газ в одном направлении и аккрецировать в другом, особенно если окружающая среда неоднородна или если вокруг звезды имеется диск.

Все эти газодинамические процессы составляют предмет отдельного обсуждения. Приведенное выше краткое описание позволяет лишь представить, что происходит за границами чисто гравитационных взаимодействий, к рассмотрению которых мы и переходим.

17.2. АККРЕЦИЯ И УМЕНЬШЕНИЕ ИМПУЛЬСА

Задача аккреции газа на звезды становится очень сложной, если принять во внимание давление газа, его вязкость и перенос излучения. Однако эти процессы необходимо учитывать, если характерная длина свободного пробега в газе относительно столкновения атомов и рассеяния фотонов (как упругих, так и неупругих) мала. Мы будем иметь дело с противоположным случаем, когда действие гравитации является доминирующим. Этот случай имеет ряд важных приложений, таких, как аккреция рассеянного газа или пыли малой плотности, аккреция отдельных малых газовых облаков высокой плотности, а также захват другой звезды или твердого тела в результате столкновения.

Рассмотрим, например, атом или облако пыли, движущееся мимо звезды. Чтобы определить, произойдет ли столкновение со звездой, нужно знать рас-

стояние максимального сближения. Если в начале своего движения пылинка находилась на большом расстоянии от звезды и имела скорость v , то, как легко получить из закона сохранения энергии, в случае касания пылинкой поверхности звезды радиуса r_* скорость пылинки в момент касания v' определяется из соотношения

$$v'^2 - \frac{2Gm_*}{r_*} = v^2. \quad (17.4)$$

Помимо того, начальный и конечный моменты импульса пылинки равны между собой:

$$Rv = r_*v'. \quad (17.5)$$

Поскольку величина R представляет собой начальный прицельный параметр, при котором орбита частицы касается поверхности звезды, она является и радиусом эффективного сечения столкновения. Разрешая систему уравнений (17.4), (17.5) относительно R , получим

$$\frac{R^2}{r_*^2} = 1 + \frac{2Gm_*}{r_*v^2}. \quad (17.6)$$

Таким образом, для пылинок, движущихся столь быстро, что гравитационное поле звезды не может существенным образом изменить их орбиты, эффективное сечение равно геометрическому $\pi R^2 \approx \pi r_*^2$. Однако для пылинок, движущихся относительно медленно, эффективное сечение значительно больше. При $v = 0$ сечение становится бесконечно большим: где бы частица ни находилась, она будет радиально падать на звезду.

Оценим с помощью полученного выше выражения для сечения темп аккреции, пренебрегая при этом отмеченными выше сложностями. Предположим, что при касании поверхности звезды пылинка теряет свою энергию, и, следовательно, ее масса добавляется к массе звезды. Тогда темп аккреции составит

$$\frac{dm_*}{dt} = \pi R^2 v \rho = \pi r_*^2 \rho v \left(1 + \frac{2Gm_*}{r_*v^2} \right) \approx \frac{2\pi G m_* r_*}{v}, \quad (17.7)$$

где ρ — плотность пыли. Последнее выражение справедливо для низкоскоростной аккреции. Если же оба сталкивающихся тела являются приблизительно в равной степени протяженными, то эффективный радиус геометрического столкновения будет примерно в 2 раза больше, а сечение и темп аккреции увеличатся примерно в 4 раза. Быстро движущаяся звезда удваивает свою массу за время $\tau_{\text{быст}}$, равное времени «нагребания» ею массы вещества, равной массе самой звезды, в то время как медленно движущаяся звезда удваивает свою массу за время $\tau_{\text{медл}} \approx \tau_{\text{быст}} E_{\text{кин}}/E_{\text{грав}}$, которое меньше времени $\tau_{\text{быст}}$ на величину отношения кинетической энергии звезды к ее внутренней гравитационной энергии.

При получении этих результатов предполагалось, что вдали от звезды частицы имеют скорость относительного движения v , а случайная компонента скорости отсутствует. Нетрудно рассмотреть аналогичную задачу и при более

общем распределении скоростей. Действительно, исходя из соотношения (17.7), можно получить предположительный ответ для ряда более сложных случаев. Например, если звезда покоится в максвелловском газе, то темп аккреции на нее газа в хорошем приближении определится соотношением (17.7), где вместо v фигурирует дисперсия скоростей атомов газа. Случай движущейся звезды несколько сложнее. Пусть $N(v, \theta, \phi)$ — плотность числа частиц, движущихся на большом расстоянии от звезды со скоростью v в направлении, заданном углами θ и ϕ . Тогда, если при столкновениях частицы в среднем не отклоняются, суммарный темп аккреции определяется путем умножения сечения аккреции на функцию плотности и интегрирования по координатам и скоростям всех частиц, движущихся к звезде:

$$\frac{dm_*}{dt} = \pi r_*^2 \rho \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\infty v \left(1 + \frac{2Gm_*}{r_* v^2} \right) N(v, \theta, \phi) dv d\theta d\phi. \quad (17.8)$$

Если звезда движется через систему частиц, обладающих максвелловским распределением, то плотность их числа будет иметь вид

$$N(v, \theta, \phi) = (2\pi)^{-3/2} \rho \langle v^2 \rangle^{-3/2} \exp[-(v^2 + v_*^2 - 2vv_* \cos \theta)/2\langle v^2 \rangle] v^2 \sin \theta. \quad (17.9)$$

Чтобы сравнить точное значение темпа аккреции (17.8) со значением (17.7), читатель может разложить выражение (17.9) в ряд при больших и малых значениях $v_* \langle v^2 \rangle^{-1/2}$ и проинтегрировать уравнение (17.8) почленно.

Для реализации бесстолкновительного приближения нужно, чтобы длина свободного пробега частицы была больше эффективного гравитационного радиуса $Gm_* v^{-2}$ звезды, скажем, в десять раз:

$$\lambda = (n\sigma)^{-1} \gtrsim 10Gm_* v^{-2} \approx 10^{13} (m_*/m_\odot) (v_{100})^{-2} \text{ см}. \quad (17.10)$$

Полагая сечение столкновения атомов газа $\sigma \approx 10^{-16} \text{ см}^2$, получаем, что в окрестности звезды солнечной массы, движущейся через такой газ со скоростью 100 км/с, это условие выполняется при $n \lesssim 10^3 \text{ см}^{-3}$. Если магнитное поле отсутствует (достаточно грубое упрощение), то рассеяние ионизованных атомов обусловлено главным образом кумулятивными эффектами далеких кулоновских взаимодействий, а существенное изменение орбит происходит за время, аналогичное времени релаксации звезд τ_R в соотношении (2.9) (получающемуся путем замены гравитационной силы на электростатическую). В таком случае характерное время кулоновской релаксации должно быть намного больше времени пересечения гравитационного радиуса аккрецирующей звезды. Аналогичное характерное время имели бы и частицы пыли, если бы они не были подвержены значительному воздействию давления излучения. Ясно, что для разных случаев условие бесстолкновительности будет существенно неодинаковым. Так, в случае аккреции звезд из соотношения (2.9) сразу получаем условие $\tau_R \gtrsim 10Gm_* v^{-3}$, которое для звезд солнечной массы с дисперсией скоростей и относительными скоростями, составляющими 100 км/с, дает

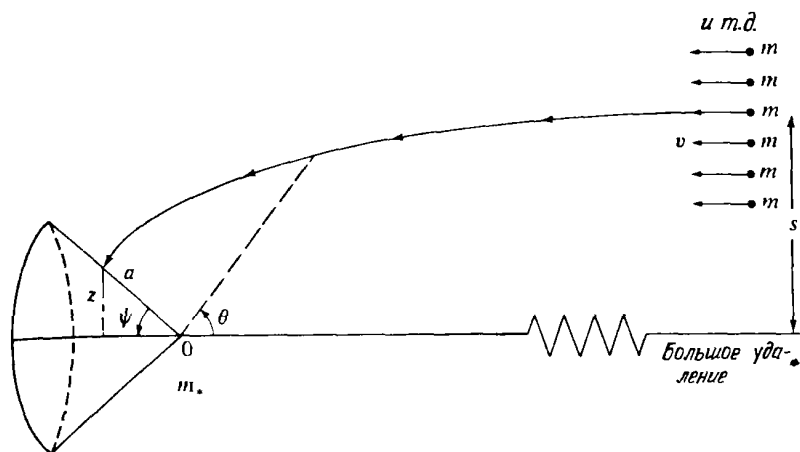


Рис. 20. Орбиты аккрецируемых звезд или частиц газа.

$n \lesssim 5 \cdot 10^{-42}$ звезд на 1 см^3 . Если такая единица плотности кажется странной, напомним, что в привычных единицах величина n составляет приблизительно 10^{14} звезд в кубическом парсеке. Этот результат сильно зависит от скорости и массы звезд; он пропорционален выражению $\langle v^2 \rangle^{3/2} v^3 m^{-2} m_*^{-1}$, где m — масса звезд поля, $\langle v^2 \rangle^{1/2}$ — их дисперсия скоростей, а m_* и v — соответственно масса и скорость аккрецирующей звезды. Таким образом, при любых условиях, кроме наиболее экстремальных условий галактических ядер, движение аккрецируемых звезд является фактически бесстолкновительным.

Считая, что условие бесстолкновительности выполняется, мы можем продвинуться дальше и исследовать распределение плотности вокруг аккрецирующей звезды. Поскольку бесстолкновительное уравнение Больцмана, как показано в гл. 7, эквивалентно уравнениям орбит, здесь можно применить любой из этих двух подходов. Остановимся на анализе уравнений орбит, поскольку он приводит к ответу более прямым путем. Аккрецирующей «звездой» может быть, например, массивная черная дыра.

Представим себе, как это показано на рис. 20, что по направлению к аккрецирующей звезде движется бесконечный поток звезд или бесстолкновительных атомов. На больших расстояниях все орбиты характеризуются скоростью v , параллельной оси x . (Дисперсия скоростей будет введена позднее.) Со стороны аккрецирующей звезды, находящейся в точке 0, действует гравитационная сила (в расчете на единицу массы) $Gm_*r^{-2} \equiv \mu r^{-2}$. Общее уравнение орбиты в полярных координатах (см., например, Ландау и Лифшиц, 1973, гл. 15) имеет вид

$$\frac{1}{r} = \frac{\mu}{s^2 v^2} [1 + e \cos(\theta + \theta_0) = 1 + e \cos \theta_0 \cos \theta - e \sin \theta_0 \sin \theta]. \quad (17.11)$$

Здесь масса m_* намного превышает массу аккрецируемых на нее звезд, а квадрат эксцентриситета орбиты

$$e^2 = 1 + \frac{2Es^2v^2}{\mu^2 m} \quad (17.12)$$

зависит от полной энергии E . В нашем примере орбиты являются гиперболическими, при $r \rightarrow \infty$ звезды массы m имеют скорость v , поэтому энергия звезд $E = mv^2/2$. Фазовый угол θ_0 нужно выбрать так, чтобы при $\theta \rightarrow 0$ выполнялось условие $r^{-1} \rightarrow 0$, что дает $e \cos \theta_0 = -1$. Возводя последнее выражение в квадрат, используя тождество $e^2 \sin^2 \theta_0 + e^2 \cos^2 \theta_0 = e^2$ и подставляя значение E в выражение для эксцентриситета, получим $e \sin \theta_0 = -sv^2\mu^{-1}$. Отрицательный знак обеспечивает при малых θ выполнение условия $\theta \rightarrow s/r$. Таким образом, уравнение движения (17.11) принимает вид

$$\frac{1}{r} = \frac{\mu}{s^2 v^2} (1 - \cos \theta) + \frac{\sin \theta}{s}. \quad (17.13)$$

Звезды, находящиеся на этих орбитах и пересекающие поверхность конуса с раствором ψ на расстоянии от a до $a + da$ от звезды массы m_* , должны были выйти из цилиндрической оболочки, находящейся на расстоянии от s до $s + ds$ от оси. Нам нужно найти соотношение между плотностью звезд, входящих в конус, и плотностью звезд, проходящих через цилиндр на расстоянии s от оси. Исходя из рис. 20 и уравнения (17.13), нетрудно заметить, что величины a и s связаны соотношением

$$\frac{1}{a} = \frac{\mu}{s^2 v^2} (1 + \cos \psi) + \frac{1}{s} \sin \psi, \quad (17.14)$$

и, следовательно,

$$\frac{da}{a^2} = \frac{2\mu ds}{s^3 v^2} (1 + \cos \psi) + \frac{ds}{s^2} \sin \psi. \quad (17.15)$$

Пусть плотность числа звезд, имеющих на бесконечности скорость v , равна η . Тогда их начальный поток через единичную площадь в единицу времени будет равен ηv . Полное число звезд, выходящих в секунду из элемента удаленной цилиндрической оболочки радиуса s , составляет $2\pi s \eta_s v ds$. Эти звезды начинают свое движение, имея момент импульса sv , который равен их моменту импульса $av_{\perp}$ в момент пересечения поверхности конуса. Нормальная составляющая «входной» скорости звезд будет, таким образом, равна sv/a . Площадь элемента поверхности конуса вокруг соответствующей точки составит $2\pi z da$. Но, поскольку расстояние от этой точки до оси составляет $z = a \sin \psi$, эта площадь будет равна $2\pi a \sin \psi da$. Следовательно, число звезд, входящих в конус через элемент поверхности конуса шириной da , составит $\eta_a^+(sv/a)(2\pi a \sin \psi da)$. Оно должно быть равно числу звезд, выходящих из цилиндрической оболочки шириной ds . Отсюда получим

$$\eta_a^+ = \frac{2\pi s \eta_s v ds}{\frac{sv}{a} (2\pi a \sin \psi da)} = \frac{\eta_s}{\sin \psi} \frac{ds}{da}. \quad (17.16)$$

Исключая из двух последних уравнений величину s и используя несколько раз формулу для двойного угла $\sin \psi = 2 \sin \psi/2 \cdot \cos \psi/2$, получим плотность числа звезд, входящих в конус с раствором ψ на расстоянии a от звезды

$$\eta_a^+ = \frac{1}{2} \eta_s \left(\frac{2\mu}{av^2} + \sin^2 \frac{\psi}{2} \right)^{-1/2} \left\{ \frac{\mu}{av^2} + \sin^2 \frac{\psi}{2} \right. \\ \left. + \left(\frac{2\mu}{av^2} + \sin^2 \frac{\psi}{2} \right)^{1/2} \sin \frac{\psi}{2} \right\} \operatorname{cosec} \frac{\psi}{2}. \quad (17.17)$$

Однако звезды не только входят в конус, но и покидают его. Аналогичный анализ показывает, что плотность числа уходящих звезд составляет

$$\eta_a^- = \frac{1}{2} \eta_s \left(\frac{2\mu}{av^2} + \sin^2 \frac{\psi}{2} \right)^{-1/2} \left\{ \frac{\mu}{av^2} + \sin^2 \frac{\psi}{2} \right. \\ \left. - \left(\frac{2\mu}{av^2} + \sin^2 \frac{\psi}{2} \right)^{1/2} \sin \frac{\psi}{2} \right\} \operatorname{cosec} \frac{\psi}{2}. \quad (17.18)$$

Следовательно, полная плотность числа звезд в точках (a, ψ) равна

$$\eta_a = \eta_a^+ + \eta_a^- = \eta_s \left(\frac{2\mu}{av^2} + \sin^2 \frac{\psi}{2} \right)^{-1/2} \\ \times \left(\frac{\mu}{av^2} + \sin^2 \frac{\psi}{2} \right) \operatorname{cosec} \frac{\psi}{2}. \quad (17.19)$$

Отметим, что при малом угле раствора ψ , т. е. в следе звезды, плотность сильно возрастает. При $\psi = 0$ она становится бесконечной и, как видно из уравнения (17.16), анализ здесь становится несостоятельным, поскольку производится деление на нулевую площадь. Кроме того, при угле ψ , близком к нулю, траектории звезд, проходящих через точку $s = 0$, пересекаются с траекториями звезд, отклоненных к оси. Если бы аккрецируемое вещество было столкновительным газом, то оно образовало бы вдоль оси ударную волну. Из условия осевой симметрии задачи ясно, что если угол ψ отрицателен, то следует использовать его абсолютное значение, чтобы избежать отрицательных плотностей. Поскольку объем конического следа пропорционален $\sin^2 \psi/2$, даже при бесконечной плотности звезд в следе их полное число будет оставаться конечным. При очень малых начальных относительных скоростях звезд более сильное гравитационное отклонение приводит к уменьшению плотности приблизительно в два раза по сравнению со случаем, когда начальные скорости

высоки. Это уменьшение объясняется тем, что аккрецируемые звезды движутся по отношению к аккрецирующей звезде с более высокими результирующими скоростями и в среднем проводят за ней меньшее время.

Используя эти результаты, можно рассмотреть более реалистичный случай, когда в набегающем потоке имеется некоторая дисперсия скоростей $\langle v^2 \rangle^{1/2}$, а распределение звезд в нем характеризуется функцией $N(v, \theta, \phi)$, аналогичной максвелловскому распределению (17.9). Проще всего рассчитать результирующую плотность на оси симметрии потока на расстоянии a от аккрецирующей звезды, как это показано на рис. 21. Из соотношения (17.19) следует, что при бесстолкновительной аккреции плотность вдоль этой оси наибольшая. Звезды, достигшие точки A , будут иметь некоторый начальный разброс координат, скоростей и направлений движения. Чтобы определить, сколько звезд из данного начального интервала $d\theta d\phi dv$ вносят вклад в плотность в точке A , заменим в выражении (17.19) величину η_s функцией $N(v, \theta, \phi)$, представленной соотношением (17.9). Тогда полная плотность числа звезд в точке A будет равна интегралу по всем интервалам

$$\frac{\rho(a)}{\rho} = (2\pi)^{-1/2} \langle v^2 \rangle^{-3/2} \int_{v=0}^{\infty} \int_{\theta=0}^{\pi} \left(\frac{\mu}{av^2} + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \left(\frac{2\mu}{av^2} + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right)^{-1/2} \times \exp\left\{ -(v^2 + v_*^2 - 2vv_* \cos \theta)/2 \langle v^2 \rangle \right\} \sin \theta \operatorname{cosec} \frac{\theta}{2} v^2 d\theta dv. \quad (17.20)$$

Дополнительный множитель 2π возникает вследствие интегрирования по азимутальному углу ϕ . Таким образом, мы получили плотность звезд на «подветренной» стороне оси.

Следует ожидать, что плотность звезд на «наветренной» стороне оси будет меньше. Это происходит потому, что звезды, отклоненные к оси, будут иметь скорость $v + v_*$, а при максвелловском распределении число звезд с такими скоростями мало. Подобный анализ показывает, что с наветренной стороны оси плотность звезд, находящихся на расстоянии a от звезды, определяется соотношением (17.20), в котором v_* следует заменить на $-v_*$, что следует из симметрии задачи. Это различие плотностей по разные стороны от

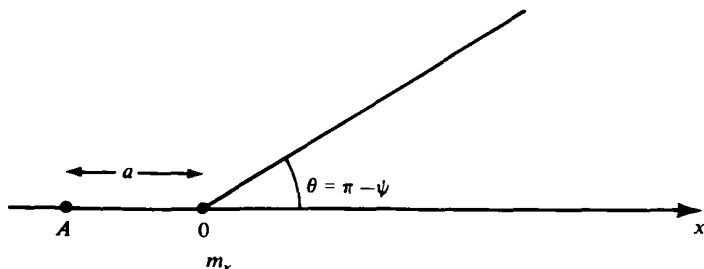


Рис. 21. Аккреция на ось симметрии звезд, движущихся первоначально под углом θ .

звезды является еще одной иллюстрацией физической причины появления динамического трения.

Используя этот подход, можно заново получить результаты гл. 14, если в среде на пути движения звезды ввести флуктуации плотности и проследить, как они распространяются и изменяют орбиту звезды. Кроме того, рассматривая на основе такого же анализа эволюцию временных конденсаций в среде, можно получить более строгое количественное описание грексонов. Решить эту задачу мы предоставляем самым любознательным читателям.

Теперь ненадолго вернемся к случаю, когда звезда движется через газ или пыль столь быстро, что гравитационное отклонение частиц пренебрежимо мало. В этом случае газ не успевает откликнуться на гравитационное поле звезды, поскольку она быстро проходит через него и удаляется прочь. Таким образом в выражении (17.7) член, связанный с геометрическим сечением, вносит основной вклад в аккрецию. Тем не менее звезда будет существенно замедляться вследствие непосредственной передачи импульса тому газу, с которым она сталкивается. Характерное время такого замедления приблизительно равно времени, необходимому для нагребания звездой массы межзвездного газа, равной ее собственной массе:

$$\tau \approx \frac{m_*}{\pi r_*^2 \rho v} \approx \frac{3 \times 10^{20} (m_*/m_\odot)}{(r_*/10^{11} \text{ см})^2 (\rho/10^{-24} \text{ г/см}^3) (v/10^7 \text{ см/с})} \text{ лет.} \quad (17.21)$$

Это время очень велико, если только речь не идет об экстремальных условиях, которые могут иметь место в плотных галактических ядрах. Для этих ядер можно принять $r_* \approx 10^{12}$, $\rho \approx 10^{-14}$, $v \approx 10^9$, в результате чего получим $\tau \approx 3 \cdot 10^6$ лет. Однако в такой ситуации могут существовать еще более сильные процессы замедления звезд, как, например, звездные столкновения, характерное время которых еще меньше.

17.3. ДЖИНСОВСКАЯ И ДВУХПОТОКОВАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

В разд. 15.2 было показано, что большое облако газа может оказаться неустойчивым относительно деления на части с таким характерным размером, при превышении которого силы гравитации превосходят давление газа. Если масса вещества в области с характерным размером λ возрастет на величину δm , соответствующий прирост кинетической энергии составит $\delta E_{\text{кин}} \approx 1/2 c^2 (\delta m)$, где c — скорость звука. При этом гравитационная энергия изменится на величину $\delta E_{\text{грав}} \approx (\delta m)(\rho_0 \lambda^3) G / \lambda$, где ρ_0 — средняя плотность в данной области. Приравняв эти две величины, характеризующие изменение энергии, получим критический джинсовский размер неустойчивости.

Выясним условие неустойчивости в системе, средняя плотность которой определяется не газом, а звездами, погруженными в газ и распределенными в нем достаточно равномерно. Примером такой системы является большое газовое облако в ядре галактики. Если газ испытывает возмущение, то изменение его кинетической энергии будет таким же, как и в предыдущем слу-

чае, однако его гравитационная энергия изменится на величину $\delta E_{\text{грав}} \approx (\delta m)(\rho_* \lambda^3)G/\lambda$, где теперь ρ_* — плотность звезд. Таким образом, результат состоит в том, что в выражении (15.11) для волнового числа Джинса плотность газа нужно заменить на плотность звезд.

Здесь следует сделать еще два предостережения. Во-первых, нужно быть уверенным в том, что в процессе сжатия газового облака нагрев его звездами является несущественным. Из соотношения (17.21), преобразованного так, чтобы получить характерное время потери звездами энергии, видно, что нагрев газа движущимися через него звездами, как правило, не играет большой роли. Применяя соотношения (17.1)—(17.3) к обычным звездам, читатель сам может показать, что эти звезды, как правило, не являются источниками нагрева. Однако если в облаке имеются молодые массивные звезды или же хотя бы небольшое число сверхмассивных звезд, испускающих мягкое рентгеновское излучение, космические лучи низких энергий и звездный ветер, то картина может сильно измениться. Эти источники энергии важно учитывать при построении детальных моделей галактических ядер и, возможно, при анализе формирования галактик.

Во-вторых, следует отметить, что как только размер облака по порядку приблизится к характерному расстоянию между звездами, могут появиться новые виды неустойчивостей. До тех пор пока размер облака превышает расстояние между звездами, оно намного более устойчиво относительно внутренней фрагментации. Причина состоит в том, что большие возмущения плотности в облаке не меняют существенно образом среднюю гравитационную силу, которая определяется главным образом звездами. Однако если облако будет делиться между звездами, то положение сильно изменится. В этом случае облако может не только распасться на фрагменты, но и разорваться приливными силами ближайших звезд до того, как появятся условия для дальнейшего сжатия. Все эти вопросы, которые необходимо учитывать при анализе звездообразования в галактических ядрах, далеки от решения.

Если газ и звезды имеют упорядоченную составляющую движения относительно друг друга, то ситуация будет сильно отличаться от картины, возникающей при хаотическом движении звезд внутри облака. В этом случае возможно появление микроскопических неустойчивостей, таких, как двухпоточная неустойчивость, приводящая к фрагментации газа. При анализе систем, состоящих из столкновительной (газовой) и бесстолкновительной (звездной) компонент, обычно используются газодинамические уравнения (15.2), (15.4) и (15.9) для газа и бесстолкновительное уравнение Больцмана (15.26) для звезд, а также связывающее их уравнение Пуассона (15.14), в котором под ρ подразумевается полная плотность вещества. Эта система уравнений линеаризуется и исследуется в отношении растущих и затухающих мод, как описано в гл. 15 и 16. Такой анализ (Sweet, 1963) оказался намного более запутанным и сложным по сравнению с нашим рассмотрением в предыдущих главах.

Если поток газа движется через систему звезд равной массы с дозвуковой скоростью u , то имеется критическая длина волны, которую можно выразить в виде

$$\lambda_{\text{крит}} = \frac{(c^2 - u^2)^{1/2}}{[\langle v^2 \rangle (\rho_g / \rho_*) + 2(c^2 - u^2)]^{1/2}} \lambda_{j*}. \quad (17.22)$$

Это выражение справедливо для ненулевых значений ρ_* . Здесь c — скорость звука в газе, имеющем плотность ρ_g , а u — скорость газового потока относительно звезд, имеющих плотность ρ_* и дисперсию скоростей $\langle v^2 \rangle$. Джинсовская длина волны в звездной системе определяется соотношением $\lambda_{j*}^2 = \pi \langle v^2 \rangle (G \rho_*)^{-1}$, аналогичным (15.11). Оказалось, что возмущения с характерным размером, меньшим $\lambda_{\text{крит}}$, растут вследствие двухпотоковой неустойчивости. При малых значениях отношения ρ_g / ρ_* критерий неустойчивости аналогичен критерию (15.40) для двух холодных потоков звезд, если скорость потока u в выражении (17.22) достигает скорости звука в газе, критическая длина волны оказывается очень малой, и газ становится неустойчивым почти на всех длинах волн. Если же относительное движение становится сверхзвуковым, то неустойчивость опять появляется на всех длинах волн. Характерное время роста возмущений плотности в e раз приблизительно равно $\lambda / \langle v^2 \rangle^{1/2}$, т. е. времени прохождения типичной звезды через возмущение.

Возникающая таким образом фрагментация газовых потоков встречается во многих астрономических задачах. Шаровое скопление, проходящее через однородную область газа в галактической плоскости, оставляет за собой облачный след. Большие облака, проходящие через области, плотно заселенные звездами, распадаются на части. Однородные потоки межгалактического газа, проходящие через звездные гало галактик, испытывают фрагментацию, причем фрагменты, возможно, движутся по орбитам, описанным в предыдущей главе. С учетом сказанного возникает вопрос: могут ли эти сгущения в следе сжиматься, образуя дочернюю галактику?

18. ЗАДАЧИ И ПРИЛОЖЕНИЯ

Основные вопросы теории многих тел, тесно связанные с приложениями в астрономии, нам предстоит рассмотреть в следующих главах. Здесь же приводятся лишь примеры выводов, которые читатель может проработать в качестве задач и которые могут оказаться полезными для первого знакомства со специальной литературой. В различных местах книги можно найти и другие соображения, относящиеся к практическим задачам.

18.1. ПРИБЛИЖЕНИЕ ТОЧЕЧНОЙ МАССЫ

До сих пор обычно предполагалось, что гравитирующие тела — от пылинки и до галактик — могут быть представлены в виде точечных масс. Такое представление, конечно, является идеализацией. Оно противоречит понятию геометрических столкновений, а также приливного разрушения. Третий фактор, не учитываемый в этом приближении, состоит в передаче момента им-

пульса орбитального движения объекта самому объекту. Рассмотрим два твердых эллипсоида массы m каждый с большими полуосями a и b , причем $a > b$. Покажите, что после прохождения одного из них мимо другого на среднем расстоянии r и со скоростью v каждый из этих эллипсоидов приобретет момент импульса порядка $G(mae)^2/r^2v$, где $e^2 = 1 - (b/a)^2$. Как близко должны они пройти друг от друга, чтобы существенная часть энергии их орбитального движения преобразовалась в энергию вращения? Насколько вероятен этот эффект в случае звезд? В случае галактик? Что произойдет, если эллипсоиды рассматривать не как твердые тела? Какова остаточная циркуляция такой системы? Происходит ли прирост момента импульса? Каким образом передача энергии влияет на размер галактики? [См. *Harrison, MNRAS, 154, 167 (1971).*]

18.2. МОДЕЛЬ ПЛАММЕРА

Пламмер [см., например, *Plummer, MNRAS, 76, 107 (1915)*] показал, что распределение плотности по радиусу вида

$$\rho(r) = \frac{3M\alpha^2}{4\pi} \frac{1}{(r^2 + \alpha^2)^{5/2}}, \quad (1)$$

где

$$\alpha = \left(\frac{3M}{4\pi\rho_c} \right)^{1/3} \quad (2)$$

— характерный масштаб, а ρ_c — центральная плотность, обеспечивает хорошее приближение распределения плотности в шаровых скоплениях. Хотя сам Пламмер использовал это распределение для описания шаровых скоплений (где оно в действительности не очень подходит для описания центральных областей), его также часто используют для описания галактик или скоплений галактик. Покажите, что в этой модели распределение массы и потенциала по радиусу имеет вид

$$M(r) = \frac{M}{\left(1 + \frac{\alpha^2}{r^2}\right)^{3/2}}, \quad (3)$$

$$\phi(r) = \frac{GM}{(\alpha^2 + r^2)^{1/2}}, \quad (4)$$

а гравитационная потенциальная энергия связи при бесконечном радиусе системы составляет

$$|E_{\text{грав}}| = \frac{3\pi GM^2}{32\alpha}. \quad (5)$$

18.3. РЕШЕНИЯ ОСНОВНОГО КИНЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Чтобы вывести уравнение Фоккера — Планка из основного кинетического уравнения (которое иногда называют уравнением Колмогорова — Феллера в связи с его применением в теории вероятностей), нужно пренебречь тесными сближениями, приводящими к рассеянию на большие углы. В случае малых звездных систем, в которых $\ln N$ незначительно превышает единицу, такое приближение является слишком грубым. Покажите, что основное кинетическое уравнение можно решить с помощью функций распределения вида

$$f(v, t) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i T_i(t) g_i(v). \quad (1)$$

Найдите функцию $T_i(t)$ и уравнение для собственной функции, а также граничные условия, которым удовлетворяет функция $g_i(v)$. Покажите, что все собственные значения положительны. Определите, какое из собственных значений в выражении для $f(v, t)$ будет при $t \rightarrow \infty$ наибольшим. Покажите, что это собственное значение представляет собой относительный темп потери вещества сферической системой, находящейся в квазистационарном состоянии. [Эти решения подробно исследованы Реттерером (Retterer, Astron. J., 84, 370 (1979)) с помощью численных расчетов.]

18.4. АВТОМОДЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ БЕССТОЛКОВИТЕЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ БОЛЬЦМАНА

Часто можно встретить системы, изменение которых в различные моменты времени заключается в увеличении или уменьшении их характерного размера. Все же остальные свойства при этом остаются неизменными. Тогда изменение со временем таких автомодельных систем полностью определяется последовательностью масштабных соотношений, которые можно получить из уравнения движения. Обычно этот подход успешнее всего применяется при условии высокой симметрии.

Рассмотрите большую (бесконечную, если используется «обман Джинса») сферически-симметричную бесстолкновительную гравитирующую систему. Ее функция распределения $f(t, r, \theta, \phi, R, \Theta, \Phi)$ зависит от времени и шести координат положения и скорости. Сначала покажите, что в сферической системе координат бесстолкновительное уравнение Больцмана имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + R \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\Theta}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{\Phi}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} + \left(\frac{\Theta^2 + \Phi^2}{r} - \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) \frac{\partial f}{\partial R} \\ + \left(\frac{\Phi^2 \cos \theta}{r \sin \theta} - \frac{R\Theta}{r} - \frac{\partial \Psi}{r \partial \theta} \right) \frac{\partial f}{\partial \Theta} \\ - \left(\frac{R\Phi}{r} + \frac{\Theta\Phi \cos \theta}{r \sin \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial \phi} \right) \frac{\partial f}{\partial \Phi} = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где Ψ — гравитационный потенциал. [Чтобы понять метод его вывода, см. замечание, следующее за уравнением (60.7).] В условиях сферической симметрии пространственные производные по углам равны нулю и функция f зависит только от величин t , r , R и квадрата тангенциальной составляющей скорости $T = \Theta^2 + \Phi^2$. Перейдите к полярным координатам в пространстве скоростей

$$\Theta = T^{1/2} \cos \alpha, \quad (2)$$

$$\Phi = T^{1/2} \sin \alpha, \quad (3)$$

где $-\infty \leq \Theta, \Phi \leq \infty$, $0 \leq T \leq \infty$ и $0 \leq \alpha \leq 2\pi$. Покажите, что при этих условиях решение (1) приводится к виду

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial t} + R \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r} + \left(\frac{T}{r} - \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) \frac{\partial \tilde{f}}{\partial R} - \frac{2RT}{r} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial T} = 0, \quad (4)$$

где

$$\tilde{f}(t, r, R, T) \equiv \pi f(r, t, R, \Theta, \Phi). \quad (5)$$

Покажите также, что уравнение Пуассона принимает вид

$$\frac{\partial \Psi}{\partial r} = \frac{G}{r^2} M(r, t), \quad (6)$$

где

$$M(r, t) = \int_{x=0}^r 4\pi x^2 \int_T \int_R \tilde{f} dR dT dx \quad (7)$$

— масса, заключенная внутри радиуса r .

Следующий шаг заключается в том, чтобы найти преобразование, оставляющее уравнения (4), (6) и (7) инвариантными. Поскольку в эти уравнения переменных входят в виде степеней, удобно использовать преобразование вида

$$\tilde{f} = a^2 f^*, \quad t = a^\beta t^*, \quad R = a^\gamma R^*, \quad r = a^\delta r^*, \quad T = a^\epsilon T^*, \quad M = a^\eta M^*, \quad (8)$$

где a — параметр. Чтобы определить показатели степени, подставьте эти соотношения в (4), (6) и (7) и покажите, что шесть показателей степени должны удовлетворять четырем соотношениям

$$\begin{aligned} \gamma &= \delta - \beta, \\ \epsilon &= 2(\delta - \beta), \\ \eta &= 2(\delta - \beta) + \delta, \\ \alpha &= -3\delta + \beta. \end{aligned} \quad (9)$$

При этом остается только одна степень свободы, поскольку приведенные соотношения являются однородными.

Чтобы перейти к инвариантам преобразования, сведем все переменные в пять выражений, содержащих по две переменные. Все эти выражения должны

быть инвариантными. Нормируя переменную времени t на его начальное значение t_0 и выражая $(\alpha, \beta, \dots, \eta)$ через величину $k = 1 - \delta/\beta$, покажите, что пятью инвариантами будут

$$\frac{\bar{f}}{(t/t_0)^{3k-2}}, \quad \frac{r}{(t/t_0)^{1-k}}, \quad \frac{R}{(t/t_0)^{-k}}, \quad \frac{T}{(t/t_0)^{-2k}}, \quad \frac{M}{(t/t_0)^{-3k}}. \quad (10)$$

Значение свободного параметра k определяется из условия сохранения массы. Каково это значение?

Эти результаты представляют собой отправную точку для поиска новых решений бесстолкновительного уравнения Больцмана, записанного в функциях инвариантов. До сих пор, однако, эти решения оказывались полезными только в достаточно специальных случаях. [См. *Munier et al.*, *Astron. Astroph.*, 78, 65 (1979).]

18.5. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В НЕОДНОРОДНОЙ СИСТЕМЕ

Поскольку случай однородной системы является достаточно частным, естественно задать вопрос: как повлияет неоднородность среды на распространение и затухание волн? Для использования линейного анализа возмущений требуется, чтобы неоднородность была устойчивой по крайней мере на интервалах времени, превышающих характерное время изменения волны. В простейшем случае неоднородностью является сама система. (Случай, когда размер неоднородности меньше размера системы, является более сложным.) В качестве примера можно рассмотреть сферическое скопление звезд. В таком скоплении гравитация уравновешивается кинетическим давлением (т. е. давлением, обусловленным движением звезд). Из этого условия можно определить плотность и среднее гравитационное поле. (Процессом медленного испарения звезд из системы будем пренебрегать.)

Начните анализ с линеаризованного бесстолкновительного уравнения Больцмана и уравнения Пуассона, записанных для такой системы. Пусть $f^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ — равновесная функция распределения. Рассмотрите возмущения с длиной волны, намного меньшей радиуса системы. Покажите с помощью преобразования Фурье — Лапласа, что «диэлектрическая функция» (возможно, название «дигравитационная функция» было бы более уместным) скопления имеет вид

$$D(\mathbf{k}, z) = 1 + \frac{4\pi i G}{k s E} \int_{-\infty}^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} du' e^{i[z(u') - z(u)]} \frac{\partial f^{(0)}(u')}{\partial u'}. \quad (1)$$

Здесь $u = \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}/k$, $\bar{f}^{(0)}(u) = \int f^{(0)} dv_{\perp}$, $v_{\perp}$ — компонента $\mathbf{v}$, перпендикулярная $\mathbf{k}$, $E = |\mathbf{F}^{(0)} \cdot \mathbf{k}|/k$, $s = \text{sign } \mathbf{F}^{(0)} \cdot \mathbf{k}$, $\bar{\mathbf{F}}^{(0)}(\mathbf{r})$ — равновесная гравитационная сила и $\alpha(u, z) = sE^{-1}(1/2 ku^2 - uz)$, где z — параметр преобразования Лапласа. Покажите, что волнам легче распространяться в центр скопления, чем наружу.

18.6. АККРЕЦИЯ ГАЗА НА ЗВЕЗДЫ

При движении нейтронной звезды через плотное газовое облако аккреция на нее газа сильно зависит от давления газа и процессов излучения. Оцените характерный размер и равновесную плотность колонки аккрецируемого вещества в случае, когда доминирует давление. Если большая часть кинетической энергии падающего газа высвечивается при ударе о поверхность звезды, то какова будет результирующая светимость? [См. *Carlsberg*, Ap. J., 220, 104] (1978).]

19. ЛИТЕРАТУРА

Много книг составлять и много
читать — утомительно для плоти.

Экклезиаст

В список ссылок мы включили только ту литературу, которая имеет наиболее непосредственное отношение к тексту. Развитие в данной области происходит так быстро, что в момент времени t нет смысла приводить библиографию, составленную на момент $t - \tau$, ибо она успеет устареть приблизительно к моменту $t + \tau$. Наиболее полную библиографию в настоящее время можно найти в «Астрономии энд Астрофизике Абстрактс». Итак, мы приносим извинения каждому, чья работа не вошла в данный перечень независимо от времени ее написания, и приводим список той литературы, на которую опирается или прямо ссылается данный текст. Другие ссылки, приведенные в главе, посвященной задачам и приложениям, не столько образуют исчерпывающий перечень литературы, сколько дают возможность первого знакомства с ней.

Имеется ряд классических учебников по звездной динамике, теории орбит и небесной механике. Наиболее важными из них являются следующие:

- Арнольд В.И.* Математические методы классической механики. — М.: Наука, 1979.
- Chandrasekhar S.* Principles of Stellar Dynamics (New York: Dover), 1960. (Имеется перевод: *Чандрасекхар С.* Принципы звездной динамики. — М.: ИЛ, 1948.)
- Chandrasekhar S.* Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability (London: Oxford University Press), 1961.
- Chandrasekhar S.* Ellipsoidal Figures of Equilibrium (New Haven: Yale University Press), 1969. [Имеется перевод: *Чандрасекхар С.* Эллипсоидальные фигуры равновесия. — М.: Мир, 1973.]
- Hagihara Y.* Celestial Mechanics (Cambridge Mass.: MIT Press), 1970, 1972.
- Hamilton W.R.* On a general method in dynamics. Phil. Trans. Roy. Soc., Pt. II, 124, 247 (1834).
- Hayli A.* (ed.) Dynamics of Stellar Systems (Boston: D. Reidel), 1975.
- Jeans J.H.* Problems of Cosmogony and Stellar Dynamics (London: Cambridge University Press), 1919.
- Jeans J.H.* Astronomy and Cosmogony (London: Cambridge University Press), 1928.
- Kurth R.* Introduction to the Mechanics of Stellar Systems (London: Pergamon), 1957. [Имеется перевод: *Курт Р.* Введение в звездную статистику. — М.: Мир, 1969.]

- Lecar M.* (ed.). *Gravitational N-Body Problem* (Boston: D. Reidel), 1972.
- Mihalas D., Binney J.* *Galactic Astronomy* (San Francisco: W.H. Freeman), 1981.
- Огородников К.Ф.* Динамика звездных систем. — М.: Физматгиз, 1958.
- Peebles P. J. E.* *The Large Scale Structure of the Universe* (Princeton: Princeton University Press), 1980. [Имеется перевод: *Пиблс Ф.Д.Э.* Структура Вселенной в больших масштабах. — М.: Мир, 1983.]
- Smart W.M.* *Stellar Dynamics* (London: Cambridge University Press), 1938. [Имеется перевод: *Смарт У.М.* Небесная механика. — М.: Мир, 1965.]
- Szebehely V.* *Theory of Orbits* (New York: Academic Press), 1967.

Ссылки на эту литературу можно встретить и в других местах данной книги.

Описание плазменных аналогий гравитационных многочастичных процессов можно найти в большинстве современных учебников по физике плазмы. Не существует подробного описания истории развития в данной области, хотя в работе Огородникова и содержится краткое изложение некоторых ее сторон на раннем этапе. Такая история могла бы представлять большой интерес, особенно если вспомнить, что эта область науки обогащалась небесной механикой, физикой плазмы и другими разделами, связанными с задачей многих тел.

ГЛАВА 2

- Cox D.R., Miller H.D.* *The Theory of Stochastic Processes* (London: Chapman and Hall), 1965.
- Jeans J.H.* On the "kinetic theory" of star-clusters, *MNRAS*, **74**, 109 (1913).
- Lecar M., Cruz-Gonzales C.* A numerical experiment on relaxation times in stellar dynamics, in *Gravitational N-Body Problem*, M. Lecar (ed.) (Boston: D. Reidel), 1972, p. 131.
- Rybicki G.B.* Relaxation times in strictly disk systems, in *Gravitational N-Body Problem*, M. Lecar (ed.) (Boston: D. Reidel), 1972, p. 22.

ГЛАВА 3

- Einstein A.*, *Investigations of the Theory of the Brownian Movement* (New York: Dover), 1955.
- Fox R.F.* Gaussian stochastic processes in physics, *Phys. Reports*, **48**, 179 (1978).
- Ito K.* On stochastic differential equations, *Mem. Amer. Math. Soc.*, No. 4, 1951.
- Langevin P.* On the theory of brownian motion, *C.R. Acad. Sci. Paris*, **146**, 530 (1908).

ГЛАВА 5

- Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Механика. — М.: Наука, 1973.
- Michie R.W.* Structure and evolution of globular clusters, *Ap. J.*, **133**, 781 (1961).
- Michie R.W.* On the distribution of high energy stars in spherical stellar systems, *MNRAS*, **125**, 127, 1963.
- Rosenbluth M.N., MacDonald W.H., Judd D.L.* Fokker-Plank equation for an inverse-square force, *Phys. Rev.*, **107**, 1 (1957).

ГЛАВА 8

Jeans J.H. On the theory of star-streaming and the structure of the universe, MNRAS, **76**, 70 (1915).

Jeans J.H. Problems of Cosmogony and Stellar Dynamics, 1919, pp. 230—6.

Jeans J.H. The motions of stars in a Kapteyn-universe, MNRAS, **82**, 122 (1922).

ГЛАВА 10

Chandrasekhar S., Lee E.P. A tensor virial-equation for stellar dynamics, MNRAS, **139**, 135 (1968).

Grad H. Principles of the kinetic theory of gases, in Handbook der Physik, S. Flugge (ed.) (Springer-Verlag, Berlin), 1958, Vol. XII, p. 205.

ГЛАВА 11

Цепочка уравнений ББГКИ описана во многих учебниках по физике плазмы. В этой главе мы придерживаемся работы *Saslaw W.C.* The kinetics of gravitational clustering, Ap. J., **177**, 17, (1972), в которой имеются ссылки на другие работы.

ГЛАВА 12

Haggerty M., Severne G. — In: Advances in Chemical Physics, I. Prigogine, S. Rice (eds.) (New York: Wiley and Sons), 1976, Vol. 35, p. 119.

Prigogine I. Nonequilibrium Statistical Mechanics (New York: Interscience), 1962. [Имеется перевод: *Пригожин И.* Неравновесная статистическая механика. — М.: Мир, 1964.]

ГЛАВЫ 13, 14

Saslaw W.C. The ejection of massive objects from galactic nuclei: gravitational scattering of the object by the nucleus, Ap. J., **195**, 773 (1975).

White S.D.M. Simulations of merging galaxies, MNRAS, **184**, 185 (1978).

ГЛАВА 15

Chandrasekhar S. Hydrodynamic and hydromagnetic stability (London: Oxford University Press), 1961, p. 588.

von Hoerner S., Saslaw W.C. The evolution of massive collapsing gas clouds, Ap. J., **206**, 917 (1976).

Jeans J. H. Astronomy and Cosmogony (London: Cambridge University Press), 1928, p. 345.

Лебедев В.И., Максумов М.Н., Марочник Л.С. Коллективные процессы в гравитирующих системах. — Астрон. ж., 1965, т. 42, с. 709.

ГЛАВА 16

Ландау Л.Д. О колебаниях электронной плазмы. — ЖЭТФ, 1946, т. 16, с. 574.

Lynden-Bell D. The stability and vibrations of gas of stars, MNRAS, **124**, 23, 1962.

Марочник Л.С. Пробная звезда в звездной системе. — Астрон. ж., **44**, 1087, 1967.

- Noerdlinger P.D. Stability of uniform plasmas with respect to longitudinal oscillations, Phys. Rev., **118**, 879 (1960).
Penrose O. Electrostatic instabilities of a uniform non-Maxwellian plasma, Phys. Fluids, **3**, 258 (1960).

ГЛАВА 17

- Allen C. W. Astrophysical Quantities (London: Athlone Press), 1963. [Имеется перевод: Аллен К. Астрофизические величины. — М.: Мир, 1977.]
Danby J.M.A., Camm G.L. Statistical dynamics and accretion, MNRAS, **117**, 50 (1956).
Eddington A.S. The Internal Constitution of the Stars (London: Cambridge University Press), 1926.
Ikeuchi S., Nakamura T., Takahara F. Collective instabilities of self-gravitating systems — infinite homogeneous case, Progr. Theoret. Phys **52**, 1807 (1974).
Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика. — М.: Наука, 1973.
Mathews W.G. Collapse in galactic nuclei, Ap. J., **174**, 101 (1972).
Saslaw W.C., De Young D.S. The ejection of massive objects from galactic nuclei: interactions between the massive object and the galactic gas, Astrophys. Lett., **11**, 87 (1972).
Spitzer L. Diffuse Matter in Space (New York: Wiley Interscience), 1968.
Sweet P.A. Cooperative phenomena in stellar dynamics, MNRAS, **125**, 285 (1963).

БЕСКОНЕЧНЫЕ НЕОДНОРОДНЫЕ СИСТЕМЫ И СКУЧИВАНИЕ ГАЛАКТИК



И много труднее полагать, что все частицы в бесконечном пространстве должны размещаться настолько точно одна относительно другой, чтобы оставаться в совершенном равновесии. По моим расчетам, это так же трудно, как заставить каждую из бесконечного их числа (все, сколько ни есть частиц в бесконечном пространстве) не сдвинуться и на толщину иглы и оставаться точно в занимаемых ими положениях.

Ньютон

Познакомившись с основами гравитационной физики многих тел, можно обратиться к некоторым ее астрономическим приложениям. Многие существенные процессы еще предстоит исследовать, но наиболее ярко они предстают перед нами именно в астрофизических проявлениях.

В первой части время от времени отмечалось, что бесконечные однородные системы (как, впрочем, и все однородные гравитационные системы) представляют собой искусственные построения — идеализации, не существующие в природе. Будучи удобными для математического анализа, они весьма неустойчивы и не позволяют описывать наблюдаемые явления иначе как в первом приближении. Ньютон отметил это обстоятельство, качественно проанализировав его в письме к Бентли. Джинс (см. гл. 15) сформулировал это положение количественно применительно к стационарной Вселенной. Существенно сложнее и плодотворнее рассмотрение расширяющейся Вселенной. Это фундаментальная проблема, и, чтобы заниматься ею, начнем с описания распределения материи вокруг нас на самых больших масштабах.

20. КАК МАТЕРИЯ ЗАПОЛНЯЕТ ВСЕЛЕННУЮ?

20.1. ОБЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Одна из самых непонятных вещей во Вселенной — неоднородность распределения материи в пространстве. Другая столь же непонятная вещь — однородность этого распределения.

Здесь очевидно противоречие — трудноразрешимый парадокс, символизирующий неопределенность наших представлений о происхождении структуры Вселенной. Оба утверждения — о неоднородности и об однородности — правдивы. Их можно считать «великими истинами» в духе Нильса Бора, который говорил, что утверждение, противоположное великой истине, тоже содержит в себе великую истину.

Чтобы убедиться в неоднородности распределения материи, нам следует лишь оглянуться вокруг. Чем ближе к нам, тем больше контрасты плотности. Мы сами в основном состоим из воды, и наша плотность сравнима с плотностью нашей планеты, последняя же немного больше средней плотности Солнца. Эти величины примерно в 10^{23} раз больше, чем усредненное значение плотности в окрестностях Солнца, которое типично для средней плотности внутри крупных галактик. В свою очередь средняя плотность внутри таких галактик примерно в 1000 раз больше, чем внутри богатых скоплений галактик. Если взять среднее по областям пространства, содержащим много богатых скоплений, то плотность упадет еще в 1000 раз. Эти соотношения иллюстрируются в табл. 2 и на рис. 22, которые взяты из превосходных обзоров Вокслера (*de Vaucouleurs*, 1970, 1971). Хотя массы и радиусы, которые астрономы получают для больших систем, часто могут отличаться от истинных по крайней мере вдвое, огромный диапазон этих логарифмических масштабов делает разброс плотностей очевидным. Основной результат ясен: средняя плотность вещества падает с возрастанием объема.

Прекращается ли где-то это падение плотности? Можно ли приписать какое-либо значение средней плотности всей наблюдаемой области Вселенной? В фундаментальном смысле мы пока не знаем ответа на этот вопрос. По мере того как мы обозреваем все более удаленные области пространства и заглядываем во все более ранние времена, качество и степень нашей информированности понижаются. Нас достигают тем более немногочисленные и покрасневшие фотоны, чем удаленнее от нас объект. Ухудшается линейное разрешение. Все большее число фотонов рассеивается и поглощается по пути газом и пылью. Поэтому мы не можем изучить их свойства так же полно, как свойства фотонов от близких объектов за время, доступное большим телескопам. Если мы живем в иерархической Вселенной, которой свойственно скупивание на всех масштабах, то ее средняя плотность должна стремиться к нулю по мере возрастания масштаба. Известно, что отклонения от однородности проявляются на масштабах вплоть до ~ 50 Мпс, а возможно, и больших. Далее картина становится неясной.

На самых больших масштабах появляются данные нового типа. Они связаны уже не с распределением галактик, а с неоднородностью космического микроволнового фонового излучения. Его спектр весьма близок к спектру излучения абсолютно черного тела; предполагается, что это реликт, дошедший до нас от ранней горячей и плотной фазы расширяющейся Вселенной. Хотя когда-то это излучение преобладало в общей энергетической плотности Вселенной, сейчас его вклад мал. Однако и теперь оно должно возмущаться гравитационным потенциалом крупномасштабных неоднородностей в распреде-

Таблица. 2. Массы, радиусы и плотности [данные взяты из работы де Вокулера (de Vaucouleurs, 1970), где приведены подробные ссылки]

Классы объектов	Примеры	$\lg M$ (г)	$\lg R$ (см)	$\lg \rho$ (г/см ³)
Нейтронные звезды	Пульсары	33,16	5,93	14,75
		32,54	7,44	9,60
Белые карлики	L930—80	33,45	8,3	7,93
	α CMaB	33,30	8,77	6,37
	vM2	32,90	9,05	4,13
	dM8	32,2	9,95	1,76
Звезды главной последовательности	Солнце	33,30	10,84	0,15
	A0	33,85	11,25	— 0,55
	O5	34,9	12,1	— 2,0
Сверхгиганты	F0	34,4	12,65	— 4,2
	K0	34,4	13,15	— 5,7
	M2	34,7	13,75	— 7,2
Протозвезды	IR	35,3?	16,22	— 13,9?
Компактные, карликовые, эллиптические галак- тики	M32, ядро	41,0	19,5?	— 18,1
	M32, в целом	42,5	20,65	— 20,0
	N4486-B	43,4	20,5	— 18,75
Спиральные галактики	БМО	43,2	21,75	— 22,65
	M33	43,5	21,8	— 22,5
	M31	44,6	22,3	— 22,9
Гигантские эллипти- ческие галактики	N3379	44,3	22,0	— 22,35
	N4486	45,5	22,4	— 22,3
Компактные группы галактик	Квинтет Стефана*	45,5	22,6	— 23,1
Малые группы спи- ральных галактик	Скульптор	46,2	24,1	— 26,7
Плотные группы эл- липтических галак- тик	Дева E, ядро	46,5	23,7	— 25,2
	Печь I			
Небольшие рассеян- ные скопления галактик	Дева S	47,0	24,3	— 26,5
	Большая Медведица			
Бедные скопления	Дева E	47,2	24,3	— 26,3
Богатые скопления эллиптических галактик	Волосы	48,3	24,6	— 26,1
	Вероники			
Сверхскопления	Местное сверхскопление	48,7	25,5	— 28,4

* По более поздним данным, Квинтет Стефана не является физически связанной группой — Прим. перев.

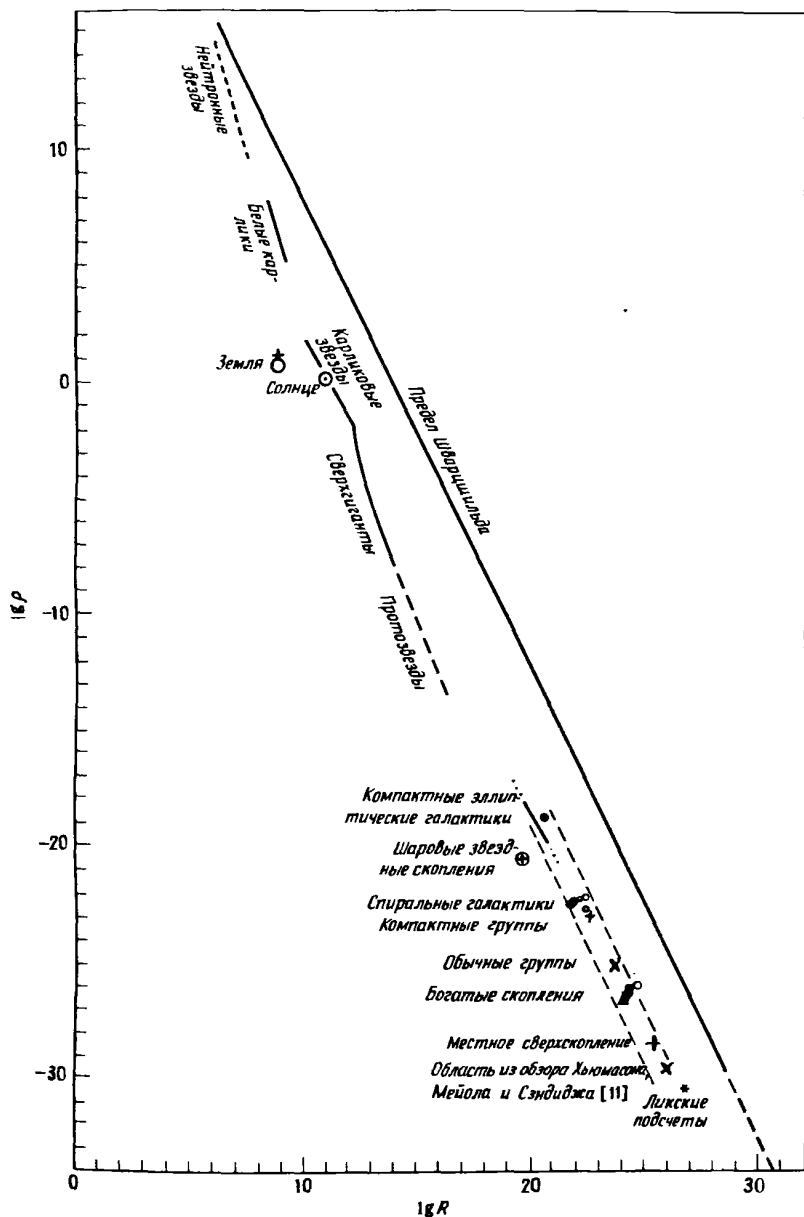


Рис. 22. Соотношение между средней плотностью и радиусом гравитационных систем. Прерывистые тонкие линии в правом нижнем углу показывают значения плотности, полученные по теореме вириала для скоплений звезд и галактик (de Vaucouleurs, 1970).

лении вещества. Локальные возмущения плотности порядка $\delta\rho/\rho$ должны вести к температурным возмущениям порядка $\delta T/T$ микроволнового фона. Они не обнаруживаются на уровне 0,1%, но могут существовать на более низких уровнях. Угловым масштабам, на которых выполняются эти измерения, соответствует вклад от очень больших линейных масштабов. Можно с уверенностью предполагать, что из таких измерений получается средняя плотность по масштабам, которые сравнимы с размерами видимой части Вселенной.

Какова может быть эта средняя плотность? Оценки по подсчетам отдельных галактик на самых больших масштабах, вплоть до сверхскоплений, дают приблизительно $\rho_{\text{гал}} \approx 3 \cdot 10^{-31}$ г/см³. Полезно ввести эталон для сравнения этой плотности. В общепринятой космологической модели Эйнштейна — Фридмана существует критическая плотность

$$\rho_c = \frac{3}{8\pi G} H^2, \quad (20.1)$$

значение которой определяет границу между «закрытой» Вселенной, в конце концов коллапсирующей, и «открытой», которая расширяется бесконечно. В этом выражении, элементарно выводимом в космологии, $H = \dot{R}/R$ — постоянная Хаббла. В рассматриваемых нами моделях, однородных по большим масштабам, радиус кривизны R определяет масштаб Вселенной и является функцией только времени. Плотность Вселенной глобально определяет силу гравитации и поэтому влияет на скорость расширения.

Постоянная Хаббла (которая в общем зависит от времени) может быть получена путем измерения поля скоростей галактик. Галактики, находящиеся на расстояниях $r \ll R$ от любой точки пространства, удаляются от нее с лучевой скоростью $V_r = rH$ в результате космологического расширения (см. гл. 23). В общем случае наряду со скоростью разбегания галактики обладают пекулярными скоростями. Выделение пекулярных скоростей, как и измерение r независимо от v с целью определить H , представляют собой нелегкие задачи. В астрономических работах детально обсуждается проблема определения постоянной Хаббла. В этой книге всюду будет принято значение $H = 50$ км/(с·Мпс). Предмет нашего обсуждения мало зависит от ее точного значения, которое, вероятнее всего, заключено между 40 и 100 км/(с·Мпс). При $H = 50$ уравнение (20.1) дает $\rho_c \approx 4 \cdot 10^{-30}$ г/см³, что примерно в 10 раз больше средней плотности, наблюдаемой на самых больших масштабах.

На этой стадии обсуждения астрономов, видимо, можно разделить на две группы. Одни считают, что, поскольку ρ_c — единственная плотность, определяемая общерелятивистскими моделями мира, это значение должно быть справедливо и в нашей реальной Вселенной. Тогда критическая плотность должна «предсказываться» особыми свойствами этих моделей — свойствами, подобными принципу Маха, — и связана с возможной картиной осциллирующей Вселенной, последовательно проходящей стадии расширения и сжатия. Бесконечная серия циклов позволила бы избавиться от проблемы возникновения. Помимо этого, каждая фаза высокой плотности (сингулярность) могла

бы давать начало Вселенной с иными свойствами, и тогда появилось бы много шансов для возникновения жизни, подобной нашей. К тому же постановка вопроса о предотвращении бесконечного возрастания энтропии на протяжении циклов позволяет строить весьма любопытные гипотезы о возможности изменения направления времени. Вся эта картина настолько привлекательна, что очень хочется, чтобы она соответствовала действительности. По этой же причине получили стимул исследования проблемы «скрытой массы», которые напоминают средневековые поиски чаши святого Грааля. Разница заключается, возможно, в том, что святой Грааль должен был открыться только рыцарю истинно смиренному и милосердному.

Чем больше астрономы ищут скрытую массу, тем безнадежнее поиски. Несколько возможностей еще осталось. Межгалактический газ (ионизованный и в виде молекул), карликовые галактики, межгалактические звезды, каменные глыбы, черные дыры, массивные нейтрино, недоступные детектированию элементарные частицы, гало вокруг галактик — ни на один из этих объектов пока нельзя возложить ответственность за существование скрытой массы. Когда-нибудь, возможно, она будет найдена. В то же время другая группа астрономов готова принять, что $\Omega \equiv \rho/\rho_c < 1$, и следует этой концепции.

Помимо вопросов, связанных с величиной Ω , существует проблема объяснения неоднородностей на малых [по сравнению с $R(t)$] масштабах и однородности на больших. Здесь также возникли две основные точки зрения. Согласно одной из них, ранняя Вселенная была полностью однородна. Во время расширения возникли неустойчивости, в результате которых образовалась наблюдаемая сейчас структура. Недостаток такого взгляда в том, что мы не знаем каких-либо физических механизмов неустойчивостей, возникающих естественным образом, которые достаточно сильны, чтобы играть роль в стандартных космологических моделях. В гл. 21 будет показано, как джинсовская неустойчивость ослабляется расширением. Противоположная, «практическая», точка зрения состоит в том, что заметные возмущения присутствовали уже в первоначальных условиях по причинам, нам непонятным.

Первоначальные возмущения могут быть изотермическими, адиабатическими или обладать произвольной комбинацией этих свойств. На рис. 23 иллюстрируются различные возможности, и мы кратко рассмотрим их ниже. Этому вопросу посвящены подробные обзоры (см., например, Weinberg, 1974; Peebles, 1980). Материя, заполнявшая раннюю Вселенную при красных смещениях $z \gg 10^3$, считается непрерывной, почти равновесной жидкостью, состоящей из вещества и излучения. Вещество могло состоять из многих компонент — барионов, электронов, нейтрино — и (при очень высоких температурах и плотностях в течение нескольких первых минут расширения от сингулярности) из более экзотических частиц. Электромагнитное излучение имело спектр, очень близкий к спектру излучения абсолютно черного тела; могло также присутствовать гравитационное излучение. В течение первых нескольких минут все физические взаимодействия — сильное, слабое, электромагнитное и гравитационное — были существенны. Позже стали доминировать электромагнитное и гравитационное взаимодействия.

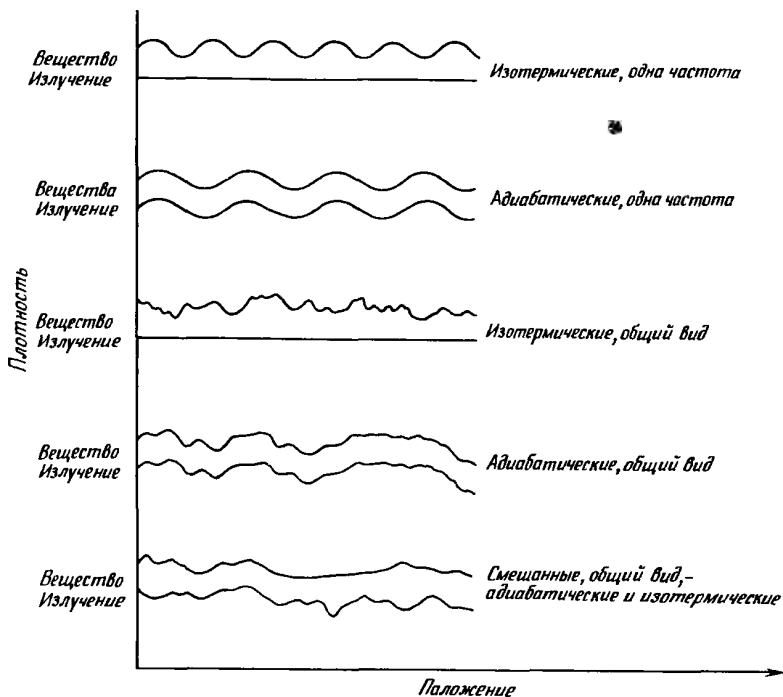


Рис. 23. Различные возможные начальные условия для возникновения гравитационных возмущений.

Изотермические возмущения — это неоднородности плотности частиц на невозмущенном радиационном фоне. В наиболее реалистических космологических моделях при красных смещениях $z \gg 10^5$ в плотности энергии доминирует вклад излучения, которое, таким образом, определяет температуру. Поскольку на температуру мало влияют барионные неоднородности, такие возмущения называются изотермическими.

Адиабатические возмущения в отличие от изотермических включают в себя флуктуации плотности вещества и излучения с одинаковой фазой. Энтропия на один барион, пропорциональная $T^3 \rho^{-1}$, постоянна, поэтому $3\delta T/T = \delta \rho/\rho$. Заметим, что количество энтропии на барион, равное также числу фотонов на барион, остается постоянным в процессе равновесного расширения Вселенной. Температура излучения понижается как R^{-1} , а плотность уменьшается как R^{-3} . Эта безразмерная константа из наблюдений получается равной примерно 10^8 . Никто не знает, почему она на самом деле должна иметь такое значение, далекое от значений других безразмерных космологических величин, которые имеют порядок 1, 10^{40} или 10^{60} . Возможно, это является ключом к пониманию самой ранней стадии развития Вселенной.

Адиабатические и изотермические возмущения эволюционируют неодинаково в процессе расширения Вселенной. В обоих случаях период времени вблизи $z \approx 10^3$, когда Вселенная охладилась до температуры чуть ниже 3000°K , является критическим моментом. При более высокой температуре вещество ионизовано и рассеяние на свободных электронах тесно объединяет газ и излучение. При более низкой температуре образуются нейтральные атомы и вещество отделяется от излучения. Временной масштаб, на котором такое разделение происходит, близок к хаббловскому времени H^{-1} при $z \approx 10^3$.

Перед разведением (часто его называют рекомбинацией, хотя никогда раньше реальных комбинаций электронов и ионов не существовало) изотермические возмущения локализованы в пространстве. Сверхплотные области не могут двигаться относительно общего потока расширения, потому что рассеяние на электронах в однородном поле излучения быстро подавляет пекулярные скорости. После разделения изотермические возмущения свободно подчиняются силам гравитации и давления. Неоднородности в распределении газа с длиной волны, большей, чем джинсовская (15.11), при $z \approx 10^3$ имеют массу $M_J \approx 10^6 M_\odot$. Они начинают сжиматься. Поскольку первоначальный спектр этих возмущений неизвестен — настолько велика диссипация в промежутке от $z \approx 10^3$ до нашего времени, — разработано много моделей с самыми разными предположениями. Большинство из них согласуется между собой в одном важном пункте. Сгущения с массой $\sim 10^6 M_\odot$ образуются первыми. Взаимное тяготение вынуждает их собираться во все более крупные системы. В конце концов они образуют галактики и скопления галактик. Внутренняя эволюция на каждом уровне объединения, однако, сложным образом зависит от модели. В некоторых моделях предусматривается образование сверхмассивных звезд, которые взрываются, вновь нагревая окружающий газ. В других моделях предполагается совершенно нормальное звездообразование. До сих пор, по-видимому, нет по-настоящему мощных и определенных наблюдательных тестов, позволяющих выделить тот или иной сценарий эволюции. Многие из этих моделей достаточно гибки, и их можно согласовать с наблюдениями, но ни одна из них не вытекает из наблюдений однозначно. Все модели, однако, основаны на гравитации. Поэтому мы подробнее рассмотрим природу сгущения.

Адиабатические начальные возмущения ведут себя более сложным образом. Они не растут до того момента времени, когда происходит разделение, но имеют тенденцию осциллировать, если их размеры меньше размеров горизонта (приблизительно при $\lambda < cH^{-1}$). В некоторых космологических моделях, когда перед разведением плотность энергии излучения ($\propto R^{-4}$) становится меньше плотности вещества ($\propto R^{-3}$), адиабатические возмущения могут эволюционировать сходно с изотермическими. В обоих случаях основное возмущение полной плотности энергии происходит в веществе, а не в излучении. Если этого не случается, то радиационная вязкость подавляет адиабатические возмущения еще до эпохи разделения. Вязкое трение действует быстрее на близких расстояниях, поэтому выживают только очень крупные возмущения. Их размеры зависят от модели, а типичная масса равна

$10^{13}—10^{15} M_{\odot}$. Таким образом, в этих моделях первыми формируются скопления галактик. Они фрагментируют на галактики, а те в свою очередь на звезды. Построено много таких моделей, причем газодинамические процессы в них трудны для расчетов по сравнению с более простыми явлениями гравитационного сгущивания.

Естественно, что в том случае, когда изначально присутствуют как изотермические, так и адиабатические возмущения, могут происходить и сгущивание и фрагментация. Представленная картина при желании может быть усложнена. Однако на этой ранней стадии нашего понимания, по-видимому, более уместен вопрос: какие минимальные первоначальные возмущения мы должны ввести в раннее состояние Вселенной, чтобы объяснить ее сегодняшнюю структуру? Вводить адиабатические возмущения, которые разрушаются в процессе разъединения, — это все равно что, разбивая цветник, посеять семена цветов вместе с сорняками, а потом выпалывать сорняки. Защищая такой подход, следует задать вопрос: видим ли мы сорняки сегодня? Очертания структур самых больших масштабов могут дать ключ к пониманию этого вопроса, особенно если такие структуры не могут возникнуть путем гравитационного сгущивания. Такова другая причина, по которой следует рассмотреть простое гравитационное сгущивание в бесконечной системе.

20.2. КОЛИЧЕСТВЕННЫЙ ПОДХОД К ОБЪЯСНЕНИЮ НАБЛЮДАЕМОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Чтобы построить теорию гравитационного сгущивания и сравнить ее результаты с наблюдениями, мы нуждаемся в количественном описании крупномасштабного распределения вещества. Один из основных подходов к этой проблеме состоит в построении моделей распределения и затем в подгонке их путем подбора параметров к данным наблюдений. Другой подход связан с расчетом n -точечных корреляционных функций для галактик. Оба эти подхода относительно и не дают сами по себе исчерпывающего описания. Мы увидим, что, хотя корреляционные функции очень тесно связаны с фундаментальными понятиями гравитационной физики, они не приспособлены для выявления крупномасштабных свойств неоднородностей. С другой стороны, модели, приспособленные для описания крупномасштабной структуры, имеют мало отношения к основам физики. По этой причине здесь излагается физический смысл корреляционных функций в нескольких следующих разделах, а модели будут обсуждаться лишь в тех случаях, когда это окажется полезным.

Сначала, чтобы пояснить разницу между духом моделирования и корреляционным анализом, рассмотрим несколько простых примеров моделей. В конце тридцатых годов Холмберг (*Holmberg*, 1940) начал применять множественную функцию. При рассмотрении определенной выборки галактик подсчитывают число одиночных объектов, их пар, триплетов и т. д., чтобы получить относительную частоту встречаемости групп разной кратности. Сразу видно, что это частотное распределение существенно зависит от того, как введено определение группы и какова предельная звездная величина выборки. Таковы

параметры даже самой простой модели. Совсем другой вопрос — объединены ли члены этих групп внутренней гравитационной связью.

В более сложных моделях начинают с подсчета числа скоплений, содержащих от N до $N + dN$ галактик. Далее параметризуется распределение радиусов скоплений и ход плотности внутри их, например, согласно распределению Гаусса или степенному закону. Для получения дополнительной информации можно рассматривать не только сферические скопления, но и скопления иной формы. Наконец, необходимо представить распределение центров скоплений. После этого вычисляется трехмерное распределение с желаемыми параметрами, проецируется на небесную сферу и сравнивается с тем, что мы видим. Варьируя свойства модели, можно убедиться в ее точности и надежности. Можно надеяться также на то, что она единственна. Хотя несколько таких моделей могут давать «мгновенный снимок» картины сгущивания галактик, нелегко проверить, удовлетворяют ли они физическим требованиям. Могли ли такие скопления прозволюционировать от реального исходного состояния? Единственный способ что-либо понять — это проследить эволюцию из многих исходных состояний и посмотреть, отвечают ли полученные статистические свойства скоплений свойствам модели.

Самая простая модель — однородное пуассоновское распределение — часто используется для сравнения. Взятое в качестве исходного состояния, которое затем испытывает динамическую эволюцию, оно позволяет получить хотя бы первоначальную информацию. В качестве эталона при сравнении с наблюдаемой картиной это распределение дает меру глобальной неоднородности. Разделим, например, участок небесной сферы, где наблюдается распределение галактик до определенной звездной величины, на m равновеликих площадок. На каждой из них расположено n галактик, в среднем число галактик равно $\langle n \rangle$. При больших значениях $\langle n \rangle$ пуассоновское распределение приближается к гауссову для числа площадок, каждая из которых содержит n галактик:

$$N(n) = \frac{m}{(2\pi\langle n \rangle)^{1/2}} e^{-(n - \langle n \rangle)^2/2\langle n \rangle}, \quad (20.2)$$

причем общее число галактик $N_T = m\langle n \rangle$. Дисперсию этого распределения $\langle n \rangle^{1/2}$ можно сравнить с дисперсией, полученной для m наблюдений: $[\sum_{i=1}^m (n_i - \langle n \rangle)^2/m]^{1/2}$. Их отношение дает меру отклонения от однородного случайного распределения. Фундаментальная теория, основанная на этом приближении, изложена в гл. 34.

При применении стандартного критерия χ^2 используют информацию об общем распределении, вычисляя величину

$$\chi^2 = \sum_{n=1} \frac{(N(n)_{\text{набл}} - N(n)_{\text{ожд}})^2}{N(n)_{\text{ожд}}}. \quad (20.3)$$

Эта величина характеризует «интегральное» отклонение наблюдаемой гисто-

граммы $N(n)_{\text{набл}}$ от ожидаемой (т. е. от гистограммы для гауссова распределения). Если они совпадают, то $\chi^2 = 0$. Чем больше различие, тем больше величина χ^2 . По мере того как величина χ^2 возрастает, быстро уменьшается вероятность того, что наблюдаемое распределение можно представить в виде случайного, распределенного по Пуассону или по Гауссу, как доказывается в элементарных курсах статистики. Если максимальная величина χ^2 заметно меняется в зависимости от размера и формы площадок, то такое изменение позволяет судить о характерных параметрах сгущения.

В 1930—1970 гг. подобные тесты в различных вариантах были применены к исследованию наблюдаемого распределения галактик. Все они указывают на значительные отклонения от однородности. Однако детали этих отклонений маскируются двумя важными факторами. Первый, как отмечено выше, — это большое число параметров, входящих в модели. Второй, столь же важный, — это наличие межзвездного поглощения, вызванного пылью. На фотоснимках ближайших к нам галактик уже давно обнаружены нерегулярные клочковатые области газа и пыли. Нет оснований считать, что наша Галактика качественно от них отличается. Это вынуждает астрономов уделять значительное внимание исключению эффектов неравномерного межзвездного поглощения при подсчетах далеких галактик. Проблема осложняется нехваткой детальной информации о распределении областей поглощения.

До сего времени не существует метода, позволяющего однозначно разделить реальное сгущение и кажущееся, вызванное неравномерностью поглощения. Помимо того что пыль ослабляет излучение далеких галактик, она уменьшает размеры их изображений, делая невидимыми участки с низкой поверхностной яркостью. Вследствие этого слабые галактики трудно отличить от звезд. Проблема несколько смягчается тем, что можно получить независимые оценки неоднородного распределения пыли посредством наблюдений в радиодиапазоне молекулярных облаков, связанных с пылью. Такие наблюдения, наряду с подсчетами числа звезд, показывают, что, как правило, пыли много меньше на высоких галактических широтах, вдали от плоскости нашей Галактики. Даже если это прояснение не полное и зависит от галактической долготы, подсчет галактик на высоких галактических широтах дает много более реалистичное представление об их истинном распределении. Такие высокоширотные подсчеты, выполненные за последние 30 лет, также показывают значительное сгущение.

Обнаружив сгущение, следует измерить его более точно, хотя бы для этого пришлось поступиться полнотой описания. С этой целью применяется корреляционный анализ для двумерного (Neyman et al., 1953) и для трехмерного (Kiang and Saslaw, 1969) распределений. Основная его идея чрезвычайно проста. Сначала найдем среднюю плотность внутри объема, соответствующего максимальному масштабу. Далее разделим площадь (или объем) исследуемой области на множество мелких ячеек одинакового размера. Затем найдем разность между плотностью в каждой ячейке и средней плотностью (превышение плотности). Перемножим такие величины, найденные для каждой из двух ячеек, составляющих пары, разделенные заданным расстоянием, и усред-

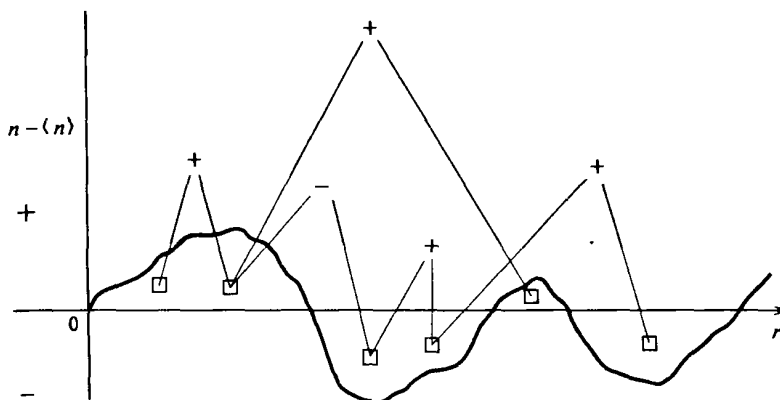


Рис. 24. Схематическая иллюстрация для определения знака корреляций плотности.

ним полученную величину по всем парам с одинаковым расстоянием. Наконец, сделаем то же самое для всех расстояний, на которых число пар данной выборки еще статистически велико. Результатом является двухточечная корреляционная функция как функция расстояния. Она представляет собой вероятность (выше или ниже вероятности для однородного случайного распределения) найти галактику в ячейке, находящейся на расстоянии r от другой ячейки, где уже обнаружена одна галактика.

Подобным же образом можно вычислить трех-, четырех- и многоточечную корреляционную функции для данной выборки. Если в выборке есть сгущение или скопление, избыток плотности в одном участке этого скопления будет давать положительную корреляцию с избытком плотности в других участках. За пределами масштаба сгущения корреляция будет отрицательной, так как в этом случае сравниваются области повышенной и пониженной плотности. Однородное случайное распределение должно давать нулевую корреляцию. Понижения плотности дают положительную корреляцию, как схематически показано на рис. 24. Таким образом, масштаб двухточечной корреляции характеризует масштаб сгущения.

Однако при таком подходе возникает тонкость, которая иногда приводит к полной путанице. Она состоит в том, что понятие сгущения отличается от понятия неоднородности. В однородной системе может присутствовать сгущивание! Для этого требуется, чтобы оно было одинаковым всюду в данной системе. Представить себе такую ситуацию можно, рассмотрев бесконечную одномерную решетку с точечными галактиками, разделенными единичными интервалами вдоль прямой (или в вершинах единичных кубов, если взять немного более близкий к реальности трехмерный случай). Тогда средняя плотность галактик равна нулю (так как в пределе, когда единичный объем стремится к нулю, число пустых ячеек стремится к бесконечности) и корреляционная функция имеет вид серии пиков δ -функций при $r = 1, 2, 3$ и т. д. Усредненная по

масштабам $\gg 1$ система будет однородной, но тем не менее будет существовать корреляция на всех масштабах. Теперь предположим, что каждая галактика расщеплена на несколько объектов, но все они остаются близки ($\Delta r < 1/2$) к первоначальному положению этой галактики. Корреляционные пики расширятся и станут конечными. Появятся области отрицательной корреляции, но однородность на больших масштабах сохранится. Более того, если произвести расщепление и расположить возникшие галактики случайным образом (внутри фиксированного Δr), система также будет казаться статистически однородной на больших масштабах. Аналогом этой картины являются дебаевские сферы в трехмерном плазменном континууме, где положениям электронов внутри однородной плазмы свойственна положительная корреляция. Всюду, куда ни посмотреть, существует равная вероятность найти центр дебаевской сферы. Подобным же образом если двухточечная корреляционная функция галактик не зависит от того, куда смотреть, то Вселенная может быть одновременно сгущенной и однородной.

Поскольку двухточечная корреляционная функция содержит лишь ограниченную информацию о распределении галактик и проследить ее на больших расстояниях трудно, с ее помощью невозможно получить точную меру однородности. Несколько больших сгущений, состоящих из множества галактик, не внесут большого вклада в усредненную корреляционную функцию. Природа корреляционных функций высокого порядка, скажем 100-точечной, позволяет определить крупномасштабную однородность. Таким образом, круг замкнулся: чтобы описать неоднородность, мы вынуждены возвратиться к моделям скоплений!

Очевидно, что двухточечная корреляционная функция, несмотря на свойственные ей ограничения, на небольших расстояниях (≤ 20 Мпс) может быть очень полезна для теоретического осмысления самогравитирующих систем. В следующих разделах будут описаны теоретические результаты. Но сначала мы на короткое время вернемся к анализу наблюдений.

20.3. ПОСТРОЕНИЕ ДВУХТОЧЕЧНОЙ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИИ ДЛЯ ГАЛАКТИК

В 1969 г. Тоцуи и Кихара вычислили двухточечную корреляционную функцию для галактик на масштабах $r \leq 20$ Мпс. Последующие исследования (см. подробности в монографии Peebles, 1980) подтвердили и развили их выводы. Ниже приводится краткий обзор этого подхода и обобщаются некоторые более поздние результаты.

Начнем с величины, которая измеряется непосредственно, — угловой двухточечной корреляционной функции для галактик, распределенных по небесной сфере. Это двумерное соотношение, $W(\theta)$, определяется следующим образом:

$$P_{12}(\theta) d\Omega_1 d\Omega_2 = \langle n \rangle^2 [1 + W(\theta)] d\Omega_1 d\Omega_2. \quad (20.4)$$

Здесь $P_{12} d\Omega_1 d\Omega_2$ — совместная вероятность найти одну галактику внутри телесного угла $d\Omega_1$, а другую — внутри $d\Omega_2$, θ — угол между этими двумя на-

правлениями, а $\langle n \rangle$ — средняя поверхностная плотность. Если эти вероятности независимы, то величина $W(\theta)$ должна быть равна нулю. По существу P_{12} означает число пар галактик, разделенных угловым расстоянием θ . Так, для выборки, которая делит площадь небесной сферы на одинаковые ячейки, W может быть оценена из соотношения

$$W(\theta) = \frac{\langle n_i n_j \rangle_\theta}{\langle n \rangle^2} - 1. \quad (20.5)$$

Угловые скобки с индексом θ означают усреднение по всем ячейкам i и j , центры которых разделены углами, входящими в интервал от $\theta - \Delta\theta/2$ до $\theta + \Delta\theta/2$, где значение $\Delta\theta \ll \theta$ выбрано с учетом удобства статистических подсчетов. Аналогичные способы оценки иногда используются, если выборка разбита на кольцевые зоны.

Очевидная нормировка $\langle n \rangle^2$ в выражении (20.5) не является ни единственной, ни наилучшей. Вместо нормировки на среднюю поверхностную плотность для всей выборки часто используются функции $\langle n_i \rangle \langle n_j \rangle$, представляющей собой нормировку только на часть выборки, по которой находится $W(\theta)$ именно для этого интервала расстояний. Альтернативной локальной норми-

ровкой может быть функция $\langle \frac{1}{2} (n_i + n_j) \rangle^2$ или любая другая осредненная

функция порядка n^2 . Таким образом, можно вводить некоторые (взвешенные) поправки для выборок, которым свойственна неоднородность, например из-за наличия поглощающей пыли или систематических ошибок подсчетов галактик на разных участках фотопластинок. Возможны более изощренные методы подсчета — путем разбиения выборки многими разными способами и последующего усреднения полученных значений $W(\theta)$ по всей совокупности.

При измерении $W(\theta)$ должны учитываться также граничные эффекты для конечной выборки (Kiang and Saslaw, 1969; Hewett, 1982). Наиболее надежный способ исключить граничные эффекты может состоять в том, чтобы рассматривать только те пары, члены которых отстоят от границы на расстояние, превышающее некоторое максимальное значение $\theta_{\max}$. К сожалению, остающаяся выборка обычно бывает так бедна, что сильно возрастает статистический шум: различные выборки с одинаковым законом распределения могут быть существенно разными. В качестве компромисса можно использовать только ячейки, удаленные от границы на расстояние, превышающее θ , при каждом значении величины θ . Таким образом, статистический шум уменьшается с уменьшением θ . Недостаток этого подхода состоит в том, что внесение поправок изменяет чувствительность метода к неоднородностям на разных масштабах. При третьем подходе можно перенормировать число пар галактик на число пар ячеек в пограничной области. Эта операция формально уменьшает статистический шум, так как считается, что информация, содержащаяся в пограничной области, ничем не отличается от полученной во внутренних областях.

Ясно, что ни один из рассмотренных выше подходов к определению $W(\theta)$

нельзя считать полностью удовлетворительным. Наилучший результат получается при наличии большой и неискаженной выборки без привнесенных извне неоднородностей. Не имея таких идеальных данных, все-таки можно оценить, насколько искажена выборка, которой мы располагаем (*Sharp*, 1979). Идея состоит в том, чтобы рассмотреть кросс-корреляцию этих данных с совокупностью точек, распределенных по закону Пуассона внутри такой же области. Кросс-корреляционная функция $W_{\text{тг}}(\theta)$ между точками и галактиками имеет вид

$$P_{\text{тг}}(\theta)d\Omega_1 d\Omega_2 = \langle n_{\text{т}} \rangle \langle n_{\text{г}} \rangle [1 + W_{\text{тг}}(\theta)] d\Omega_1 d\Omega_2, \quad (20.6)$$

аналогично (20.4). Теперь $P_{\text{тг}}$ — это совместная вероятность найти точку в области $d\Omega_1$, а галактику в $d\Omega_2$. Если эти два вида объектов распределены независимо, то $W_{\text{тг}} = 0 = W_{\text{гт}}$. Принимая в качестве центра каждую галактику и находя $W_{\text{гт}}(\theta)$ путем усреднения по всей выборке галактик, естественно ожидать, что $W_{\text{гт}}(\theta) = 0$, так как точки вокруг каждой галактики распределены хаотически независимо от того, как распределены сами галактики. Поэтому отклонения $W_{\text{гт}}(\theta)$ от нуля описывают возмущения, вводимые в $W(\theta)$ техникой анализа (формой ячеек, способом учета границ области). Точно так же, выбирая в качестве центра каждую точку и находя величину $W_{\text{тг}}(\theta)$ (для нее в общем случае нельзя ожидать равенства нулю, так как она является мерой неоднородности распределения галактик), мы можем оценить возмущения, которые обусловлены ячеистой структурой. Таким образом, составив поправочное соотношение

$$W_{\text{попр}}(\theta) = W(\theta) - W_{\text{тг}}(\theta) - W_{\text{гт}}(\theta), \quad (20.7)$$

можно сравнить результаты различных приемов анализа и привести их к соответствию.

Пространственная (трехмерная) двухточечная корреляционная функция для галактик больше связана с физикой сгущения галактик, но ее определить несколько труднее. Описанные выше неопределенности сочетаются с неопределенностями расстояний до галактик. В настоящее время создаются все более обширные и полные выборки галактик с измеренными красными смещениями, так что эта проблема представляется не особенно серьезной. Если недостает информации о красных смещениях, можно полагаться на расстояния, определенные по светимости галактик, как это делалось раньше при исследованиях корреляций галактик.

При построении пространственной двухточечной корреляционной функции обычно принимается упрощающее предположение о том, что она является изотропной и зависит только от относительного расстояния r между двумя галактиками. Приняв, что галактика находится в некоторой точке пространства, можно записать вероятность найти вторую галактику на расстоянии от r до $r + dr$ от нее как

$$P(r)dr = 4\pi \langle n(t) \rangle [1 + \xi(r)] r^2 dr. \quad (20.8)$$

Поскольку наблюдаемая Вселенная расширяется, средняя пространственная

плотность галактик $\langle n(t) \rangle$ изменяется. Уравнение (20.8) несколько проще, чем его аналог (20.4), потому что оно написано для условной, а не для совместной вероятности. Следует помнить, что предположение об изотропности и однородности, выражающее космологический принцип для малых масштабов, является лишь идеализацией, необходимой для упрощения анализа. Из-за этого предположения теряется много информации, содержащейся в реальном распределении или в более подробных моделях. Тем не менее функция $\xi(r)$ характеризует некоторые существенные свойства гравитационных систем.

Оценка $\xi(r)$, аналогичная (20.5), может быть сделана путем исследования отклонений плотности от ее среднего значения $\Delta n_1 = n(r_1) - \langle n \rangle$. Усредняя эти флуктуации по всем парам ячеек, напомним

$$\langle \Delta n_1 \Delta n_2 \rangle = \langle n \rangle \delta(r_1 - r_2) + \langle n \rangle^2 \xi(r), \quad (20.9)$$

где $r = |r_1 - r_2|$. Чтобы понять это соотношение, предположим сначала, что $r_1 = r_2$, $\xi = 0$, и проинтегрируем его по $dr_1 dr_2$. В результате получим $\langle (\Delta N)^2 \rangle = \langle N \rangle$, где $\langle N \rangle$ — среднее число галактик в ячейке. Это — флуктуации, пропорциональные «корню из N » в статистике Пуассона. Для $\xi \neq 0$ интеграл $\langle n \rangle^2 \int \xi(r) dr_1 dr_2$ равен средней корреляции $\langle \Delta n_1 \Delta n_2 \rangle$ между флуктуациями внутри двух областей, разделенных расстоянием r .

Подсчеты галактик анализировались много раз, начиная с работы Тоцуйи и Кихары (*Totsuji and Kihara*, 1969), где были получены оценки $\xi(r)$. Было найдено, что при малых расстояниях функцию ξ можно представить степенной зависимостью

$$\xi(r) = ar^{-\gamma}. \quad (20.10)$$

Если r измеряется в мегапарсеках, то этот результат выглядит так:

$$\xi(r) \approx 50 r_{\text{Mpc}}^{-1,8} \quad (20.11)$$

при $0,2 \leq r \leq 20$ Мпс. Это соотношение соответствует постоянной Хаббла $H = 50$ км/(с·Мпс). При других H амплитуда возрастает как $(50/H)^\gamma$, а пределы — как $(50/H)$. Результаты меняются от выборки к выборке, причем амплитуды заключены между 30 и 100 Мпс, а показатель степени — между 1,6 и 2,2. Эти различия возникают из-за разнообразия приемов отождествления и измерения, неодинаковой степени богатства и полноты выборок, использования разных функций светимости, а также из-за возможных физических различий между выборками. Некоторые из них ограничены определенным типом галактик, и наличие богатых скоплений может оказывать влияние на небольшие выборки. Тем не менее значение $\gamma \approx 2$, видимо, отражает фундаментальное свойство распределения галактик.

На малых расстояниях $\xi \gg 1$, и доминирует нелинейное сгущивание. Однородное случайное распределение отсутствует полностью. На больших расстояниях ξ перестает подчиняться степенному закону, но здесь уменьшается число пар, и из-за статистического шума трудно выделить детали поведения функции. К тому же при описании распределения на больших расстояниях стано-

вятся относительно более информативными корреляционные функции более высокого порядка. Их также трудно исследовать, но некоторые успехи все же есть (Peebles, 1980).

Хотя с помощью крупнейших телескопов можно легко определить положения мириадом галактик, наше представление о том, как они распределены в пространстве, находится в младенческом состоянии. Это одна из наиболее трудных проблем из области распознавания образов. Нам надо понять, например, как можно описывать длинные цепочки галактик объективно, количественно, не основываясь только на зрительном впечатлении. После этого можно было бы сравнить их структуру со структурами, динамически эволюционирующими из различных начальных состояний в принятых моделях мира, чтобы достичь понимания их возникновения.

21. ГРАВИТАЦИОННАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ БЕСКОНЕЧНОГО РАСШИРЯЮЩЕГОСЯ ГАЗА

Они [атомы] движутся в пустоте, и, догоняя друг друга, сталкиваются, и некоторые отскакивают в разные стороны, а другие запутываются среди себе подобных в разной степени в соответствии с симметрией формы, размерами, положением и порядком, и они остаются вместе, и потому совершается переход к бытию сложных вещей.

Симплициус

Какого типа структуры возникают вследствие неустойчивости однородных гравитационных систем? Этот фундаментальный вопрос можно сейчас рассмотреть, привлекая математический аппарат из первой части книги. Мы сравним выводы с результатами наблюдений, описанными в гл. 20, и увидим, что простые начальные условия позволяют объяснять основные свойства сгущивания галактик, но не процесс образования самих галактик.

Во множестве подробных расчетов, выполненных с середины 60-х годов на основе пионерских работ Лифшица (*Лифшиц*, 1946) и Боннора (*Bonnor*, 1957), исследовался рост локальных неустойчивостей газовой среды в расширяющихся космологических моделях. Рассчитывались взаимодействия между газом и излучением; при этом вскрывалась главным образом роль рассеяния на электронах в подавлении роста изотермических возмущений большой амплитуды до эпохи разъединения, а также подавление радиационной вязкостью малых адиабатических возмущений в процессе разъединения. С помощью этих расчетов рассматривались взаимодействия газа с массивными бесстолкновительными частицами, такими, как массивные нейтрино, и зародышами гравитационных неустойчивостей конечной амплитуды, такими, как черные дыры или другие плотные догалактические объекты. Расчеты касались температурных неустойчивостей в газе как в процессе разъединения, так и после вторичного разогрева в результате формирования первого поколения догалактических объек-

тов. Исследовалась первичная турбулентность как в газе, так и в поле излучения. Рассматривались неустойчивости, возникающие в результате квантовых флуктуаций и фазовых переходов элементарных частиц, когда Вселенная имела возраст всего лишь около 10^{-33} с. Все эти и другие исследования предпринимались в попытках понять процесс происхождения галактик. Однако до сих пор эти усилия не привели к какому-либо общепринятому объяснению этого процесса.

В этой главе содержится простой расчет, который преследует двоякую цель. Во-первых, он должен проиллюстрировать фундаментальную трудность, возникающую при объяснении формирования галактик из однородного газа. Во-вторых, — обобщить выводы, полученные в разд. 15.2, так, чтобы можно было сравнить их с поведением неустойчивостей в фрагментированных системах, описывающих сгущение галактик.

В разд. 15.2 показано, что возмущения с длиной волны, превышающей джинсовскую [см. выражение (15.11)], в стационарном однородном газе имеют экспоненциально растущую амплитуду. Если бы это было все, что требуется, формирование галактик происходило бы с легкостью. Тогда первоначальные флуктуации порядка $\sqrt{N}$ (которые вызывают первоначальные возмущения с амплитудой $\delta\rho_0/\rho_0 \approx 10^{-34}$ в среде из $\sim 10^{68}$ атомов, образующих галактику) должны становиться существенно нелинейными по истечении интервала, примерно в 100 раз превышающего характерное время*. Их рост может начинаться после истечения времени, составляющего примерно 1% современного возраста Вселенной. Существенный недостаток этой аргументации состоит в том, что в ней не учитывается расширение Вселенной.

Чтобы увидеть, как расширение противодействует гравитационной неустойчивости, рассмотрим условия, возникающие после разъединения, которые в других отношениях весьма способствуют неустойчивости. Возмущения не связаны с полем излучения, так как радиационное торможение пренебрежимо мало. Более того, их масштабы много меньше размера Вселенной ($\sim ct$), свойственные им скорости малы ($v \ll c$), а гравитационная энергия меньше массы покоя $GM/(Rc^2) \ll 1$. В этих условиях можно применить теорию Ньютона и непосредственно воспользоваться уравнениями (15.2)—(15.4) и (15.9). Возмущения плотности и давления записываются в безразмерном виде

$$\rho = \rho_0(t)[1 + \rho_1(\mathbf{r}, t)], \quad (21.1)$$

$$P = P_0(t)[1 + P_1(\mathbf{r}, t)], \quad (21.2)$$

$$\phi = \phi_0(t) + \phi_1(\mathbf{r}, t), \quad (21.3)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{r}H(t) + \mathbf{v}_1(\mathbf{r}, t), \quad (21.4)$$

чтобы нормировать изменения их невозмущенных значений. Отметим существенную разницу между выражением (21.4) и (15.8): теперь учтено расширение

* Т. е. время t_0 в выражении для скорости роста возмущения $\delta\rho/\rho \sim e^{t/t_0}$; $t_0 \approx 1/\sqrt{G\rho_0}$, ρ — плотность среды. — Прим. ред.

газа. Величина $H(t) = \dot{R}/R$ является параметром Хаббла, где $R(t)$ — шкала расстояний во Вселенной. Полностью релятивистские вселенные совместимы с ненулевыми значениями величин нулевого порядка, и для них получаются те же результаты, что и в ньютоновском приближении для основных возмущений, которые мы здесь исследуем.

Линеаризуя уравнения сохранения импульса и массы, а также гравитационного потенциала (15.2)—(15.4) путем подстановки выражений (21.1)—(21.4) и оставляя только члены первого порядка малости, получаем:

$$\frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} + H \left(\mathbf{v}_1 + r \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial r} \right) = \nabla \phi_1 - \frac{\gamma P_0}{\rho_0} \nabla \rho_1, \quad (21.5)$$

так как выражение (15.9) имеет вид $P_1 = \gamma \rho_1$ при переходе к безразмерным величинам первого порядка малости;

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{v}_1 + H r \frac{\partial \rho_1}{\partial r} = 0 \quad (21.6)$$

с учетом уравнения (15.2), примененного к членам нулевого порядка, и

$$\nabla^2 \phi_1 = -4\pi G \rho_0 \rho_1, \quad (21.7)$$

что можно проверить. Далее, возьмем дивергенцию от уравнения (21.5) и исключим ϕ_1 и $\mathbf{v}_1$ подстановкой соотношений (21.6), (21.7) и векторного тождества

$$\nabla \cdot \left(r \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial r} \right) = r \frac{\partial}{\partial r} (\nabla \cdot \mathbf{v}_1) + \nabla \cdot \mathbf{v}_1. \quad (21.8)$$

В результате получим уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + 2H + H r \frac{\partial}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + H r \frac{\partial \rho_1}{\partial r} \right) = 4\pi G \rho_0 \rho_1 + \frac{\gamma P_0}{\rho_0} \nabla^2 \rho_1, \quad (21.9)$$

которое описывает эволюцию относительного возмущения плотности $\rho_1(\mathbf{r}, t)$.

Эта эволюция частично обусловлена общим расширением, а частично — неустойчивостью. Разделение этих двух эффектов становится возможным, если перейти в систему координат, участвующих в общем расширении. Расстояния $\mathbf{x}$ в таких сопутствующих координатах есть не что иное, как расстояния в стационарной системе отсчета, нормированные на масштаб расширения:

$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{r}}{R(t)}. \quad (21.10)$$

Таким образом, если рост расстояния в исходной стационарной системе отсчета происходит только благодаря общему расширению, то это расстояние не будет возрастать в сопутствующей системе. Поскольку в ней измеряются только остаточные изменения расстояния, следует ожидать, что уравнение эволюции (21.9) в такой системе упростится и примет вид

$$\frac{\partial^2 \rho_1(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} + 2 \frac{\dot{R}}{R} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} = 4\pi G \rho_0 \rho_1 + \frac{\gamma P_0}{\rho_0 R^2} \nabla^2 \rho_1(\mathbf{x}, t). \quad (21.11)$$

Величина ρ_1 в уравнении (21.11) есть функция $\mathbf{x}$, и ее эволюцию можно описать уравнениями (21.9) и (21.10), помня, что

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_r = \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_x + \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \right)_r \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right)_t = \frac{\partial}{\partial t} - \mathbf{x} \frac{\dot{R}}{R} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}. \quad (21.12)$$

Сравнение с соотношением (15.10) показывает, что эффекты расширения должны уменьшать вклад пространственных градиентов в рост ρ_1 и тормозить рост посредством множителя $\partial \rho_1 / \partial t$. Этот второй эффект обусловлен импульсом, который расширяющееся вещество уносит от возмущений.*

После проверки становится ясно, что в отличие от (15.10) уравнение (21.11) не имеет экспоненциально возрастающего частного решения, похожего на решение (15.16). Таким образом, сразу видно, что расширение нарушает простой экспоненциальный рост возмущений. Чтобы пойти дальше, можно выполнить фурье-анализ выражения (21.11) в сопутствующей системе отсчета, где все длины волн $\lambda = 2\pi R/k$ увеличиваются по мере расширения Вселенной. Затем, написав

$$\rho_1(\mathbf{x}, t) = \rho_1(t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}, \quad (21.13)$$

мы имеем

$$\frac{d^2 \rho_1(t)}{dt^2} + 2 \frac{\dot{R}}{R} \frac{d\rho_1}{dt} = \left(4\pi G \rho_0 - \frac{4\pi^2 \gamma P_0}{\rho_0 \lambda^2} \right) \rho_1. \quad (21.14)$$

Рассмотрим первоначальное возмущение $\rho_1(t_1) > 0$, которое начинает возрастать в момент t_1 , так что $\dot{\rho}_1(t_1) > 0$. Чтобы такое возмущение перестало расти, оно должно достичь максимального значения, когда $\dot{\rho}_1 = 0$ и $\ddot{\rho}_1 < 0$. Но тогда правая часть уравнения (21.14) должна стать меньше нуля, что никогда не произойдет, если

$$\lambda^2 > \frac{\pi}{G \rho_0} \frac{\gamma P_0}{\rho_0}. \quad (21.15)$$

Поэтому длинноволновые возмущения, удовлетворяющие условию (21.15), все время возрастают по амплитуде. Так как второй множитель в правой части есть квадрат скорости звука в невозмущенном газе, уравнение (21.15) представляет собой не что иное, как джинсовский критерий (15.11) в сопутствующей системе координат. В любой момент времени t критическая длина волны в «лабораторной» системе отсчета соотносится со своим первоначальным значением как $\lambda_c(t) = \lambda_c(t_1) R(t)/R(t_1)$. Возмущения с короткими длинами волн осциллируют, и их амплитуды уменьшаются. Расширение не изменяет основного критерия неустойчивости.

Чтобы обособить влияние расширения на скорость роста возмущений, рассмотрим возмущения с очень большой длиной волны, которые почти полностью свободны от эффектов давления. Согласно первым трем членам уравне-

ния (21.14), эти возмущения сжимаются наиболее легко. Затем нам нужно определить скорость расширения и его влияние на среднюю плотность $\rho_0(t)$. Предположим, что задано общее расширение и можно использовать простые соотношения

$$R \propto t^m, \rho_0 \propto t^{-q}, \quad (21.16)$$

где m и q — положительные и не обязательно целые числа. Некоторые модели общей теории относительности основаны на частных случаях соотношений (21.16), и все изотропные релятивистские модели могут быть представлены этими соотношениями на коротких интервалах своей эволюции. Однако мы не ограничены исключительно моделями общей теории относительности, но можем изучать расширяющуюся Вселенную в самом общем виде. Поскольку нет конкретного доказательства того, что уравнения общей теории относительности для сильных полей действительно применимы к нашей Вселенной (хотя нет и никакой лучшей теории), самый общий характер соотношений (21.16) может быть полезным. Рассмотрим вкратце, какие ограничения налагает общая теория относительности. В космологических моделях, которые постулируют сохранение массы, величины q и m связаны между собой. Если Вселенная заполнена пылью (это название для газа без давления, оно не обязательно означает межзвездную или бытовую пыль), то $\rho_0 \propto R^{-3}$ и $q = 3m$. В эпохи, когда доминирует излучение (которые здесь не рассматриваются), $\rho_0 \propto R^{-4}$ и $q = 4m$.

В момент t_1 , в качестве которого может быть выбрано время, когда вещество отделяется от излучения, возмущения начинают расти. На основе уравнения (21.14) и предыдущих рассуждений о джинсовской неустойчивости получается естественный масштаб такого роста:

$$\tau_1 = [4\pi G \rho(t_1)]^{-1/2}. \quad (21.17)$$

Определим важную константу, которая характеризует расширение, следующим выражением:

$$f^2 \equiv 4\pi G \rho(t_1) t_1^2 = t_1^2 / \tau_1^2. \quad (21.18)$$

Величина f измеряет расхождение между возрастом Вселенной и ее мгновенной гравитационной шкалой времени. Она определяется деталями космологической модели. Далеко прозволюционировавшие модели с высокой плотностью имеют большие значения f .

После введения этих соотношений уравнение роста амплитуд возмущений (21.14) принимает вид

$$t_*^q \frac{d^2 \rho_1}{dt_*^2} + 2m t_*^{q-1} \frac{d \rho_1}{dt_*} - f^2 \rho_1 = 0, \quad (21.19)$$

где безразмерное время $t_* = t/t_1$. Когда $q = m = 0$, мы снова получаем экспоненциальный рост на стационарном фоне. Точные решения могут быть получены для некоторых значений q , m и f . Для $q = 2$ уравнение (21.19) имеет линейную форму Коши и его решения таковы (Saslaw, 1972):

$$\rho_1 = c_1 t_*^{r_1} + c_2 t_*^{r_2}, \quad r_1 \neq r_2, \quad (21.20)$$

или

$$\rho_1 = t_*^r (c_1 + c_2 \ln t_*), \quad r_1 = r_2 = r, \quad (21.21)$$

или

$$\rho_1 = t_*^a [c_1 \cos(b \ln t_*) + c_2 \sin(b \ln t_*)], \quad r_{1,2} = a \pm ib, \quad (21.22)$$

где

$$r_{1,2} = \frac{1-2m}{2} \pm (m^2 - m + f^2 + \frac{1}{4})^{1/2}. \quad (21.23)$$

Одним из первых был изучен самым детальным образом частный случай для $q = 2$, $m = 2/3$, $f^2 = 2/3$. Он соответствует Вселенной Эйнштейна — де Ситтера, и из него также можно получить начальную скорость расширения от сингулярности в некоторых других изотропных фридмановских моделях. В этом случае $r_{1,2} = +2/3, -1$. Поскольку $\rho_1 \rightarrow 0$ при $t_* \rightarrow 0$, константа $c_2 = 0$,

что дает $\rho_1 \propto t_*^{2/3} \propto R(t)$. Таким образом, фактор роста около 10^3 характеризует современные линейные возмущения, которые начали расти в эпоху разъединения, когда $z \approx R_{\text{сейчас}}/R(t_1) \approx 10^3$. Флуктуации $\rho_1 \approx 10^{-34}$, упомянутые в начале этой главы, не должны сказываться в настоящее время. Только возмущения порядка 0,1%, существовавшие в момент разъединения, согласно этой модели, могут быть нелинейными в настоящее время. Мы знаем, что так нужно, но почему эти крупные неоднородности должны были присутствовать при $z \approx 10^3$? Это парадокс теории образования галактик.

Чтобы получить решение для значений $q \neq 2$, мы делаем комплексные преобразования

$$z = \frac{2if}{2-q} t_*^{(2-q)/2}, \quad (21.24)$$

$$\rho_1 = z^{(1-2m)/(2-q)} \chi(z) \quad (21.25)$$

и обнаруживаем, что в случае (21.19) замаскировано уравнение Бесселя. Теперь оно имеет общее решение

$$\rho_1(t_*) = t_*^{(1-2m)/2} \text{Re}[c_1 J_{(1-2m)/(2-q)}(z) + c_2 Y_{(1-2m)/(2-q)}(z)], \quad (21.26)$$

где использована вещественная часть комплексных функций Бесселя первого и второго рода (*Abramowitz and Stegun*, 1964). Начальные условия определяют комплексные константы c_1 и c_2 . Ситуация благоприятна для роста, когда фон расширяется медленно, как в случае $m < 1/2$, $q < 2$. (В случае $m > 1/2$, $q < 2$ требуется, чтобы на границах величина ρ_1 была конечной при $t_* = 0$ и убывала при $t_* \rightarrow \infty$). Если мы требуем, чтобы $\rho_1 \rightarrow 0$ при $t_* \rightarrow 0$, и полагаем $\rho_1(t_* = 1) = \rho_1(1)$, то $c_2 = 0$. Случай без расширения получается из равномерного асимптотического разложения функции Бесселя при больших мнимых значениях z , где снова ясно виден экспоненциальный рост плотности.

Однако значение $q = 2$ связано с другим интересным свойством. Выполним преобразование

$$v \equiv \rho_1 t_*^m \quad (21.27)$$

и написав

$$f_{\text{сейчас}}^2 = 4\pi G \rho_{\text{сейчас}} t_{\text{сейчас}}^2, \quad (21.28)$$

получаем уравнение (21.19) в форме

$$\frac{d^2 v}{dt^2} = \left[f_{\text{сейчас}}^2 \left(\frac{t}{t_{\text{сейчас}}} \right)^{2-q} - m(1-m) \right] \frac{v}{t^2}. \quad (21.29)$$

Для данного значения m амплитуда возмущения увеличивается быстрее всего при $q = 2$; в этих случаях условие $q \leq 2$ благоприятствует росту длинноволновых членов. В этом смысле $q = 2$ дает наиболее быстрый рост возмущений в расширяющихся моделях.

Предположим в качестве простого примера, что Вселенная такова, что $f_{\text{сейчас}}^2 \gg |m^2 - m + 1/4|$ и $|m - 1/2| \ll 1$, чтобы увидеть, как несовпадение временного масштаба, представленное величиной $f_{\text{сейчас}}$, влияет на скорость роста. Тогда возрастающее решение (21.20), (21.23) есть

$$\rho_1(t_* \text{сейчас}) = \rho_1(1)(t_* \text{сейчас}) f_{\text{сейчас}} \quad (21.30)$$

Значения $\rho_{\text{сейчас}} = 2 \cdot 10^{-29}$ г/см³ и $t_{\text{сейчас}} = 5 \cdot 10^{17}$ с дают $f_{\text{сейчас}} = 2,0$. Таким образом, если $t_{\text{сейчас}}$ равно 10^4 — 10^5 , то современный фактор роста равен примерно 10^9 и до сих пор слишком мал, чтобы из статистических флуктуаций образовались галактики. Однако, если бы значение $f_{\text{сейчас}}$ было раза в четыре больше, статистические флуктуации могли бы дать начало галактикам. Сказанное может означать, что либо значение $\rho_{\text{сейчас}}$ должно быть на порядок больше, чем максимальное из значений, принятых для настоящего времени, либо возраст Вселенной должен быть примерно в четыре раза больше, чем сейчас считается, или же они могут иметь меньшие значения, такие, что

бы произведение $(\rho_{\text{сейчас}} \cdot t_{\text{сейчас}}^2)^{1/2}$ было вчетверо больше общепринятых на сегодняшний день оценок. Это большее значение, видимо, не противоречит прямо каким-либо наблюдениям. Самые старые звезды дают только нижний предел возраста Вселенной. Интерпретируемая как «возраст» Вселенной величина, обратная постоянной Хаббла, зависит от конкретной космологической модели. Что касается плотности, то Вселенная может содержать большое количество несветящейся материи, подобной гравитационным волнам, массивным нейтрино или другим видам не известных нам сейчас элементарных частиц.

Потенциальной ловушкой в этих соображениях может быть то, что значения $f_{\text{сейчас}}$ не согласуются с однородными моделями общей теории относительности. Многие астрономы полагают, что эти модели описывают глобальные свойства нашей Вселенной, хотя прямые доказательства этого отсутствуют. Широкий класс таких моделей расширяется согласно уравнению (Ellis and

MacCallum, 1969; см. также многие другие пособия по космологии)

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \frac{1}{3}\Lambda + \frac{8}{3}\pi G\rho - \frac{3c^2 k}{R^2} + \frac{a^2}{R^6}, \quad (21.31)$$

где Λ — космологическая постоянная, ρ — полная плотность энергии (включая энергию излучения), k — кривизна (значения $k = 1; 0; -1$ соответствуют закрытой, плоской и открытой вселенным) и a — мера анизотропии. Если $a \neq 0$, R есть среднее геометрическое скалярных радиусов кривизны вдоль главных осей анизотропии. Эффекты анизотропии должны быстро уменьшаться с расширением. Если в правой части доминирует член $8\pi G\rho/3$, а какой-либо другой член, то q будет существенно отличаться от 2 и флуктуации порядка $\sqrt{N}$ не должны, как правило, сильно возрасть. Период быстрого роста был бы возможен, если бы комбинация членов моделировала эволюцию при $q \approx m \approx 0$ или при $q \approx 2$ в течение какого-то времени. Это случается в некоторых разновидностях моделей Леметра, где отрицательная величина Λ соответствует космическому отталкиванию, которое лишь уравнивает гравитационное притяжение. Однако такое равновесие должно быть точно сбалансировано, и обычно оно оказывается неустойчивым по отношению к изменениям уравнения состояния, возникающим благодаря излучению сжимающихся возмущенных областей. Вследствие этого излучения расширение в моделях Леметра ускоряется, что затрудняет дальнейшее сжатие неоднородностей.

С другой стороны, если доминирует член $8\pi G\rho/3$, мы должны положить $q \approx 2$. Однако, как легко убедиться на основании уравнения (21.28), в этом случае получается, что $f_{\text{сейчас}} \approx 0,6$. В частности, во Вселенной Эйнштейна — де Ситтера, которая как раз является закрытой, $\Lambda = k = a = 0$ и $\rho_0 \propto R^{-3} \propto t^{-2}$, что дает $f_{\text{сейчас}} = 2/3$. Возмущения растут медленно. Малые значения f получаются потому, что время расширения от сингулярности приблизительно равно величине, обратной постоянной Хаббла в общерелятивистской модели, эволюция которой определяется плотностью энергии. Существует небольшое несоответствие между этим возрастом и временем гравитационной релаксации модели.

Современное понимание процесса формирования галактик находится в совершенно неудовлетворительном, даже парадоксальном состоянии. Существующие теории, даже самые изощренные, не позволяют заметно сдвинуться с исходных позиций. Их нельзя подвергнуть строгой проверке, и ни одна не получила до сих пор общего признания. Напротив, если бы галактики не существовали, их отсутствие можно было бы легко объяснить.

22. ГРАВИТАЦИОННАЯ ФРАГМЕНТАЦИЯ ПРИВОДИТ К СГУЩИВАНИЮ

Разрозненные атомы спешат
Один к другому, чтобы вместе слиться,
И за частицей тянется частица.

Александр Поуп

Параллельно со сравнительным анализом, приведенным в гл. 15 и 16, обратимся к новым явлениям, которые привносятся фрагментацией в процесс роста возмущений. Основной вывод этой теории состоит в том, что фрагментированные сгустки являются галактиками. Несмотря на то что здесь не рассматривается процесс формирования галактик, можно поставить вопрос о том, каким образом гравитация вызывает их сгущивание. Объясняет ли ожидаемое сгущивание то, что мы видим?

Простейший результат может быть предсказан уже на основе наших рассуждений в предыдущей главе. Рассмотрим газ, состоящий из галактик. Пусть он будет распределен однородно, за исключением флуктуаций порядка $\sqrt{N}$. Если обращаться с ним временно как с жидкостью, то скорость роста возмущений в стандартной космологии, $\rho_1(t) \propto R(t) \propto t^{2/3}$, показывает, что наблюдаемые скопления, содержащие $\sim 10^4$ галактик, могут легко возникнуть, причем процесс начинается при красных смещениях $\sim 10^2 - 10^3$. Таким образом, процесс сгущивания галактик представляется более понятным, чем образование галактик, хотя и здесь остаются свои неясности.

Принимая во внимание относительную легкость сгущивания галактик, естественно рассмотреть предыдущую ступень этого процесса. Могут ли сами галактики быть результатом более раннего сгущивания? Предположим, что изотермические возмущения, имеющие джинсовскую массу $\sim 10^6 M_\odot$ при разъединении, возникли (каким-либо образом), имея большие амплитуды, и образовали связанные системы. Надо взять около 10^4 таких объектов, чтобы сформировалась небольшая галактика. Без каких-либо остаточных возмущений большого масштаба (которые должны усиливать сгущивание) требовался бы фактор расширения $\sim 10^2$ к моменту $z \approx 10$, чтобы сформировать галактики. При этом остается время, почти достаточное для того, чтобы галактики образовали много мелких скоплений. Несколько больших скоплений могут сформироваться вокруг исключительно больших статистических флуктуаций. Оценки по порядку величины подтверждают состоятельность этого предположения. В сочетании с тем фактом, что гравитационное сгущивание является неизбежным независимо от других событий, мы приходим к выводу, что необходимо изучить этот процесс более подробно.

Поскольку описание жидкости (газа) включает усреднение по масштабам, значительно превышающим расстояние между частицами, оно не содержит информации о сгущивании на меньших масштабах. Чтобы выделить такую «микроскопическую» информацию о корреляции галактик, следует вернуться к

уравнениям для траекторий. Они представлены в компактном виде уравнениями Лиувилля (10.38).

Двухточечная корреляционная функция заключена в уравнениях Лиувилля. Чтобы получить эту функцию, необходимо сначала определить ее в терминах функции распределения. Напомним, что, согласно соотношению (11.3), функция распределения $f^{(n)} dV^{(n)}$ есть совместная вероятность найти какие-либо n галактик в дифференциальном элементе объема $dV^{(n)}$ фазового пространства координат и скоростей. Одночастичная функция распределения $f^{(1)}$, усредненная по объему, содержащему много галактик, есть плотность жидкости. Поскольку здесь мы не берем среднее, эта функция играет роль плотности вероятности в объеме любого размера. Форма записи уравнения (20.6) предполагает, что определена последовательность распределений по объемам, в которой каждая совместная вероятность соотносится с совместными вероятностями более низкого порядка согласно выражениям

$$f^{(1)}(1) \equiv f(1), \quad (22.1)$$

$$f^{(2)}(1, 2) \equiv f(1)f(2)[1 + g(1, 2)], \quad (22.2)$$

$$f^{(3)}(1, 2, 3) \equiv f(1)f(2)f(3)[1 + g(1, 2) + g(2, 3) + g(3, 1) + h(1, 2, 3)], \quad (22.3)$$

и т. д.

Уравнение (22.2) немного отличается от уравнения (10.29), но $g(1, 2)$ в конце концов сводится прямо к $\xi(r)$ в обычном обозначении. Нормировки здесь те же, что и в соотношениях (11.1) и (11.2). Ограничения на размерность корреляционных функций пока отсутствуют.

В первую очередь следует разработать теории, которые должны описывать простейшие условия, отражающие физическую суть проблемы. Будем считать поэтому, что распределение галактик сначала однородно, на что указывает высокая степень изотропии микроволнового фона. Тогда одночастичная функция распределения не зависит от координат. Сгущивание может начаться с одинаковой вероятностью где угодно. «Макроскопически» система остается однородной, и ее первоначальное сгущивание описывается корреляционными функциями более высокого порядка. Сначала эти корреляции высокого порядка равны нулю. Такая космологическая ситуация противоположна случаю неравновесной плазмы, где корреляции начинаются с больших величин и уменьшаются по мере того, как плазма релаксирует и приходит к однородному максвелловскому распределению. Космические корреляции возникают из ничего, проходят через стадию линейного режима, затем вырастают в большие возмущения плотности. После того как система становится нелинейной, нельзя ожидать сохранения однородности с $f^{(1)}(1) = f^{(1)}(2)$. Попытаемся выяснить, что происходит в линейном режиме, и за какое время система проходит эту стадию.

Эволюция функций распределения описывается цепочкой иерархических уравнений ББГКИ (11.4). Чтобы найти двухточечную корреляционную функцию с однородными начальными условиями, достаточно рассмотреть только

первые два уравнения. Если подставить соотношения (22.1)–(22.3) в (11.4) и перегруппировать члены, то первые два уравнения принимают вид

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_1 \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_1} - \frac{\partial \Phi(1)}{\partial \mathbf{x}_1} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_1} \right] f(1) = \mathcal{J}(1), \quad (22.4)$$

$$\begin{aligned} f(1)f(2) \left[\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^2 \left(\mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i} - \frac{\partial \Phi(i)}{\partial \mathbf{x}_i} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_i} \right) \right] g(1,2) \\ = \sum_{i \neq j}^2 [\mathcal{J}(i, j) + \mathcal{K}(i, j)]. \end{aligned} \quad (22.5)$$

Уравнение (22.4), использованное при выводе (22.5), содержит следующие сокращения:

$$\Phi(i) \equiv \int f(3) \phi(i, 3) d\mathbf{x}_3 d\mathbf{v}_3, \quad (22.6)$$

$$\mathcal{J}(i) \equiv \int f(3) \frac{\partial \phi(i, 3)}{\partial \mathbf{x}_i} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_i} [f(i) g(i, 3)] d\mathbf{x}_3 d\mathbf{v}_3, \quad (22.7)$$

$$\mathcal{J}(i, j) \equiv \left[f(j) \frac{\partial f(i)}{\partial \mathbf{v}_i} + f(i) f(j) \frac{\partial g(i, j)}{\partial \mathbf{v}_i} + g(i, j) f(j) \frac{\partial f(i)}{\partial \mathbf{v}_i} \right] \cdot \frac{\partial \phi(i, j)}{\partial \mathbf{x}_i}, \quad (22.8)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(i, j) \equiv f(i) \int f(3) \left\{ g(i, 3) \frac{\partial f(j)}{\partial \mathbf{v}_j} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_j} [f(j) h(i, j, 3)] \right. \\ \left. - g(i, j) \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_j} [f(j) g(j, 3)] \right\} \cdot \frac{\partial \phi(j, 3)}{\partial \mathbf{x}_j} d\mathbf{x}_3 d\mathbf{v}_3. \end{aligned} \quad (22.9)$$

Для вывода этих соотношений нужны две страницы простых алгебраических выкладок, которые можно сделать в качестве полезного упражнения.

Члены уравнений ББГКИ разделены в соответствии с их важностью для понимания физического смысла. В левой части уравнения (22.4) стоят знакомая нам конвективная производная по времени (в сопутствующей системе) и средняя сила, обусловленная гравитационным полем, которая ускоряет галактики. Это почти совпадает с бесстолкновительным уравнением Больцмана из гл. 7. Справа стоит аналог «интеграла столкновений», который связывает изменения скорости уединенного тела и распределения плотности с изменениями двухточечных корреляций. В левой части уравнения (22.5) стоит полная производная от двухточечной корреляционной функции. Она просуммирована по индексам $i = 1, 2$, поскольку изменения происходят в двух местах фазового пространства. Справа находятся члены с источниками двух типов. Члены, входящие в $\mathcal{J}$, описывают функции распределения, корреляции и гравитационные силы в каждой точке. Они представляют локальные неоднородности в систе-

ме, возникшие благодаря дискретной природе массивных частиц, и их часто называют «членами фрагментации». Члены, входящие в $\mathcal{K}$, интегрируются по всей системе и представляют собой глобальные неоднородности в корреляции частиц. Они известны как «члены самоиндукции», поскольку описывают обратную реакцию усредненной корреляции на собственный рост в определенном месте. Второй член самоиндукции связан также с трехточечной корреляционной функцией.

Нетрудно показать, почему члены фрагментации не появляются в континуальном приближении (это приближение иногда называется «предельным случаем жидкости», но его не следует путать с определением моментов бесстолкновительного уравнения Больцмана с целью получить уравнения для жидкости). В континуальном пределе масса каждой частицы $m \rightarrow 0$, а общее число частиц $N \rightarrow \infty$ таким образом, что общая масса mN остается конечной. (Аналогичное предположение, часто используемое при рассмотрении плазмы, состоит в том, что полный объем $V \rightarrow \infty$ так, что плотность N/V остается конечной.) Переходя к континуальному пределу, мы видим, что $\phi(i, j) \rightarrow 0$, и, поскольку функции распределения остаются конечными нормированными величинами, члены фрагментации, представленные $\mathcal{J}$, исчезают. Однако члены самоиндукции, входящие в $\mathcal{K}$, из-за наличия интеграла оказываются в N раз больше и остаются конечными в континуальном пределе. Это те члены, которые должны описывать обобщение анализа джинсовских возмущений газа, учитывающее корреляции возмущений.

Когда корреляции не возникают, $\mathcal{K}$ и все члены, входящие в $\mathcal{J}$, кроме первого, исчезают. Оставшийся член очень интересен. Он выражает фрагментацию одночастичной функции распределения и обуславливает спонтанный рост двухчастичных корреляций. Никаких первоначальных возмущений (даже бесконечно малых) не нужно, чтобы вызвать неустойчивость. Зародыши сгущивания галактик содержатся в дискретной природе самих галактик.

Как только величина g начинает расти, ее фрагментация также поддерживает рост корреляций посредством второго и третьего членов, входящих в $\mathcal{J}$. Однако к тому времени члены из $\mathcal{K}$ будут вносить еще больший вклад. Это происходит потому, что интеграл из выражения для $\mathcal{K}$ эффективно распространяется на всю систему, вследствие чего члены самоиндукции вносят примерно в N раз больший вклад, чем члены фрагментации. Таким образом, последние два члена в $\mathcal{J}$ незначительны.

К тому времени как большинство галактик объединится в скопления, становятся существенными корреляции более высокого порядка. Однако на ранних стадиях членами самоиндукции, включающими h , можно пренебречь по сравнению с другими, так как сначала h растет медленнее, чем g . Математическая причина состоит в том, что члены с источниками из третьего уравнения цепочки исчезают в отсутствие корреляций, и, таким образом, h не может расти, пока растет g . Физически же это происходит потому, что потенциал взаимодействия двух частиц в тройных корреляциях формируется скорее вследствие корреляции пары закоррелированных галактик с третьей, свободной, чем из-за одновременной корреляции трех первоначально независимых

галактик. Третий член в $\mathcal{K}$ также мал по сравнению с первым в начале сгущения, как квадратичный по g .

Таким образом, у нас остается первый член из $\mathcal{J}$ и первый член из $\mathcal{K}$. Вводя определение

$$\Psi(i, j) \equiv \int f(3)g(i, 3)\phi(j, 3)dx_3dv_3, \quad (22.10)$$

первый член из $\mathcal{K}(i, j)$ можно записать как

$$f(i) \frac{\partial f(j)}{\partial v_j} \cdot \frac{\partial \Psi(i, j)}{\partial x_j}. \quad (22.11)$$

Сравнение с первым членом из $\mathcal{J}(i, j)$ показывает, что достаточное условие преобладания члена фрагментации имеет вид

$$|\Psi(1, 2)| < |\phi(1, 2)| \quad (22.12)$$

для всех x_1 и x_2 . В гл. 23 исследуются этот режим и его продолжительность.

Первоначально интеграл столкновений $\mathcal{J}$ из уравнения Больцмана (22.4) равен нулю, и система является полностью бесстолкновительной. Сравнение $\mathcal{J}$ с первым членом из $\mathcal{K}$ показывает, что система остается приблизительно бесстолкновительной, пока сохраняется условие (22.12). Поэтому ранняя стадия эволюции незакоррелированной системы описывается уравнениями

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + v_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial \Phi(1)}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial}{\partial v_1} \right] f(1) = 0, \quad (22.13)$$

$$f(1)f(2) \left[\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^2 \left(v_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial \Phi(i)}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial}{\partial v_i} \right) \right] g(1, 2) = \sum_{i \neq j}^2 f(i) \frac{f(j)}{\partial v_j} \cdot \frac{\partial \phi(i, j)}{\partial x_i}. \quad (22.14)$$

Это — основной результат. Используя аппарат, разработанный в гл. 4, мы сможем найти точное решение для $g(1, 2)$. Это будет ответом на наш вопрос: какое время потребуются корреляциям, чтобы стать значительными, и как они будут выглядеть?

23. РОСТ ДВУХТОЧЕЧНОЙ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИИ

Вдвоем быть лучше, чем одному,
Ибо есть им плата добрая за труды их.

Экклезиаст

Из любой точки однородной изотропной Вселенной картина расширения должна выглядеть одинаково. Это расширение, о котором уже говорилось в гл. 21, имеет вид $H(t)x$, где $H = \dot{R}/R$ для случая, когда система координат выбрана так, что ее начало совпадает с точкой, имеющей нулевую систематическую скорость.

Для обоснования этого утверждения представим, что в точке O находится «опорный наблюдатель», движущийся вместе со средним потоком расширения. Взглянув в момент времени t на произвольную точку P , расположенную на векторе $\mathbf{x} = OP$, наблюдатель видит, что эта точка движется относительно него со скоростью $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$. Другой опорный наблюдатель в точке O' движется вместе с потоком и имеет относительно первого наблюдателя скорость $\mathbf{v}(\mathbf{s}, t)$, где $\mathbf{s} = OO'$. (Читатель может посчитать полезным для себя начертить диаграмму.) Он измеряет скорость той же точки P , имеющей в его системе координату $\mathbf{x}' = \mathbf{x} - \mathbf{s}$, и находит, что она равна $\mathbf{v}'(\mathbf{x}', t) = \mathbf{v}(\mathbf{x} - \mathbf{s}, t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{v}(\mathbf{s}, t)$. Теперь, поскольку Вселенная однородна и изотропна, $\mathbf{v}'$ должна выражаться такой же функцией от x' и t , как и $\mathbf{v}$ от $\mathbf{x}$ и t . Поэтому $\mathbf{v}(\mathbf{x} - \mathbf{s}, t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{v}(\mathbf{s}, t)$. Можно проверить, что решение этого функционального уравнения дает линейную зависимость скорости от положения, и поэтому ее можно записать в виде $\mathbf{v} = f(t)\mathbf{x} = \dot{\mathbf{x}}$. Запись $\mathbf{x} = R(t)\mathbf{x}_0$ показывает, что $f(t) = \dot{R}/R$. Таким образом, расширение или сжатие системы однородно. Напоминаем, что эти рассуждения применимы только к областям, которые свет пересекает за время, малое по сравнению с $H^{-1} = \dot{R}/R$. Такие выводы в рамках ньютоновской физики полностью справедливы на масштабах, где существует корреляция между положениями галактик.

Детали выражения для $H(t)$, как и в формуле (21.31), определяются свойствами космологической модели и моментом начала скучивания. Каков бы ни был вид $H(t)$, вследствие закона сохранения импульса всегда удовлетворяется соотношение

$$\frac{d}{dt}(Hx_i) + \frac{\partial \Phi(i)}{\partial x_i} = 0, \quad (23.1)$$

где

$$\frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + Hx_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (23.2)$$

есть обычная коинвариантная производная.

Функции распределения и корреляционные функции проще будет рассматривать в зависимости от peculiarных скоростей

$$u_i = v_i - H(t)x_i, \quad (23.3)$$

которые получаются после вычитания фоновой скорости расширения. При такой замене переменных с помощью соотношения (23.1) можно исключить средний потенциал Φ из уравнений (22.13) и (22.14), которые в результате принимают вид

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + (u_1 + Hx_1) \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} - Hu_1 \cdot \frac{\partial}{\partial u_1} \right] f(1) = 0, \quad (23.4)$$

$$f(1)f(2)\left\{\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^2 \left[(\mathbf{u}_i + H\mathbf{x}_i) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i} - H\mathbf{u}_i \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}_i} \right] \right\} g(1,2) \\ = \sum_{i \neq j}^2 f(i) \frac{\partial f(j)}{\partial \mathbf{u}_j} \cdot \frac{\partial \phi(i,j)}{\partial \mathbf{x}_j}. \quad (23.5)$$

Далее мы можем упростить сложные из-за наличия расширения математические выражения, используя набор сопутствующих координат, подобных (21.10), и новую переменную времени:

$$\mathbf{x}'_i \equiv \mathbf{x}_i \frac{R_0}{R(t)}, \quad \mathbf{u}'_i \equiv \mathbf{u}_i \frac{R(t)}{R_0}, \quad \frac{\partial t'}{\partial t} \equiv \frac{R_0^2}{R^2(t)}. \quad (23.6)$$

Сохраняя ту же нормировку, новые корреляционные функции можно приравнять к исходным:

$$f'(\mathbf{x}'_i, \mathbf{u}'_i, t) \equiv f(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}_i, t), \quad (23.7)$$

$$g'(\mathbf{x}'_1, \mathbf{u}'_1, \mathbf{x}'_2, \mathbf{u}'_2, t) \equiv g(\mathbf{x}_1, \mathbf{u}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{u}_2, t). \quad (23.8)$$

Таким же образом, t_0 — это начальное время, которое соответствует моменту, когда система была некоррелированной, и $R_0 \equiv R(t_0)$.

Рассмотрим функцию f . Для упрощения обозначений отбросим метку частицы и перейдем в сопутствующую систему координат; тогда уравнение (23.4) преобразуется к виду

$$\left(\frac{\partial}{\partial t'} + \mathbf{u}' \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'} \right) f' = 0. \quad (23.9)$$

Поскольку предполагается, что система в среднем изотропна, можно пользоваться радиальной координатой $r' \equiv |\mathbf{x}'|$, радиальной компонентой скорости u'_r и тангенциальной компонентой скорости u'_t . В этих координатах уравнение (23.9) принимает вид [см. уравнение (1) в задаче 4 гл. 18]

$$\left(\frac{\partial}{\partial t'} + u'_r \frac{\partial}{\partial r'} + \frac{u'^2_t}{r'} \frac{\partial}{\partial u'_t} - \frac{u'_t u'_t}{r'} \frac{\partial}{\partial u'_t} \right) f' = 0. \quad (23.10)$$

Это уравнение показывает, что если следить за движениями галактик в сопутствующей системе, то полная производная от их функции распределения равна нулю. Фазовая плотность постоянна вдоль траектории. В этом смысле она является интегралом движения. Мы вернемся к такой интерпретации, которая является частным случаем теоремы Джинса, в гл. 39. Здесь она полезна, ибо говорит о том, что если функция f является интегралом движения, то она должна (по крайней мере в обычных топологиях) зависеть только от остальных интегралов движения. Физическая интуиция подсказывает, что энергия и момент импульса

$$E \equiv u'^2_r + u'^2_t, \quad L \equiv r' u'_t \quad (23.11)$$

являются интегралами движения, и это предположение можно проверить, подставляя их в уравнение (23.10). Существуют ли какие-либо другие интегралы движения? Оказывается, да:

$$K \equiv \frac{r' u_r'}{u_r'^2 + u_t'^2} - t'. \quad (23.12)$$

Это выражение найдено посредством интегрирования вдоль характеристических кривых уравнения (23.10), как уже обсуждалось в гл. 4. Четыре характеристических уравнения дают три независимых интеграла движения: E , L и K .

Другое требование к функции f' — условие однородности — накладывает ограничения на ее зависимость от энергии $E = u'^2$; она не зависит от t' . В качестве простейшей иллюстрации воспользуемся распределением Максвелла для начального распределения скоростей. В настоящее время данные наблюдений несут в себе лишь слабые следы первоначального распределения скоростей галактик. Перемешивание фаз, сгущивание, выбросы и крупномасштабные возмущения оказали очень сильное воздействие на наблюдаемые теперь скорости. Реальное распределение может до некоторой степени отражать процессы, формировавшие галактики, но это также открытый вопрос. При такой степени неведения выбор распределения Максвелла, по-видимому, наиболее естествен, так как это единственное распределение, в котором три декартовы компоненты скорости являются независимыми случайными переменными с нулевым средним значением (см. гл. 8). Читатель может испытать другие первоначальные распределения, чтобы посмотреть, могут ли из них возникнуть длинные цепочки галактик.

Для распределения Максвелла

$$f'(u') = n_0 \left(\frac{\beta_0}{2\pi} \right)^{3/2} \exp[-\beta_0 u'^2/2], \quad (23.13)$$

где n_0 — постоянная плотность в сопутствующей системе координат и β_0 — постоянная, характеризующая дисперсию скорости в этой системе. В более привычной, несопутствующей системе координат уравнение (23.13) записывается в виде

$$f(u, t) = n(t) \left[\frac{\beta(t)}{2\pi} \right]^{3/2} \exp[-\beta(t) u^2/2], \quad (23.14)$$

где

$$\frac{n(t)}{n_0} = \frac{R_0^3}{R^3(t)}, \quad \frac{\beta(t)}{\beta_0} = \frac{R^2(t)}{R_0^2}. \quad (23.15)$$

Распределение Максвелла считаем совместимым с требованием, что «температура» системы меняется как $R^{-2}(t)$ во время свободного адиабатического расширения, характерного для первоначально нескученных галактик.

Возвращаясь к уравнению для g , подставим уравнение (23.14) в (23.5) и используем тот факт, что все двухточечные функции зависят только от относительных пространственных координат в однородной системе:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{u}_{12} + H\mathbf{x}_{12}) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_{12}} - H \sum_{i=1}^2 \mathbf{u}_i \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}_i} \right] g(1, 2) = -\beta(t) \mathbf{u}_{12} \cdot \frac{\partial \phi(1, 2)}{\partial \mathbf{x}_{12}}, \quad (23.16)$$

где $\mathbf{x}_{12} \equiv \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$ и $\mathbf{u}_{12} \equiv \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$. В сопутствующих координатах это уравнение принимает вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial t'} + \mathbf{u}'_{12} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'_{12}} \right) g'(1, 2) = -\beta_0 \frac{R'(t')}{R_0} \mathbf{u}'_{12} \cdot \frac{\partial \phi'(1, 2)}{\partial \mathbf{x}'_{12}}, \quad (23.17)$$

где значения исходных функций от исходных переменных совпадают со значениями преобразованных функций в точках с преобразованными координатами, т. е. $R'(t') = R(t)$ и $R'_0 = R_0$.

Эволюционное уравнение (23.17) для g' может быть дальше упрощено. Когда члены самоиндукции несутрешены, рост $g'(1, 2)$ затрагивает только $\mathbf{x}'_{12}$ и $\mathbf{u}'_{12}$, так что $g'(1, 2)$ будет зависеть от скоростей лишь через $\mathbf{u}'_{12}$. (Как только сгущение становится существенным, это утверждение перестает быть справедливым. Тогда отражающие трехточечное взаимодействие члены самоиндукции делают $g'(1, 2)$ зависимой от скорости центра масс так же, как $\mathbf{u}'_{12}$. Отказ от этой более общей зависимости приводит к тому, что различные попытки распространить уравнение ББГКИ на ситуации, когда сгущение сильнее, и на корреляции более высокого порядка не обеспечивают хорошее приближение.) Правая часть уравнения (23.17) также зависит от $\mathbf{x}'_{12} \cdot \mathbf{u}'_{12}$ и $|\mathbf{x}'_{12}|$, и поэтому $g'(1, 2)$ должна быть функцией только r', u'_r, u'_t и t' , где $r' \equiv |\mathbf{x}'_{12}|$, а u'_r и u'_t — радиальная и тангенциальная проекции $\mathbf{u}'_{12}$ на $\mathbf{x}'_{12}$. (И это утверждение теряет справедливость, когда становятся существенными члены самоиндукции.) В этих координатах уравнение (23.17) принимает вид

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial t'} + u'_r \frac{\partial}{\partial r'} + \frac{u'^2_t}{r'} \frac{\partial}{\partial u'_t} - \frac{u'_r u'_t}{r'} \frac{\partial}{\partial u'_r} \right) g'(r', u'_r, u'_t, t') \\ & = -Gm\beta_0 \frac{R'(t')}{R_0} \frac{u'_r}{r'^2}. \end{aligned} \quad (23.18)$$

Итак, получено основное уравнение, описывающее рост корреляции в расширяющейся первоначально нескоррелированной системе галактик, которая вначале имеет однородное пространственное распределение и распределение скоростей по Максвеллу — Больцману. Теперь мы найдем его точное решение и определим область применимости.

Основное уравнение является дифференциальным линейным уравнением первого порядка в частных производных. Его решение получается уже знакомым нам методом характеристических кривых [использованным в гл. 4 и для решения уравнений (23.11) и (23.12)]. В случае уравнения (23.18) характеристическими кривыми являются интегральные кривые для набора обыкновенных дифференциальных уравнений

$$dt' = \frac{dr'}{u'_r} = \frac{du'_r}{u'^2_r/r'} = \frac{du'_t}{-u'_t u'_t/r'} = - \frac{dg'}{a(t')u'_t/r'^2} \quad (23.19)$$

при

$$a'(t') \equiv Gm\beta_0 \frac{R'(t')}{R'_0}. \quad (23.20)$$

Чтобы упростить эти уравнения, введем интегралы (23.11) и (23.12) соответствующих однородных уравнений. После этого соотношение (23.19) сводится к выражению

$$dg' = - \frac{Ea'(t')(t' + K)}{[E(t' + K)^2 + L^2/E]^{3/2}} dt'. \quad (23.21)$$

Его интегрирование дает точное решение. Единственное, что нам нужно сделать, — это определить расширение $a'(t')$.

Во многих релятивистских моделях скорость расширения дается выражением (21.31). Для определенности исследуем случай Вселенной Эйнштейна — де Ситтера, когда

$$\frac{R(t)}{R_0} = \left(\frac{t}{t_0} \right)^{2/3}, \quad (23.22)$$

$$\frac{8}{3} \pi G \rho(t) = H^2(t) = \frac{4}{9t^2}. \quad (23.23)$$

Как станет очевидным, первоначальный рост сгущивания не сильно зависит от того, какая именно общерелятивистская модель используется. Физически это связано с тем, что фрагментация начинает действовать наиболее сильно на малых масштабах, где скорости расширения также малы. Лишь в случае, когда корреляции начинают проявляться на больших масштабах, тип космологии становится очень важен.

Соотношение (23.22) в сочетании с определением (23.6) сопутствующего времени дает

$$t' - t'_0 = 3t_0[1 - (t_0/t)^{1/3}], \quad (23.24)$$

так что

$$R'(t') = R'_0[1 - (t' - t'_0)/3t_0]^{-2}. \quad (23.25)$$

Применительно к ранним стадиям сгущивания это выражение можно преобразовать, введя обозначение

$$\tau \equiv \frac{t - t_0}{t_0} \quad (23.26)$$

и воспользовавшись первым приближением

$$a'(t') = Gm\beta_0[1 + 2(t' - t'_0)/3t_0]. \quad (23.27)$$

Как будет показано, это приближение согласуется с тем, что мы пренебрегли членами самоиндукции в уравнении (22.5).

Подстановка соотношения (23.27) в (23.21) и интегрирование дают

$$g' = Gm\beta_0[I(t'_0) - I(t')], \quad (23.28)$$

где

$$I(s) = \frac{2}{3t_0\sqrt{E}} \operatorname{Arcsh}[E(s+K)/L] - \frac{1 + 2(s-t'_0)/3t_0}{[E(s+K)^2 + L^2/E]^{1/2}}, \quad (23.29)$$

так как по предположению в момент t_0 корреляции отсутствуют. Переходя к расстояниям и скоростям, получаем (23.28) в виде

$$\begin{aligned} g'(r', u'_r, u'_t, t') = Gm\beta_0 \Bigg[& \left[1 + 2(t' - t'_0)/3t_0 \right] / r' - \{ [r' - u'_t(t' - t'_0)]^2 \\ & + [u'_t(t' - t'_0)]^2 \}^{-1/2} + \frac{2}{3t_0(u'^2_r + u'^2_t)^{1/2}} \\ & \times \left\{ \operatorname{Arcsh} \left[\frac{u'_r}{u'_t} - (t' - t'_0) \frac{u'^2_r + u'^2_t}{r' u'_t} \right] - \operatorname{Arcsh} \left(\frac{u'_r}{u'_t} \right) \right\} \Bigg]. \quad (23.30) \end{aligned}$$

Полученное решение точное и нет необходимости перегруппировывать фурье-компоненты. Решение удовлетворяет уравнению (23.18) и обращается в нуль на трехмерной гиперплоскости r', u'_r, u'_t , когда $t' = t'_0$. Оно также удовлетворяет условию

$$g' \rightarrow 0 \text{ при } r' \rightarrow \infty \text{ для всех } u'_r, u'_t, r', \quad (23.31)$$

что и ожидалось на основании физической интерпретации. Мы видим, что множитель $2/3$ для темпа расширения сохраняется до конца, поэтому малые изменения для различных темпов расширения легко осуществимы. Уравнение (23.30) содержит полную информацию о скоростях и положениях галактик в стадии начального роста корреляций.

Располагая полной корреляционной функцией, можно извлечь пространственную корреляцию $\nu'(r', t') d\mathbf{r}'$. Это условная вероятность найти в момент t' какую-либо галактику внутри малого объема на расстоянии r' в сопутствующей системе от некоторой другой галактики независимо от скоростей. Чтобы найти эту вероятность, умножим уравнение (23.30) на $n_0^{-1} f'(1) f'(2)$ и проинтегрируем по u'_1 и u'_2 . В результате (после некоторых алгебраических преобразований) получим

$$\nu'(r', t') = n_0 a'(t') \int_{r'}^1 \operatorname{erfc}(\kappa' r'), \quad (23.32)$$

где

$$\kappa' \equiv \frac{\beta_0^{1/2}}{2(t' - t'_0)}, \quad (23.33)$$

а erfc означает дополнительный интеграл ошибок. Уравнение (23.32) является точным, когда $a'(t')$ определяется выражением (23.27), которое в свою очередь является приближением для $a'(t')$ в модели Эйнштейна — де Ситтера при малых τ . Таким образом, при малых величинах $\kappa' r'$ корреляции растут с той же скоростью, что и $R'(t')$, подобно линейным возмущениям в жидкостях.

Хотя первоначальное гравитационное сгущивание описывается наиболее естественным образом в сопутствующих координатах, интересно выразить его, пользуясь несопутствующими координатами и временем наблюдателя. Разложение (23.24) показывает, что $t' - t'_0 = t - t_0$ с точностью до первого порядка малости по τ . Не забыв преобразовать также и элемент объема, получаем вместо (23.32)

$$v(r, t) = Gm\beta(t)n(t)r^{-1} \text{erfc}[r'\lambda(t)] \quad (23.34)$$

в этом приближении, где

$$\lambda(t) \equiv \frac{2(t - t_0)R(t)}{R_0\sqrt{\beta_0}}. \quad (23.35)$$

Корреляционная функция изменяется как r^{-1} при малых r/λ . Эта сингулярность, типичная для гравитационных систем, не приводит к расходимости физически значимых величин. При больших r/λ стандартный асимптотический ряд для erfc (Abramowitz and Stegun, 1964) дает

$$v(r, t) \approx \pi^{-1/2} Gm\beta(t)n(t)\lambda(t)r^{-2} e^{-r^2/\lambda^2} \left[1 - \frac{\lambda^2(t)}{2r^2} + \dots \right]. \quad (23.36)$$

Таким образом, корреляционная длина равна по существу $\lambda(t)$. Если бы не было расширения Вселенной, величина λ росла бы линейно по времени со скоростью, пропорциональной средней тепловой скорости галактик $(2/\beta_0)^{1/2}$. Другими словами, сфера влияния данной галактики в момент t должна простираться в среднем на такое же расстояние, какое может пройти с момента t_0 другая, первоначально близкая галактика.

Расширение, однако, вызывает увеличение корреляционной длины. Это происходит потому, что на ранних стадиях почти ни одна из галактик не связана с другой в тесную пару и, таким образом, в большей или меньшей степени закоррелированные галактики, так же как и незакоррелированные, разделяются общим расширением. Это естественное увеличение корреляционной длины не компенсируется уменьшением тепловых скоростей, вызванным расширением. Такое уменьшение вследствие расширения относится к скоростям, измеренным локальным наблюдателем в различных точках вдоль траектории, по которой движется галактика, в то время как скорость распространения корреляций измеряется относительно точки, в которой возникла первоначальная корреляция. (Воздействие расширения на распределение пекулярных скоростей обсуждается далее в гл. 28.)

Теперь можно вернуться к двум приближениям, которые были использова-

ны для вывода соотношения (23.34). Первое (и наиболее существенное) заключалось в том, что мы пренебрегли членами самоиндукции, — это упрощение было справедливо, пока сохранялось условие (22.12). Вычислив двухточечную корреляционную функцию, можно оценить $\Psi(1, 2)$ и сравнить ее с $\phi(1, 2)$. Использование соотношения (23.34) дает

$$\begin{aligned}\Psi(1, 2) &\equiv \int f(3)g(1, 3)\phi(2, 3)dx_3dv_3 \\ &\approx - \int v(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_3|) \frac{Gm}{|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3|} d\mathbf{x}_3 \\ &= - Gm \int \frac{v(|\mathbf{x}|)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_{12}|} d\mathbf{x}.\end{aligned}\quad (23.37)$$

Для получения последнего уравнения потребовалось заменить переменные и переобозначить относительное расстояние $\mathbf{x}_{12} \equiv \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$. Дифференцируя по $\mathbf{x}_{12}$, получаем

$$\nabla^2 \Psi(r, t) \approx 4\pi Gm v(r, t), \quad (23.38)$$

где $r \equiv |\mathbf{x}_{12}|$. Решение этого уравнения

$$\Psi(r, t) \approx - Gm r^{-1} A(t) F[r/\lambda(t)], \quad (23.39)$$

где

$$A(t) = 2\pi Gm n(t) \beta(t) \lambda^2(t), \quad (23.40)$$

$$F(x) = \frac{1}{2} \operatorname{erf} x + x \pi^{-1/2} e^{-x^2} - x^2 \operatorname{erfc} x. \quad (23.41)$$

Так как $|F(x)| \leq 1/2$, условие $|\Psi(1, 2)| < |\phi(1, 2)|$ для всех $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_2$ сводится просто к неравенству $A(t) < 2$ или

$$\pi Gm n(t) \beta(t) \lambda^2(t) \lesssim 1. \quad (23.42)$$

С помощью соотношения (23.23) между плотностью и временем в модели Эйнштейна — де Ситтера это неравенство принимает простой вид:

$$\tau^2 \left(\frac{t}{t_0} \right)^{2/3} \lesssim \frac{3}{2}. \quad (23.43)$$

Пока отношение t/t_0 остается величиной порядка единицы, требование, чтобы члены фрагментации оставались основными источниками корреляции, записывается как $\tau \leq 1$. Это условие является также вторым приближением, использованным при выводе выражения (23.34). Таким образом, оба приближения справедливы.

Если сгущение начинается, когда хаббловский возраст равен t_0 , эти результаты остаются справедливыми на протяжении еще одного времени Хаббла. За время Хаббла может произойти многое. Наш взгляд проникает в про-

шло до красных смещений порядка единицы. На этом коротком отрезке времени, как мы видим, сгущивание способно вырасти до такой степени, что становится доминирующим в распределении галактик.

24. ЭНЕРГИЯ И ПЕРВОНАЧАЛЬНЫЙ МАСШТАБ СГУЩИВАНИЯ

Наблюдаемая корреляционная функция $\xi(r, t)$ связана простым соотношением с $v(r, t)$:

$$\xi(r, t) = \frac{v(r, t)}{n(t)} = Gm\beta(t)r^{-1} \operatorname{erfc}[r/\lambda(t)]. \quad (24.1)$$

На рис. 25 показан вид первоначальных корреляций $x^{-1} \operatorname{erfc}(x)$, которые сравниваются с далеко проэволюционировавшими корреляциями, имеющими форму x^{-2} , где в любой заданный момент $x \equiv r/\lambda(t)$. Нормировки этих кривых меняются со временем, а их вид также сильно эволюционирует, как можно судить по приближенной кривой, представляющей данные наблюдений [см. соотношение (20.11) и последующее обсуждение]. Более того, так как Вселенная

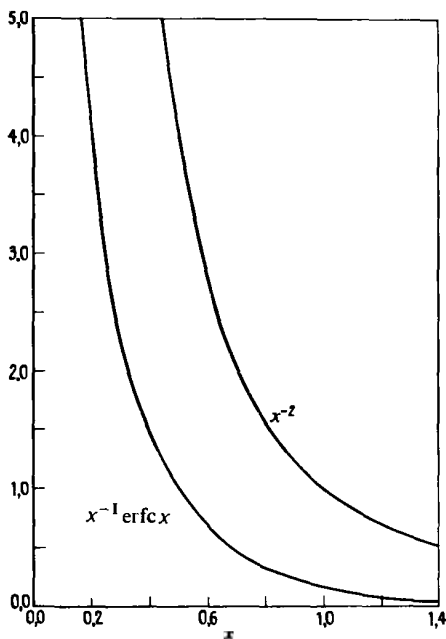


Рис. 25. Первоначальный вид корреляционной функции и ее вид впоследствии.

расширяется от первоначального не имеющего корреляций состояния, масштаб, определенный из условия $\xi = \xi_0 \approx 1$, при возрастании которого сгущивание становится существенным, также возрастает. При малых r/λ из уравнения (24.1) следует, что $r(\xi_0) \propto R^2(t)$.

Если во Вселенной Эйнштейна — де Ситтера в момент t требуется выяснить, как происходил первоначальный рост сгущивания от исходного состояния в момент t_0 (такой, что $t_0 \leq t \leq t_*$), то соотношение (24.1) берется в виде

$$\xi(r, t) \approx 0,1 \mu u_*^{-2} (t/t_*)^{4/3} r^{-1} \operatorname{erfc}(r/\lambda), \quad (24.2)$$

где

$$\lambda(t) \approx (t - t_0) \left(\frac{tt_*}{t_0^2} \right)^{2/3} u_* \text{ Мпс} \quad (24.3)$$

В этих двух уравнениях r измеряется в мегаларсеках, $u_* = (3/\beta_*)^{1/2}$ — дисперсия скоростей (в единицах 100 км/с) несгущившихся галактик в момент t_* , m — масса галактики, выраженная в единицах $10^{11} M_\odot$, а время всюду измеряется в единицах 10^{10} лет. Если взять надежные значения этих величин и максимальное значение $t = t_*$, соответствующее настоящему моменту, становится ясно, что сгущивание галактик должно было начаться при $z \gg 1$, если галактики первоначально не были сгущены, а ξ должно иметь наблюдаемую сейчас амплитуду $\xi_* \gg 1$. Именно это предполагалось во введении к гл. 22. Видно также, что небольшая первоначальная дисперсия скоростей существенно увеличивает начальное сгущивание.

Физические свойства сгущивания выявляются также с помощью других параметров корреляции. Одна из таких величин — энергия корреляции. Поскольку $\nu(r, t)$ представляет собой избыток плотности галактик вокруг данной галактики по сравнению с плотностью при отсутствии корреляции, избыток потенциальной энергии на одну галактику по сравнению с незакоррелированным состоянием равен

$$U(t) = -\frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{Gm^2}{r} \nu(r, t) 4\pi r^2 dr = -2\sqrt{\pi} G^2 m^3 \beta(t) n(t) \lambda(t). \quad (24.4)$$

Как обычно множитель $1/2$ позволяет учитывать, что энергия распределена между парами галактик, а величина $\nu(r, t)$ получена из соотношения (23.34). Эта энергия корреляции возрастает линейно со временем.

Полная энергия в гравитационной системе сохраняется, поэтому кинетическая энергия теплового движения должна возрасти, чтобы скомпенсировать уменьшение потенциальной энергии корреляции. Когда энергия корреляции по порядку величины становится равной средней тепловой энергии, поведение системы определяется корреляциями. То, что мы пренебрегали интегралом связи в уравнении (22.4), не позволяло корреляциям влиять на эволюцию одночастичной функции распределения и, следовательно, на среднюю кинетическую энергию. Однако пока корреляции действительно доминируют, уместно аппроксимировать среднюю кинетическую энергию, приходящуюся на одну га-

лактику, величиной $3m/\beta(t)$. Поэтому условие, что корреляции не доминируют, становится таким:

$$\frac{4}{3}\pi^{1/2}G^2m^2\beta^{3/2}n(t)(t-t_0)R^2(t)/R_0^2 \lesssim 1. \quad (24.5)$$

Условие (24.5) можно понять другим способом, если переписать его, введя начальный прицельный параметр b_0 , необходимый, чтобы обеспечить большее гравитационное отклонение [см. уравнение (2.1)]. Тогда в космологической модели Эйнштейна — де Ситтера получим

$$\frac{(b_0/u_0)}{t_0} \tau \left(\frac{t}{t_0} \right)^{4/3} \lesssim 9\sqrt{\pi}. \quad (24.6)$$

Таким образом, чем короче время движения по орбите b_0/u_0 , в течение которого при близком прохождении галактика значительно отклоняется, тем менее существенны корреляции. Следовательно, рост корреляций занимает больше времени, когда начальные хаотические скорости u_0 выше.

Возможно, самой простой мерой скучивания, которую можно получить из парной корреляционной функции, является избыток числа галактик, находящихся в некоторой окрестности данной галактики, по сравнению с таким же числом при некоррелированном состоянии. Число галактик, находящихся внутри сферы радиуса r вокруг данной галактики в момент t , есть

$$N_c(r, t) = \int_0^r v(s, t) 4\pi s^2 ds = 2\pi Gmn(t)\beta(t)\lambda^2(t)D[r/\lambda(t)], \quad (24.7)$$

где

$$D(x) = x^2 \operatorname{erfc} x - x\pi^{-1/2} \exp(-x^2) + \frac{1}{2} \operatorname{erf} x. \quad (24.8)$$

В пределе для малой и большой сфер

$$\begin{aligned} N_c(r, t) &= \pi Gmn(t)\beta(t)2r^2, \quad r \ll \lambda(t) \\ &= \pi Gmn(t)\beta(t)\lambda^2(t), \quad r \gg \lambda(t). \end{aligned} \quad (24.9)$$

Этот избыток числа галактик можно сравнить с их числом $N_0(r, t) = 4\pi r^3 n(t)/3$, ожидаемым в отсутствие корреляций. Для сравнения естественно взять среднее расстояние между галактиками $\sim n^{-1/3}(t)$. Если исходить из выражения (24.9) для малых λ/r , получим следующее отношение:

$$\frac{N_c}{N_0} = 3Gmn(t)(t-t_0)^2 \left(\frac{R(t)}{R_0} \right)^4. \quad (24.10)$$

Когда это отношение приближается к единице или превосходит ее, система начинает выглядеть сильно скученной. В космологии Эйнштейна — де Ситтера условие того, что скучиванием можно пренебречь, имеет вид

$$\tau^2 \left(\frac{t}{t_0} \right)^{8/3} \lesssim 2\pi. \quad (24.11)$$

Это соотношение очень похоже на условие (23.43), состоящее в том, что члены самоиндукции пренебрежимо малы в кинетических уравнениях.

Флуктуации тесно связаны с корреляциями, как показывает уравнение (20.9). Чтобы система имела флуктуации порядка $\sqrt{N}$ на масштабе r , требуется вклад корреляций $N_c(r, t) \ll 1$. Сравнивая выражение (24.7) с (23.42) и принимая во внимание соотношение $0 \leq D(x) < 1/2$, видим, что условие, при котором расширяющаяся гравитационная система имеет флуктуации порядка $\sqrt{N}$ на всех масштабах, эквивалентно также условию (23.43). Таким образом, это условие учитывает несколько обстоятельств, при которых гравитационное скучивание является существенным.

Рассмотрим теперь простую связь скорости скучивания с фрагментацией. В некоторый момент времени t при радиальном расстоянии r величина $N_c(r, t)/N_0(r, t)$ пропорциональна m и не зависит от $n(t)$. Поэтому система галактик с массой αm будет скучиваться в α раз быстрее, чем система с массой m . Скорость скучивания будет также больше для более массивных галактик внутри системы. Этого и следовало ожидать, так как член фрагментации в уравнении (23.18) также пропорционален m и становится равным нулю в предельном случае жидкости.

Все эти результаты строго справедливы только для $\tau = (t - t_0)/t_0 \leq 1$. Даже за это короткое время скучивание, начавшееся в первоначально нескученном распределении галактик, может стать значительным. При $\tau \geq 1$ корреляции должны расти даже быстрее, чем при $\tau \leq 1$, так как вводятся в действие члены самоиндукции. Эти члены-источники в кинетическом уравнении соответствуют корреляции галактик с группами уже скучившихся галактик — процессу более эффективному, чем ранняя корреляция незакоррелированных пар галактик. В этом состоянии величина $\xi(r, t)$ становится много больше единицы и скучивание делается нелинейным.

Каким образом мы должны анализировать эту нелинейную эру, существования которой, как мы знаем, требуют современные наблюдения? На первый взгляд может показаться, что необходимо добавить члены самоиндукции и подняться на одну ступень в иерархии уравнений ББГКИ. Однако объем работы при этом огромен и ступени весьма скользкие.

На следующем уровне математические выкладки становятся такими неконтролируемыми, что даже при численных решениях требуются значительные и неопределенные аппроксимации. Основная проблема состоит в том, что при переходе гравитационного скучивания в нелинейную стадию на все больших масштабах нарушаются симметрии сдвига и вращения: неоднородности доминируют. Когда корреляции малы, $g(1, 2) = g(r, u_1, u_2, t)$, но когда они велики, $g(1, 2) = g(x_1, x_2, u_1, u_2, t)$. Число необходимых переменных возрастает с 4 до 13, и это только для двухточечной функции!

Другая важная проблема, возникающая при дальнейшем применении уравнений ББГКИ, состоит в том, что в нелинейном режиме становятся важными корреляции более высоких порядков. Это можно увидеть из уравнений ББГКИ для трехточечных корреляций, которые начинают расти, когда растет $g(i, j)$. Как показывают численные эксперименты с системами N тел (которые

будут описаны в гл. 26 — 28), вскоре после начала сгущивания собираются все более богатые по числу галактик сгущения. Поэтому создается впечатление, что несколько-точечные корреляционные функции очень быстро становятся существенными. Таким образом, следующая стадия, после того как $\xi(r, t)$ достигает величины порядка единицы, состоит в том, что все корреляционные функции низкого порядка становятся большими и рассмотрение только двух или трех из них не обеспечивает адекватного описания сгущивания. Итак, начиная с определенной точки, бесполезно рассматривать многоточечные корреляционные функции. Должен существовать какой-то более совершенный подход!

25. ПОСЛЕДУЮЩАЯ ЭВОЛЮЦИЯ ЭНЕРГИИ КОСМИЧЕСКИХ КОРРЕЛЯЦИЙ

25.1. УРАВНЕНИЕ КОСМИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

Более действенным подходом к нелинейным корреляциям было бы получение результатов с помощью цепочки уравнения ББГКИ, не зависящих ни от малости $g(1, 2)$, ни от отсутствия корреляций более высокого порядка. В предельном случае, когда все корреляции становятся нелинейными, такие выводы должны следовать прямо из уравнения Лиувилля. Так как уравнение Лиувилля эквивалентно уравнениям движения, то же самое должно следовать и из теории орбит.

Закон сохранения энергии применяется к нелинейным корреляциям в больших областях точно так же, как и локально. Однако в расширяющейся системе мы должны допустить две его модификации. Во-первых, расширение вызывает уменьшение кинетической энергии пекулярного движения внутри данной области. Это мешает росту неоднородностей, которые увеличивают пекулярные скорости. Во-вторых, корреляции распространяются через границы некоторой области. То, что происходит внутри данной области, зависит также от сгущивания вокруг нее. В отличие от случая идеального газа здесь нельзя считать независимой любую часть области.

Уравнение космической энергии описывает эту ситуацию. Оно следует непосредственно из уравнений движения галактик (Irvine, 1961; Layzer, 1963). Рассмотрев в предыдущих главах аппарат уравнений ББГКИ, мы можем использовать его, чтобы вывести уравнение космической энергии, следуя Фоллу и Северну (Fall and Severne, 1976). Из двух последних уравнений цепочки получается сильный результат, справедливый для всех порядков любого возмущения в распределении галактик — как линейного, так и нелинейного. Единственное допущение заключается в том, что одночастичная функция распределения галактик $f(1)$ остается однородной, так как Вселенная однородна на очень больших масштабах. На таких масштабах сгущивание описывают инвариантные в отношении переноса корреляционные функции. Это не более чем допущение, вполне обычное также для прямых следствий уравнения движения, которыми мы всегда пользуемся.

Рассмотрим произвольный объем пространства в сопутствующей системе координат. Пекулярные скорости и пространственные корреляции дают соответственно среднюю кинетическую и потенциальную энергию на одну галактику:

$$T' \equiv \frac{1}{2} \frac{m}{n_0} \int u_1'^2 f'(1) du_1', \quad (25.1)$$

$$U' \equiv - \frac{1}{2n_0} \int \frac{Gm^2}{r'} \gamma'(1, 2) du_1' du_2' dr', \quad (25.2)$$

где

$$\gamma'(1, 2) \equiv f'(1) f'(2) g'(1, 2). \quad (25.3)$$

Пекулярная сопутствующая скорость снова равна

$$u_i' = \frac{R(t)}{R_0} (v_i - H(t)x_i), \quad (25.4)$$

а n_0 — постоянная сопутствующая плотность. Уравнения (23.6) показывают, что в несопутствующей системе отсчета наблюдателя эти энергии равны соответственно

$$T(t) = \frac{R_0^2}{R^2(t)} T'(t'), \quad (25.5)$$

$$U(t) = \frac{R_0}{R(t)} U'(t'). \quad (25.6)$$

Изменения корреляционных энергий в двух системах поэтому связаны соотношением

$$\frac{d}{dt} (T + U) + H(2T + U) = \left(\frac{R_0}{R(t)} \right)^3 \left[\frac{R_0}{R(t)} \frac{dT'}{dt'} + \frac{dU'}{dt'} \right]. \quad (25.7)$$

Теперь цепочка уравнений ББГКИ избавляется с помощью (25.7) от производных по сопутствующим координатам. Используя преобразования из гл. 22 и 23 и принимая предположение об однородности, состоящее в том, что $f'(1)$ не зависит от x'_1 , а $g(1, 2)$ зависит лишь от относительных координат $x'_{12} = x'_1 - x'_2$, читатель может показать, что выражения (22.4) и (22.5) соответственно имеют в сопутствующих координатах вид

$$\frac{\partial f'(1)}{\partial t'} = \frac{R'(t')}{R'_0} \int \Theta'_{12} \gamma'(1, 2) dx'_2 du'_2, \quad (25.8)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t'} + (\mathbf{u}'_1 - \mathbf{u}'_2) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'_{12}} \right] \gamma'(1, 2) = \frac{R'(t')}{R'_0} \Theta'_{12} [f'(1)f'(2) + \gamma'(1, 2)] + \frac{R'(t')}{R'_0} \int [\Theta'_{13} f'(1)\gamma'(2, 3) + \Theta'_{23} f'(2)\gamma'(1, 3) + (\Theta'_{13} + \Theta'_{23})h'(1, 2, 3)] d\mathbf{x}'_3 d\mathbf{u}'_3, \quad (25.9)$$

где

$$\Theta'_{ij} \equiv \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'_i} \left(\frac{-Gm}{|\mathbf{x}'_i - \mathbf{x}'_j|} \right) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{u}'_i} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}'_j} \right), \quad (25.10)$$

а $h'(1, 2, 3)$ — прежняя трехточечная корреляционная функция в сопутствующих координатах, умноженная на $f'(1)f'(2)f'(3)$. Здесь охвачены все столкновительные члены, члены фрагментации и самоиндукции — словом, все члены-источники.

Подстановка выражения (25.8) в производную по сопутствующему времени от (25.1) дает

$$\begin{aligned} \frac{dT'}{dt'} &= \frac{1}{2} \frac{m}{n_0} \frac{R'}{R'_0} \int u_1'^2 \Theta'_{12} \gamma'(1, 2) d\mathbf{u}'_1 d\mathbf{u}'_2 d\mathbf{x}'_2 \\ &= \frac{Gm^2 R'}{2n_0 R'_0} \int (\mathbf{u}'_1 - \mathbf{u}'_2) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'_{12}} \frac{1}{x_{12}} \gamma'(1, 2) d\mathbf{x}'_{12} d\mathbf{u}'_1 d\mathbf{u}'_2. \end{aligned} \quad (25.11)$$

Чтобы получить выражение во второй строке, заменяем $u_1'^2$ на $(u_1'^2 + u_2'^2)/2$ и делаем интеграл симметричным относительно $\mathbf{u}'_1$ и $\mathbf{u}'_2$, а затем интегрируем по частям. Аналогично подстановка уравнения (25.9) в производную по сопутствующему времени от (25.2) дает

$$\frac{dU'}{dt'} = - \frac{Gm^2}{2n_0} \int \frac{1}{x_{12}} \left[-(\mathbf{u}'_1 - \mathbf{u}'_2) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'_{12}} \right] \gamma'(1, 2) d\mathbf{x}'_{12} d\mathbf{u}'_1 d\mathbf{u}'_2. \quad (25.12)$$

Все члены фрагментации и самоиндукции уравнения (25.9) равны нулю за границами области интегрирования по скоростям. Это избавляет нас от эффектов корреляций более высоких порядков. Интегрирование уравнения (25.12) по частям по $\mathbf{x}'_{12}$ сразу же показывает, что правая часть соотношения (25.7) становится равной нулю.

Таким образом, у нас остается уравнение космической энергии в форме

$$\frac{d}{dt} (T + U) + H(2T + U) = 0. \quad (25.13)$$

Оно записано в несопутствующих координатах, и в него вошли наблюдаемые

величины

$$T = \frac{1}{2} \frac{m}{n(t)} \int (v_1 - H r)^2 f(1) dv_1, \quad (25.14)$$

$$U = -\frac{1}{2} G m^2 n(t) \int \frac{1}{r} \xi(r) d^3 r, \quad (25.15)$$

где $r = |x_{12}|$ — теперь обычная радиальная координата. И снова этот результат является точным для полной нелинейной эволюции корреляций, пока плотность однородна при осреднении по масштабам много большим, чем характерные масштабы корреляций. Заметим, что в областях антикорреляции галактик $\xi(r) < 0$ и $U > 0$.

Если коррелирующие галактики связаны между собой и находятся в вириальном равновесии, то $2T = -U$ и их полная энергия $T + U$ сохраняется. Причина состоит в том, что связанные структуры не совершают работы против расширения Вселенной. Например, расширение Вселенной не влияет на двойные звезды. Подобным же образом, если расширение отсутствует, $\dot{R} = 0$ и полная энергия сохраняется. С другой стороны, если отсутствует гравитация или потенциальная энергия корреляции U , то пекулярная кинетическая энергия должна уменьшаться как $R^{-2}(t)$. Пекулярные скорости в свободно расширяющемся адиабатическом газе уменьшаются как R^{-1} [см. также соотношение (23.6)] — именно так, как мы ожидали. В общем случае уравнение (25.13) показывает, как изменение полной энергии, вызванное расширением, определяется степенью участия скоплений галактик в расширении Вселенной.

25.2. УСТОЙЧИВОСТЬ СООТНОШЕНИЯ $\xi(r) \propto r^{-2}$

Уравнение космической энергии можно использовать, чтобы получить замечательный результат относительно устойчивости соотношения $\xi(r) \propto r^{-2}$ в частном случае $\gamma = 2$, близком к тому, что дают наблюдения. Сначала нам понадобится найти другое соотношение между T и U . Написав для самого общего случая

$$T = -\beta(t)U, \quad (25.16)$$

можно ожидать, что $\beta(t)$ является сложной функцией времени. Однако при больших t эта функция имеет простое, но важное асимптотическое свойство.

Чтобы его доказать, предположим, что расширение Вселенной имеет вид

$$R(t) \propto t^p. \quad (25.17)$$

Это соотношение верно, по крайней мере на протяжении короткого времени, для любой космологической модели и всегда выполняется для моделей Дирака ($p = 1/2$), Эйнштейна — де Ситтера ($p = 2/3$) и Милна ($p = 1$). В общем случае $p = d \ln R / d \ln t$ будет зависеть от времени, но можно извлечь полезную информацию об эффектах расширения, полагая, что p постоянно и рассматривая разные значения этой величины (как это делалось в гл. 21).

Подстановка соотношений (25.16) и (25.17) в уравнение космической энергии (25.13) дает уравнение

$$\frac{d}{dt}(1 - \beta)U + \frac{p}{t}(1 - 2\beta)U = 0, \quad (25.18)$$

решение которого есть

$$U = U_0(1 - \beta(t))^{-1} \exp \left[\int \frac{p(2\beta - 1)}{(1 - \beta)t} dt \right]. \quad (25.19)$$

Отсюда ясно, что для растущего возмущения, в котором $|U(t)|$ увеличивается, $1/2 < \beta < 1$. Физически все это означает, что такая область находится где-то между состояниями вириального равновесия и свободного расширения. Более интересно то, что уравнения (25.17) и (25.19) показывают сразу же, что при постоянстве или медленных изменениях функции β любые возмущения, у которых U растет пропорционально $R(t)$, должны характеризоваться соотношениями $(2\beta - 1)/(1 - \beta) = 1$ или $\beta = 2/3$ независимо от космологической модели.

Исследование развития нелинейных возмущений можно продолжить, предположив, что $U^{-1} dU/dt = q/T$. Тогда уравнение (25.18) может быть решено относительно β при не зависящих от времени p и q , что дает

$$\beta(t) = \frac{p + q}{2p + q} + \frac{[(2p + q)\beta_0 - (p + q)]}{2p + q} \left(\frac{t_0}{t} \right)^{2p + q}, \quad (25.20)$$

где $\beta(t_0) = \beta_0$. По прошествии длительного интервала времени начальная величина забывается, если предположить, что достигнуто равновесие или стационарное состояние. Нетрудно видеть, что такой процесс свойствен любой модели расширяющейся Вселенной, потому что $(t^{-1} p(t) dt)$ возрастает с временем. «Диссипация» вызывается релаксацией траекторий и смещением фаз. Поэтому

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \beta(t) = \frac{p + q}{2p + q}. \quad (25.21)$$

В стационарном (но не в статическом) состоянии $q = 0$ и $\beta \rightarrow 1/2$ независимо от скорости расширения. В случае модели Эйнштейна — де Ситтера с $p = q = 2/3$ асимптотическое значение β равно $2/3$. Эти результаты в общем согласуются с тем, что получается при моделировании задачи N тел, описанном в гл. 27. «Асимптотическое» состояние на практике часто может достигаться довольно быстро — в течение интервала, составляющего одно-два динамических времени пересечения.

Поскольку $\beta(t)$ после своей начальной релаксации меняется со временем довольно медленно, так что на протяжении большей части эволюции имеет значение от 0,50 до примерно 0,67, можно заменить $\beta(t)$ некоторой осредненной величиной $\bar{\beta}$, скажем, в уравнении (25.18). Тогда корреляционная энергия

эволюционирует согласно соотношению

$$\frac{dU}{dt} = \frac{(2\beta - 1)p}{(1 - \beta)t} U. \quad (25.22)$$

Далее, предположим, что корреляционная функция подчиняется общему степенному закону

$$\xi(r, t) = a(t)r^{-\gamma} \quad \text{для} \quad r_0(t) \leq r \leq r_1(t), \quad (25.23)$$

где r выражено в безразмерных единицах, нормированных на 1 Мпс. Такая форма зависимости предполагается, исходя из факта, что гравитация и квазиньютоновский космологический фон не зависят от масштаба внутри объема, где имеют место корреляции. В следующих главах это предположение рассматривается более подробно. Подставив выражения (25.15) и (25.23) в (25.22), получаем соотношение, описывающее эволюцию

$$\frac{d}{dt} \ln(na) + \left(\frac{1}{2-\gamma} - \ln r_1 \right) \frac{d\gamma}{dt} + (2-\gamma) \frac{d \ln r_1}{dt} = \frac{(2\beta - 1)p}{(1 - \beta)t} \quad (25.24)$$

для $\gamma < 2$ и $r_0 \ll r_1$. Если $\gamma > 2$, результат имеет ту же форму, за исключением того, что члены, содержащие r_1 , меняют знак на противоположный и r_1 заменяется на r_0 . (В обоих случаях оставлены только главные члены разложения r_1 или r_0 .)

Хотя в каждом отдельном случае величина $a(t)$ точно не известна, при больших t можно приближенно записать

$$\frac{d \ln(na)}{dt} = -\frac{p'}{t}. \quad (25.25)$$

Так как $n \propto R^{-3}(t)$, можно было бы получить $p' < 0$, если бы амплитуда корреляции a росла быстрее, чем $R^3(t)$, но такой быстрый рост не получается при моделировании задачи N тел (см. гл. 27). Более того, кажется правдоподобной (но это не доказано) догадка о том, что рост корреляционных функций низкого порядка замедляется, когда корреляции высших порядков, характерные для нелинейного режима, начинают быстро расти. Нам неизвестны также детали поведения $r_1(t)$; к счастью, когда $|\gamma - 2| \ll 1$, это не существенно.

Исследуя устойчивость γ вблизи 2, положим $\gamma(t_0) = \gamma_0$ и решим уравнение (25.24); в результате получим важный результат:

$$\gamma = 2 - (2 - \gamma_0) \left(\frac{t_0}{t} \right)^m, \quad (25.26)$$

где

$$m = \frac{(2\beta - 1)}{(1 - \beta)} p + p'. \quad (25.27)$$

Эта зависимость сохраняется как для $\gamma_0 > 2$, так и для $\gamma_0 < 2$. Полученный результат справедлив в полностью нелинейном режиме сгущивания.

Таким образом, показатель экспоненты $\gamma = 2$ динамически устойчив при приближении к нему как сверху, так и снизу (пока $m > 0$). Как уже известно из рассмотрения линейного режима, показатель $\gamma = 0$ в высшей степени неустойчив. Так как в уравнениях нет других выделенных значений γ , естественно предположить, что $\gamma = 2$ — единственное устойчивое значение.

В широком диапазоне условий эта устойчивость не зависит существенно ни от деталей начальных условий, ни от космологического расширения. Влияние этих факторов, по-видимому, вторично, хотя при очень необычных условиях устойчивость $\gamma = 2$ может быть нарушена. Если Вселенная расширяется очень быстро (большие p), значение $\gamma = 2$ достигается быстрее при больших m . Более того, при сгущивании, близком к вириальному равновесию, γ меняется медленнее, в конце концов прекращая эволюционировать при $\beta = 1/2$ и $p' = 0$.

26. МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧИ N ТЕЛ

Что в познанной мною Вселенной укажет, куда мне идти?

У. Оден

Поскольку классическое гравитационное взаимодействие между точечными массами полностью понятно — этот предмет уже имеет своего Ньютона, — полное решение проблемы сгущивания принципиально возможно. Все, что необходимо, — это проинтегрировать уравнения движения с желаемыми начальными условиями и прочесть ответ. Работа с нелинейными режимами так же проста, как и с линейными. В период примерно с 1960 г., когда стали доступны быстродействующие вычислительные машины, и до настоящего времени были созданы огромные технические возможности для получения этих численных решений. Начиная с первых расчетов, выполненных для пары дюжин частиц, мощность вычислительных средств возрастала более чем на порядок величины каждые десять лет. Сейчас есть возможность проследить поведение нескольких тысяч галактик на протяжении десятков времен релаксации посредством прямого интегрирования.

Постоянно развиваются новые численные методы. Основная их цель — получить как можно больше информации о все большем числе частиц на большем отрезке времени. Часто идут на компромиссы, обычно жертвуя полнотой информации ради увеличения числа частиц. Так как метод прямого интегрирования остается наиболее информативным, а вычислительные машины все время совершенствуются, этот подход будет процветать и в дальнейшем.

Применяя метод прямого интегрирования, уравнения движения интегрируют точно, чтобы сохранить полную информацию обо всех положениях галактик и их скоростях в любой момент времени. В сопутствующих координатах,

когда $\mathbf{x} = \mathbf{r}/R(t)$ [см. уравнение (21.10)], эти уравнения движения могут быть получены из лагранжиана

$$L = \sum_i \frac{1}{2} m R^2 \dot{x}_i^2 - \frac{m}{R} \phi_i(x_i), \quad (26.1)$$

с

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G [\rho(x, t) - \rho_0], \quad (26.2)$$

где $\rho_0 = R^3 \rho$. (Чтобы увидеть, как получается член, выражающий кинетическую энергию, надо вычислить $\dot{\mathbf{r}}$ и вычесть общее расширение $\mathbf{r}\dot{R}/R$). Затем вариации Лагранжа — Эйлера дают

$$\ddot{x}_i + 2\frac{\dot{R}}{R}\dot{x}_i = -R^{-3}\nabla\phi_i \quad (26.3)$$

для i -й галактики. Основные проблемы, возникающие при прямом интегрировании, состоят в том, чтобы решить, как поступать с тесными сближениями, как имитировать влияние реальных границ, как сократить затраты машинного времени и эффективнее использовать память при возможно большем N и, наконец, как вывести огромное количество полученной информации в удобном виде.

В случае тесных сближений галактик можно идти тремя путями. Для очень точных вычислений в плотно населенных системах N тел уравнения движения могут быть регуляризованы. Это форма перенормировки, при которой избавляются от сингулярности в точке $r=0$, переходя к новым независимым переменным (*Kustaanheimo and Stiefel*, 1964; *Aarseth*, 1971; *Aarseth and Zare*, 1974; *Heggie*, 1974). Особенно уместен такой прием в случаях, когда случайная составляющая скорости в движении галактик вначале пренебрежимо мала и система проходит через стадию, на которой возникают пары галактик, движущиеся по очень эксцентрическим орбитам. Другой прием состоит в том, что на то время, когда происходит тесное сближение, в расчеты автоматически вводится аналитическая кеплеровская орбита, от которой отказываются, когда галактики расходятся. Чтобы увидеть, происходит ли тесное сближение, требуется громоздкая проверка. Обычно проще и много быстрее пользоваться смягченным гравитационным потенциалом, пропорциональным $(r^2 + \epsilon^2)^{-1/2}$. Параметр ϵ позволяет учитывать конечный размер галактики и иногда обеспечивает более верное приближение при решении конкретной задачи, чем потенциал r^{-1} . Как правило, значение ϵ (в долях полного радиуса) заключено между 0,01 и 0,05. Этот прием используется также для звездных систем, хотя звезды больше похожи на точечные массы, чем галактики. Перебирая модели с различными значениями ϵ , можно найти результаты, на которые этот параметр не влияет.

Более важными являются граничные условия, особенно когда пользуются малым числом N , чтобы представить много большие системы. Для конечных скоплений звезд и галактик свободные границы возникают естественным образом, и здесь трудностей нет. В случае бесконечной системы мы должны за-

ранее определить, что случится с галактикой, которая достигнет края искусственно ограниченной области. Один способ заключается в рассмотрении периодической структуры с единичными кубическими ячейками. Как только галактика покидает одну грань, она вновь появляется, двигаясь внутрь куба от противоположной грани. При другом способе предусматривается зеркальное отражение уходящей галактики от границы. В среднем такая операция уменьшает полную энергию. Чтобы этого избежать, можно предположить отражение галактик от границы со случайными скоростями, которые удовлетворяют в среднем ограничениям со стороны энергии и импульса. Важность этих эффектов, включая рост флуктуаций, начинающийся на границе, возможно, еще не понята в деталях. Предположительно, они становятся менее важными с возрастанием N , но при $N \leq 10^3$ их роль не ясна.

Проблемы быстродействия и памяти смягчаются, если использовать схему интегрирования, в которой рассматривают отдельно силы, обусловленные близкими и далекими галактиками (*Ahmad and Cohen*, 1973; *Aarseth*, 1984). Воздействие удаленных объектов на каждую данную галактику меняется медленнее, чем воздействие соседних галактик. Поэтому силы от далеких объектов могут быть рассчитаны с более крупным шагом, чем воздействие соседей; объем вычислений при этом значительно снижается.

Извлечь требуемую информацию при машинном моделировании нетрудно, если известно, какой вид информации нужен в первую очередь. Такие результаты, как корреляционные функции, каталоги групп, распределения скоростей, точность, с которой выполняется теорема вириала в подсистемах, влияние спектра масс, образование пустых полостей и т. д., легко доступны. Запоминающая необходимую информацию каждый раз по истечении примерно половины динамического времени, можно сохранить запись эксперимента. При возникновении новых вопросов достаточно «пронаблюдать» старый эксперимент с новой точки зрения. При этом можно фиксировать картины через определенные промежутки времени и монтировать фильмы, позволяющие наблюдать интереснейшую картину эволюции. Если рассматривать такие картины, искусственно вращая систему вокруг ее центра, то благодаря изменению параллакса получается впечатляющий трехмерный эффект. Цифровая вычислительная машина здесь, на земле, может имитировать грандиозный небесный аналоговый компьютер.

Методы прямого интегрирования имеют как достоинства, так и недостатки. Самое важное их достоинство состоит в том, что на пути от постановки физической задачи к ее решению вводятся лишь немногие предположения. Более того, их сложность и полнота обеспечивают огромную гибкость в отношении тех вопросов, которые могут быть выяснены моделированием. С другой стороны, имеются два недостатка. Один из них — относительно малое число N . Это обстоятельство не порождает трудностей, когда рассматриваются скопления звезд или галактик, однако проявляется в граничных эффектах, когда приходится работать с представительным объемом много большего распределения. Другой недостаток состоит в том, что погрешности, возникающие вследствие округления при вычислениях, делают невозможным точное воспроизведение индивидуальных траекторий. Разные машины и програм-

мы также воспроизводят неодинаковые траектории, когда время интегрирования велико. Несмотря на это, многочисленные исследования (см. обзор *Aarseth and Lecar, 1975*) приводят к заключению, что макроскопические и статистические свойства, осредненные по большому числу частиц или систем, определяются точно. Например, хотя при повторных расчетах эволюции из одного и того же скопления выбрасывается не обязательно одна и та же галактика, средняя скорость потери галактик в различных расчетах почти совпадает.

Трудные ситуации иногда возникают, если нужны модели с очень большим числом точек N . Один пример — это сгущивание галактик; образование галактики из богатых звездных скоплений или столкновения галактик — другие примеры. Существует много методов расчетов, в которых жертвуют точностью или детальностью информации ввиду особой важности большого N . Один подход, применимый к бесстолкновительным системам, состоит в замене уравнения Больцмана набором его моментов. Цепочку уравнений для моментов обрывают, вводя основные физические предположения; при этом теряется информативность. При более искусственном подходе моделируется решение уравнения Фоккера — Планка с естественными допущениями относительно переходных процессов и связанных с ними коэффициентов диффузии (*Spitzer, 1974*). Далее, существуют приближения, которые позволяют моделировать задачу N тел путем усреднения движений масс по большому объему, причем часто рассматривают сферические оболочки. Эти модели быстро считаются, дешевы и просты; обычно они предназначены для ответа на ограниченное число частных вопросов.

Альтернативный подход, который наиболее близок по духу к прямому интегрированию, — это схема частица — сетка [см. книгу Хокни и Эствуда (*Hockney and Eastwood, 1981*), которая посвящена подробному обсуждению рассмотренных выше, а также других, родственных им методов]. Идея метода состоит в том, чтобы разделить силу, действующую на каждую частицу, на две составляющие. Быстро меняющиеся силы от ближайших соседей (со смягченным потенциалом) непосредственно суммируются. Другая составляющая — силы со сглаженными вариациями, охватывающие большую область, — представляются сеткой. Это прямоугольная решетка, состоящая из фиксированных точек, расположенная в кубическом объеме, содержащем галактики. Каждой точке этой сетки приписывается масса, которая представляет имеющееся распределение плотности. Такая конфигурация определяет сглаженное силовое поле, которое интерполируется к положению каждой частицы. После сдвига частиц в их общем силовом поле на единичный промежуток времени параметры решетки меняются в соответствии с новым положением, и вычисления продолжают. Такой метод сглаживания позволяет проследить движение десятков тысяч галактик в течение долгого времени и с хорошей точностью.

Все эти подходы могут быть использованы во многих (но не во всех) астрономических экспериментах. Некоторые результаты, иллюстрирующие основные физические характеристики различных гравитационных систем, описаны в следующих главах. Мы начинаем с результатов, относящихся к двухто-

ческой корреляционной функции $\xi(r)$, и переходим к корреляциям более высокого порядка.

Бесконечным потоком
Вытекающие из компьютеров,
Числа прядут
Свою сеть вокруг науки.

27. ЭВОЛЮЦИОНИРУЮЩЕЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Занавес Вселенной в прорехах и разрывах,
Великолепнокрылые миры рассеиваются,
Как бросаются враспыльную дикie голуби.

Шелли

Множество модельных расчетов для задачи N тел показали, как рассеиваются галактики и как скопление, подобно Вселенной, расширяется. Ниже рассматриваются некоторые убедительные примеры этих процессов. Вычисления Аарсета и его сотрудников (см. ссылки в библиографической главе) для 4000 галактик имели целью показать, как различные начальные условия и космологические модели, заданные внутри допустимых пределов, влияют на сгущивание галактик. В моделях, где начальные скорости соответствуют неискаженному хаббловскому потоку, поведение галактик во многом такое же, как в моделях с пекулярными максвелловскими скоростями, не превышающими скорости расширения. В обоих случаях гравитационная фрагментация создает самосогласованное поле скоростей по истечении примерно одного хаббловского времени.

Несколько большее значение имеет распределение галактик по массам. При расчетах оно не меняется со временем, хотя образующиеся малые группы могут имитировать влияние удаленных галактик большей массы на более поздних стадиях сгущивания. Различные эксперименты показали, что более массивные галактики проявляют большую тенденцию к сгущиванию. Амплитуда их двухточечной корреляционной функции, например, возрастает быстрее, чем у менее массивных галактик. Исходя из линейного анализа [уравнение (24.1)], этого можно ожидать по крайней мере для процесса первоначального сгущивания, когда распределение скоростей не сильно зависит от массы. Эксперименты также показывают, что многие результаты, особенно относящиеся к пространственному распределению, не сильно зависят от детальных свойств спектра масс, пока он непрерывно заполняет диапазон, перекрывающий по крайней мере один порядок величины. Эксперименты с 4000 галактик позволили выбрать спектр масс вида

$$N(m)dm \propto \frac{m^*}{m} e^{-m/m^*} dm. \quad (27.1)$$

Общий диапазон значений масс имеет пределы $0,037 < m/m_* < 25,2$, что приблизительно согласуется с данными по функции светимости галактик, хотя соотношение масса — светимость для них очень неопределенно. Если привести принятую за основу сравнения массу m_* к физической величине, следующей из оценок зависимости масса — светимость, то получится, что $m_* \approx 5 \cdot 10^{12} \times (\Omega/0,1) M_\odot$, где $\Omega = \rho/\rho_c$ — современное отношение плотности массы к критической плотности для параболической ($q_0 = 1/2$) космологической модели Фридмана. Однако m_* — не самая вероятная масса галактики, которая на самом деле меньше, потому что величина $N(m)$ сильно уклоняется в сторону малых масс с $\langle m \rangle = 1$ (в единицах m_*).

Исходное пространственное распределение чрезвычайно важно. Эксперименты по моделированию Вселенной часто начинаются с задания однородного распределения, хотя возможны примеры с крупномасштабными «встроенными» структурами. Однородное распределение может, конечно, быть скученным. Обычно это скучивание определяется величиной n в выражении, где первоначальные флуктуации плотности, охватывающие общую массу M , имеют вид

$$\frac{\delta\rho}{\rho} \propto M^{-1/2 - n/6}. \quad (27.2)$$

При пуассоновском распределении $n = 0$, а величина $n = -1$ означает первоначально более скученное распределение.

Эксперименты при $n = 0$ проводятся легко, так как в них просто задаются случайные координаты галактик внутри начальной сферы. Труднее начинать эксперимент при определенной величине $n \neq 0$, поскольку практически отсутствует теория, способная связать алгоритм, определяющий положения галактик, с величиной n , получаемой в результате. Особенно трудно делать это без встраивания избранного масштаба расстояний в корреляционную функцию. В экспериментах с 4000 галактик начальные условия скучивания получены в основном следующим образом. Сначала определим ось z случайным образом в начальной сфере. Поместим галактику также случайно внутри сферы на ортогональной к оси плоскости $x - y$. Поместим следующие галактики на определенных интегральных расстояниях вдоль стержня внутри сферы. Затем найдем другую ось z и повторим процедуру, пока не наберется желаемое общее число галактик. Хотя такая процедура вводит в корреляции масштаб длины, она обеспечивает аппроксимацию $n = -1$ для начальных флуктуаций. Следы исходного масштаба расстояний остаются в двухточечной корреляционной функции, но перестают доминировать после того, как радиус модели Вселенной станет вдвое или вчетверо больше. В других экспериментах задается начальное антискучивание посредством разделения области на мелкие ячейки и размещения в каждой из них по одной галактике случайным образом (Efsthathiou and Eastwood, 1981). Это, естественно, подавляет последующий рост корреляций; полученные таким образом результаты дают наклон $\xi(r)$, сильно отличающийся от наблюдаемого.

Наконец, эксперимент позволяет сделать выбор космологической модели, чтобы определить $R(\eta)$. Обычно используются две крайние модели с современ-

ными значениями параметра $\Omega = 0,1$ или $1,0$. Они охватывают область значений, отвечающую наблюдениям.

На рис. 26 показаны в проекции на плоскость типичные картины эволюции сгущения, полученные из вычислений в работе Аарсета и др. (Aarseth et al., 1979) для 4000 галактик. Представлен случай, когда $n = -1$ и $\Omega = 0,1$. Четыре «моментальных снимка» проекций пространственного распределения соответствуют красным смещениям, равным примерно 31, 8, 2 и современному состоянию. Это полезная иллюстрация многих свойств, так как она представляется совместимой с современными наблюдениями. Качественно картина не противоречит большинству других результатов моделирования, но, как будет показано ниже, некоторые количественные детали существенно разнятся.

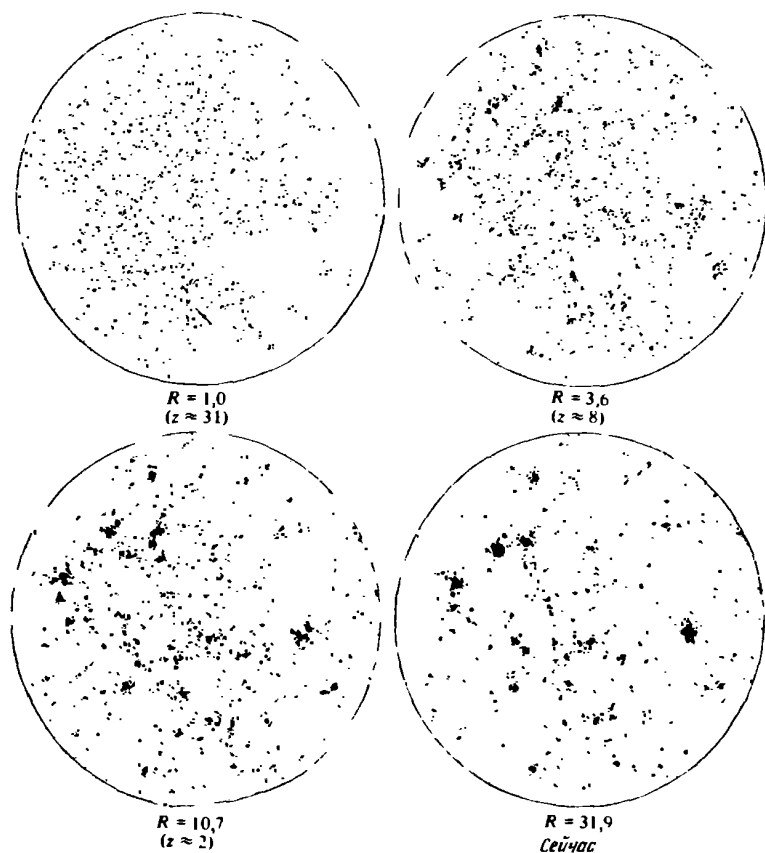


Рис. 26. Четыре «мгновенных снимка» с проекций эволюционирующего пространственного распределения галактик в модели с $\Omega = 0,1$ и $n = -1$. Относительные радиусы соответствуют красным смещениям 31, 8, 2 и настоящему времени.

Чтобы рисунки было удобнее разместить на странице, системы показаны в сопутствующих координатах. Современный диаметр модели при $R = 31,9$ равен 100 Мпс в соответствии с наблюдаемым сейчас значением постоянной Хаббла $H = 50$ км/(с·Мпс). Сгущение в эксперименте начато при красном смещении $z = (R_{\text{сейчас}}/R_0) - 1 \approx 31$, чтобы оставалось достаточно времени для роста амплитуды $\xi(r)$ до величины, сравнимой с наблюдаемой (позже об этом будет сказано подробнее).

Первоначально распределение совершенно однородно, хотя видны несколько цепочек. Эта «суперфрагментация» помогает развитию сгущения на ранней стадии, а цепочки вскоре исчезают. Вблизи $z = 8$ малые группы и скопления уже хорошо выражены. Большинство этих групп гравитационно связаны и образуют ядра, вокруг которых сгущается все больше галактик. При $z \approx 2$ скопления становятся очень хорошо выраженными. Между этой эпохой и настоящим временем скопления стягиваются и становятся плотнее, а число галактик поля уменьшается. В некоторых местах это обеднение приводит к образованию больших областей, полностью лишенных галактик. Процесс в целом напоминает фазовый переход. Обычные атомные или молекулярные фазовые переходы (например, жидкость — газ) переводят систему целиком из одного состояния в другое. В отличие от них при гравитационных фазовых переходах система из однородного состояния переходит в состояние с двумя компонентами. Скопления с отрицательной полной энергией нарушают симметрию распределения галактик в новом, большем масштабе. Между скоплениями находятся галактики, обладающие большей энергией. Они унесли энергию связи из скоплений (род диссипации), образовав новую компоненту системы. Более того, в отличие от химических фазовых переходов гравитационные фазовые переходы не достигают финального состояния равновесия. Они стремятся привести распределение во все более сгущенное состояние, хотя в конце концов временной масштаб изменений может стать очень большим.

Если посмотреть на рис. 26, то можно предположить, что центральные и близкие к границе области существенно не отличаются друг от друга. Нет впечатления, что скопления предпочитают одну область другой. Количественные характеристики, подобные двухточечной корреляционной функции, подтверждают впечатление, что граничные условия не очень существенны. Тем не менее корреляционные функции для расстояний r обычно вычисляют, используя только галактики, расположенные от границы на расстоянии, не меньшем чем r .

Двухточечная корреляционная функция представляет собой одну из объективных характеристик, которые позволяют сравнить непосредственно теории с наблюдениями. Так как информация, полученная из численных экспериментов, является полной, пространственные корреляции могут быть вычислены легко и без ошибок в определении расстояний, присущих наблюдениям. С другой стороны, область, в которой может быть точно определена функция $\xi(r)$, ограничена. Среднее расстояние между частицами устанавливает нижнюю границу для возможности различить пуассоновское и другие начальные условия. Крупные флуктуации случаются на меньших масштабах, отчего очень трудно различить большинство непуассоновских начальных условий. Радиус области,

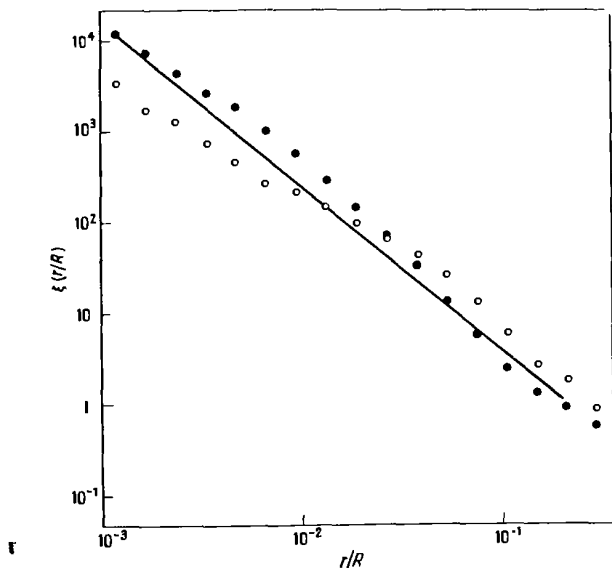


Рис. 27. Ковариантные функции $\xi(r)$ в экспериментах с моделями $\Omega = 1$, $n = -1$ при $R = 10,7$ (кружки) и $\Omega = 0,1$, $n = -1$ при $R = 32$ (точки). Для сравнения приводится прямая $\xi(r) = 70 r_{\text{Мпс}}^{-1,8}$ (Gott et al., 1979).

занимаемой выборкой, определяет верхнюю границу. Действительно, число имеющихся пар быстро уменьшается, когда r приближается к R , что приводит к возрастанию статистической неопределенности ξ (см. подробности в работе Kiang and Saslaw, 1969). На практике значение $r \approx 0,5 R$ близко к верхнему пределу для системы, содержащей $\sim 10^4$ галактик.

Основной результат исследований состоит в том, что вначале величина $\xi(r)$ мала, а затем растет, пока ее рост не начнет подчиняться степенному закону приблизительно в форме $\xi(r) \propto r^{-2}$ при больших ξ . На рис. 27 и 28 (Gott et al., 1979) поведение функции $\xi(r)$ показано для экспериментов с 4000 галактик при различных значениях Ω и n . В каждом эксперименте сгущение галактик начинается при неискаженном хаббловском расширении в момент времени, выбранный таким образом, чтобы амплитуда $a(t)$ функции $\xi(r, t)$ и постоянная Хаббла совпадали с наблюдаемыми в настоящее время значениями $a \approx 50$ и $H = 50$. Табл. 3, также взятая из работы Готта и др. (Gott et al., 1979), показывает полученные в результате современные амплитуды и показатели степени для $\xi(r, t)$. Вначале в полученных результатах показалось удивительным то, что они почти не чувствительны к изменению значений Ω и n . Это разочаровало тех теоретиков, которые надеялись использовать наклон функции ξ — одну из немногих достоверных характеристик наблюдаемой Вселенной, — чтобы узнать значение параметра Ω . Более широкий эксперимент с большим числом галактик и применением других методов интегрирования,

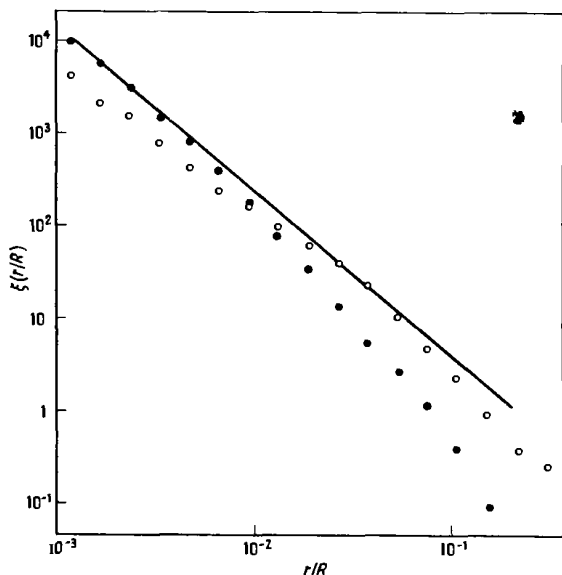


Рис. 28. Ковариантные функции $\xi(r)$ в экспериментах с моделями $\Omega = 1$, $n = 0$ при $R = 10,7$ (кружки) и $\Omega = 0,1$, $n = 0$ при $R = 22,6$ (точки). Для сравнения показана прямая $\xi(r) = 70 r_{\text{Мпс}}^{-1,6}$ (Gott et al., 1979).

например метода частица — сетка, подтвердил этот общий вывод (Efsthathiou and Eastwood, 1981). Существует даже один (неопубликованный) расчет Аарсета, где галактики вначале размещались случайным образом на шести гранях куба в расширяющейся Вселенной. Как оказалось, по прошествии интервала времени, равного одному или двум характерным временам первоначального расширения, галактики заполняют сферический объем. Можно заметить, что их двухточечная корреляционная функция снова очень хорошо представляется зависимостью r^{-2} . Тем не менее следы первоначального размещения на гранях куба остаются еще заметными, показывая, что корреляции высоких порядков релаксируют дольше, как и следовало ожидать. Таким образом, видимо, величина γ не может много сказать об условиях сгущения галактик.

Другие эксперименты начинались с условий, в которых была заложена ярко выраженная структура, например, «блины», синусоидальные возмущения с большой амплитудой или возмущения с различными степенными спектрами и различными условиями обрезания. Если эти системы не имеют возможности или времени релаксировать полностью, то, естественно, сгущение, получаемое в результате, оказывается тесно связанным с доминирующим начальным распределением. Вопрос о том, можно ли представить нашу Вселенную с помощью подобных систем, остается открытым.

В экспериментах также исследовался рост амплитуды $\xi(r, t) = a(t)r^{-\gamma}$ во время нелинейной фазы ее изменения. Расчеты для 1000 галактик (Efsthathiou,

Таблица 3. Величина $\xi(r) = ar_{\text{Мпс}}^{-\gamma}$, полученная в экспериментах с 4000 галактик (Gott et al., 1979)

Ω	n	a	γ
0,1	-1	90	1,9
1,0	-1	80	1,4
0,1	0	30	2,3
1,0	0	40	1,7

1979) при пуассоновских начальных условиях и $\Omega = 1$ показали, что пока R возрастало от 2,6 до 14,4, $a(t)$ возрастало примерно в 30 раз. У моделей с современным значением $\Omega = 0,1$ возрастание R от 2,6 до 31 также увеличивало $a(t)$ примерно в 30 раз. Поэтому aR^{-3} является убывающей функцией времени, как следует из обсуждения, приведенного после формулы (25.25), которое касается уравнения космической энергии.

Другой аспект, связанный с уравнением космической энергии, относится к величине $\beta(t)$, представляющей зависимость между кинетической и потенциальной энергиями корреляций [соотношение (25.16)]. Эксперимент с 400 галактиками (Miyoshi and Kihara, 1975) показывает, что по истечении нескольких времен релаксации $\beta(t)$ начинает флуктуировать между 0,6 и 0,7. Хотя, исходя из соотношения (25.21), следует предположить, что $\beta \approx 2/3$ при $p \approx q$, простой вид зависимости $U(t)$, возможно, неприменим к этой стадии (вопрос об этом еще не решен). Тем не менее вывод о том, что β перестает заметно эволюционировать, представляется правильным, так как при нелинейном режиме большая часть энергии корреляций близка к уровню вириального равновесия, и новые корреляции на больших масштабах вносят относительно меньший вклад в общую энергию.

Ясно, что двухточечные корреляционные функции очень полезны и информативны при количественном описании сгущения, но поскольку они описывают сгущение далеко не полностью, необходимо прилагать усилия и в других направлениях. В каких же именно? Наиболее очевидным подходом представляется проверка 3-, 4-, 5-, ..., 20-, ... и т. д.-точечных корреляционных функций или тесно с ними связанного фурье-спектра распределения плотности. В этом направлении приложены огромные усилия, но до сих пор не было получено ни практически полезных результатов, ни их теоретической интерпретации. Помимо того что корреляции высокого порядка трудно измерять и еще труднее интерпретировать (см. замечания в конце гл. 24), при нелинейном сгущении они тесно связаны друг с другом. Таким образом, нам не на чем остановиться, кроме как на двухточечных корреляциях!

Ситуация требует решительного шага. Одной из возможностей является

возвращение к подходящим моделям скоплений и множественным функциям для групп. Но в этом случае не вполне ясно, что же такое группы? Неоднозначность в определении их границ (как по скорости, так и в пространстве) ведет к многообразию моделей. Которая из них будет лучше всего характеризовать экспериментальное распределение плотности? Будет ли эта модель также наилучшим образом обеспечивать понимание динамики многих тел? На эти вопросы пока нет ответа.

Пока не достигнуто лучшее понимание, мы можем измерить сгущение высоких порядков, приняв весьма радикальную точку зрения, в корне отличающуюся от того, что обсуждалось до сих пор. Вместо того чтобы сосредоточиться на скоплениях, рассмотрим полости, где галактик нет. Пустую область относительно просто найти и измерить. Если внутри нее непрерывно распределено n галактик, то такая полость связана с $n + 1$ -точечной корреляционной функцией. Эта функция описывает n отсутствующих галактик и одну галактику, определяющую масштаб полости. Этот масштаб устанавливается с помощью галактики, ближайшей к той точке пространства внутри полости, которая находится дальше всего от границы. Первый и наиболее очевидный шаг при таком подходе состоит в рассмотрении полости сферической формы. Позднейшие уточнения позволяют принять в расчет более сложные формы. При дальнейшем расширении этого подхода, как в гл. 34, можно также рассматривать области, содержащие одну, две, три и т. д. галактики, пока это описание не превратится в описание в понятиях групп и корреляционных функций высокого порядка.

В качестве первого шага в этом направлении эксперименты с 4000 галактик, о которых речь шла выше, были проанализированы в отношении эволюции полостей (*Aarseth and Saslaw, 1982*). В начальном пуассоновском распределении легко рассчитать вероятность того, что данный объем окажется пустым. Эта вероятность связана с распределением ближайших соседей. Выбрав произвольную точку пространства, зададимся вопросом, какова вероятность того, что ближайшая галактика находится на расстоянии между r и $r + dr$. Эта вероятность такова:

$$\omega(r)dr = (\text{вероятность отсутствия галактик между } 0 \text{ и } r) \times (\text{вероятность нахождения галактики на расстоянии } r) = \left[1 - \int_0^r \omega(r)dr \right] 4\pi nr^2 dr. \quad (27.3)$$

Чтобы решить это интегральное уравнение, просто перепишем его в виде

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{\omega(r)}{4\pi nr^2} \right] = -\omega(r) = - \left[\frac{\omega(r)}{4\pi nr^2} \right] 4\pi nr^2, \quad (27.4)$$

откуда

$$\omega(r)dr = 4\pi nr^2 \exp[-4\pi nr^3/3]dr. \quad (27.5)$$

Далее, вероятность того, что ближайшая галактика находится между r и $r + dr$, равняется также P_0 — вероятности отсутствия галактик в объеме V

между 0 и r , умноженной на вероятность $n dV$ того, что одна галактика находится в элементе объема от V до $V + dV$:

$$\omega(r)dr = nP_0 dV. \quad (27.6)$$

Сравнение последних двух уравнений показывает, что вероятность обнаружить полость объема V равна

$$P_0(V) = e^{-nV} \quad (27.7)$$

для пуассоновского распределения.

Когда сгущивание становится значительным, можно формально обобщить выражение (27.7) (см. *White, 1979*). К сожалению, такие результаты трудно применять, потому что члены разложения низших порядков у них, по-видимому, расходятся. Как и в цепочке уравнений ББГКИ, неприятное преобладание скоплений высоких порядков вытекает из свойств самих уравнений. В гл. 34 показано, как можно подойти к решению этой проблемы. Между тем можно поискать ориентиры в моделировании задачи N тел.

Это можно сделать, даже учитывая, что такое моделирование не дает прямого ответа, поскольку статистика полостей зависит от их формы. Полости несферической формы трудно анализировать, но вопрос о распределении сферических полостей хорошо разработан. Здесь можно рассматривать вероятностное распределение минимальных размеров полостей неправильной формы. Хотя расчеты для 4000 галактик проводились в области радиусом 50 Мпс, распределение полостей получено во внутренней области радиусом 40 Мпс, чтобы свети к минимуму граничные эффекты. В этом внутреннем объеме случайным образом выбираются 12 000 точек. Для каждой из них вычисляется расстояние до ближайшей галактики. Примем, что $N(r_{nn} > r)$ есть число точек, расстояние которых до ближайшей соседней галактики превышает r . Тогда величина

$$g(r) = \frac{1}{N_{\text{общ}}} N(r_{nn} > r) \quad (27.8)$$

является хорошей оценкой для $P_0(r)$ — вероятности найти пустую полость объема $V = 4\pi r^3/3$. (Большая полость содержит множество меньших). Она представляет собой кросс-корреляцию между положениями галактик и хаотически расположенных точек.

Наблюдения, содержащие данные о галактиках, расположенных на известных расстояниях, также можно проанализировать прямо, пользуясь этим алгоритмом. Ясно, что размеры полостей будут зависеть от точки обрыва функции масс (из наблюдений получается функция светимости). Даже если соотношение масса — светимость для галактик известно очень плохо, расчеты и наблюдения можно нормировать на одну и ту же среднюю плотность числа объектов.

На рис. 29 (*Aarseth and Saslaw, 1982*) показана получившаяся вероятность найти полость радиуса r в моделях с $\Omega = 1$ и $\Omega = 0,1$ при $n = -1$ и $m/m_* > 1$. В каждой модели насчитывается при таком выборе точки обрыва функции масс около 650 галактик, что соответствует средней плотности около $2,5 \cdot 10^{-3}$ га-

лактик на 1 Мпс^3 . С целью сравнения на рисунке представлено и уравнение (27.7) для $N=650$; оно хорошо соответствует начальным пуассоновским условиям (это не показано на рисунке). Как и следовало ожидать, начальное распределение для $n = -1$ несколько более скучено, чем для $n = 0$, о чем свидетельствует более высокая вероятность найти большие полсти. Так как система эволюционирует, полости растут на все больших масштабах, пока распределение не примет на диаграмме современную форму. Отклонения от статистики Пуассона становятся существенными и очевидными на всех расстояниях больше $1-2 \text{ Мпс}$. Графики для $n = 0$ во многом аналогичны приведенным.

Радиус наиболее вероятной полости определяется максимумом дифференциального распределения, представляющего собой число полостей с радиусами, заключенными между r и $r + dr$; в сущности это производная от функции, представленной кривой на рис. 29. Поскольку найдено, что дифференциальные распределения в высокой степени симметричны, этот максимум появляется приблизительно при значении r , для которого $g(r) = 0,5$, и имеет довольно плоскую вершину на протяжении $2-3 \text{ Мпс}$. Влияние расположения точки обрыва функции масс (или светимостей) на размер наиболее вероятной полости в основном определяется средним расстоянием между галактиками, и соот-

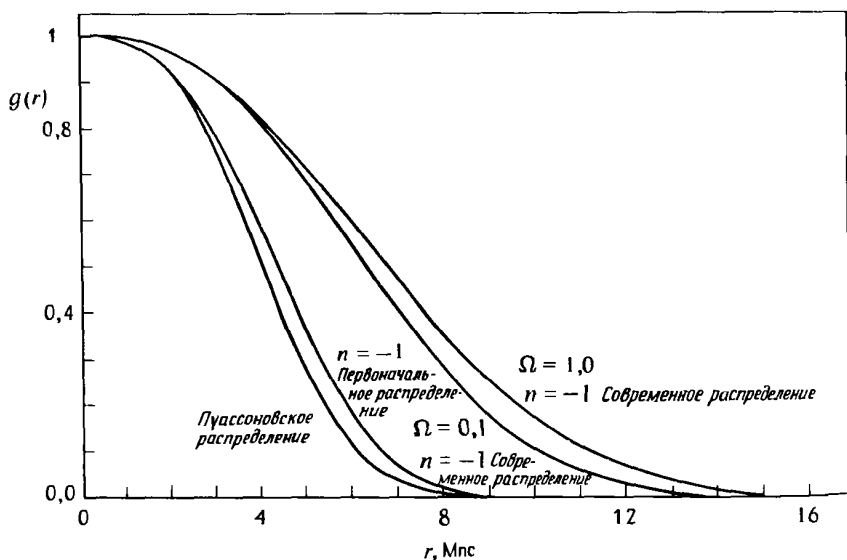


Рис. 29. Вероятность $g(r)$ найти сферическую полость радиуса r в распределении галактик с массой $m/m_* > 1$ в эксперименте с 4000 галактик. Показаны первоначальные и современные вероятности в космологических моделях с $n = -1$ и $\Omega = 1,0$ или $0,1$. Вначале в обоих космологических моделях распределение одинаково. Для сравнения показан теоретический результат в случае пуассоновского распределения (Aarseth and Saslaw, 1982).

ветствующая зависимость оценивается как корень кубический из плотности числа галактик. (Отмечается также слабая тенденция к образованию скоплений вокруг наиболее массивных галактик.) Размеры наибольших полостей, соответствующие хвосту распределения, отклоняются от оценок, сделанных на основе средних межгалактических расстояний, и, хотя такие оценки могут служить неплохим первым приближением, на размеры довольно сильно влияют детали процесса сгущивания.

В полости радиусом 10 Мпс, например, можно ожидать наличия около 10 галактик с $m/m_* > 1$, если распределение однородно. Поэтому существование полостей связано с корреляционными функциями очень высоких порядков. Несмотря на это, космологические модели и начальные условия относительно слабо влияют на сгущивание. Таким образом, как и при двухточечных корреляциях, сгущивание в больших масштабах, видимо, определяется в первую очередь существом гравитационной задачи многих тел и лишь во вторую очередь окружением и возникновением флуктуаций. Это делает наблюдаемое распределение полостей мощным обобщающим тестом для теорий гравитационного сгущивания.

Существует ли мера сгущивания, чувствительная к типу космологической модели? До сих пор мы изучали развитие сгущивания в пространстве координат. Дополнительная эволюция происходит в пространстве скоростей. К ней мы теперь и обратимся.

28. ЭВОЛЮЦИОНИРУЮЩЕЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТЕЙ

Естественно предполагать, что пекулярные скорости должны расти с возрастанием пространственного сгущивания. И снова моделирование задачи N тел обеспечивает правильное понимание этого процесса, особенно в нелинейном режиме. Поскольку распределение скоростей сильно зависит от степени сгущивания, важно разделить галактики в соответствии с контрастом плотности в их ближайшем окружении.

В экспериментах с 4000 галактик, например, возможно прямое использование схемы интегрирования с целью определить плотность числа объектов внутри малой сферы, окружающей некоторую галактику. Сфера выбирается так, чтобы внутри нее флуктуационная компонента силы тяготения преобладала. В результате получается мера контраста локальной плотности, который меняется от 10^4 или 10^5 в центрах богатых скоплений до менее чем 0,5 среди галактик поля. Подвыборка галактик поля может формироваться также на основе требования, чтобы расстояние до ближайшей галактики было по крайней мере вдвое больше среднего расстояния между объектами в однородном случайном распределении. Эти наиболее изолированные галактики будем называть совершенно изолированными галактиками поля. Они почти всегда находятся очень далеко от гало скоплений.

Если использовать этот критерий относительной степени изоляции галактик, то в модели с $\Omega = 0,1$ и $n = -1$ около 23% всех галактик находится в скоплениях (контраст плотности > 100), около 62% распределено промежуточным

образом (контраст плотности от 100 до 0,5), 15% — это галактики поля и 5% — совершенно изолированные галактики поля. Можно использовать различные алгоритмы для определения концентрации как в экспериментах, так и в наблюдениях. Их важный аспект — относительная степень изоляции.

Полосы Хаббла — это аналоги пространственных скоплений в поле скоростей. Чтобы понять это, сначала найдем пекулярную скорость v каждой галактики в радиальном направлении:

$$v = v_r - rH \quad (28.1)$$

и в направлениях, перпендикулярных радиальному. В центре сферы, представляющей на основе численного моделирования типичную область Вселенной, поместим воображаемого наблюдателя. Нанося на график пекулярную лучевую скорость каждой галактики в зависимости от ее расстояния от наблюдателя по лучу зрения, получим полосы Хаббла. На рис. 30 (Saslaw and Aarseth, 1982) показаны такие полосы для скопления галактик в настоящее время в модели с $\Omega=0,1$ и $n=-1$. Меньшее число таких полос присутствовало в более раннюю эпоху. Галактики поля также распределены много более однородно. Каждая полоса Хаббла содержит дисперсии скоростей всех скоплений, расположенных на данном радиусе, наглядно представляя среднюю интенсивность сгущивания скоростей. На рис. 26 для $R=31,9$ показано соответствующее пространственное сгущивание.

Поскольку Вселенная расширяется, пекулярные скорости имеют тенденцию к адиабатическому затуханию: $v \propto R^{-1}$. В экстремальном случае, если бы наиболее изолированные галактики поля вели себя подобно газу из нерелятивистских частиц, на них оказывал бы влияние только сглаженный усредненный фон поля тяготения. Тогда адиабатическая зависимость между давлением и плотностью $P \propto \rho^{5/3} \propto R^{-5}$ в сочетании с зависимостью между давлением и плотностью энергии $P \propto Nu^2/R^3$ дает $v \propto R^{-1}$. С другой стороны, можно вывести этот результат прямо из уравнения движения (26.3) для пекулярной скорости в сопутствующей системе $v = \dot{r} - rH = R\dot{x}$. Для сглаженного фона $\nabla\phi=0$ и уравнение (26.3) принимает вид $d(Rv)/dt=0$, откуда $v \propto R^{-1}$.

Оба этих аргумента неверны, поскольку основаны на ложных предпосылках. Эксперименты с системами N тел позволили понять, что адиабатическое расширение не доминирует в рассматриваемых движениях. Неоднородные силы от удаленных формирующихся скоплений гораздо более существенны, даже для наиболее изолированных галактик поля.

На рис. 31 показано расхождение между экспериментальными результатами и адиабатическим затуханием при моделировании с параметрами $\Omega=0,1$, $n=-1$ (другие параметры дают сходные результаты). Число совершенно изолированных галактик поля при $R=3, 9$ и 32 равно 202, 197 и 176 соответственно; численность этой популяции существенно не меняется. В первоначальном неискаженном потоке Хаббла быстро устанавливается дисперсия скоростей, близкая к 90 км/с. Затем она уменьшается много медленнее, чем при адиабатическом затухании.

Отметив отклонения от адиабатического затухания в движении совершенно изолированных галактик поля, нетрудно понять причины этих отклонений.

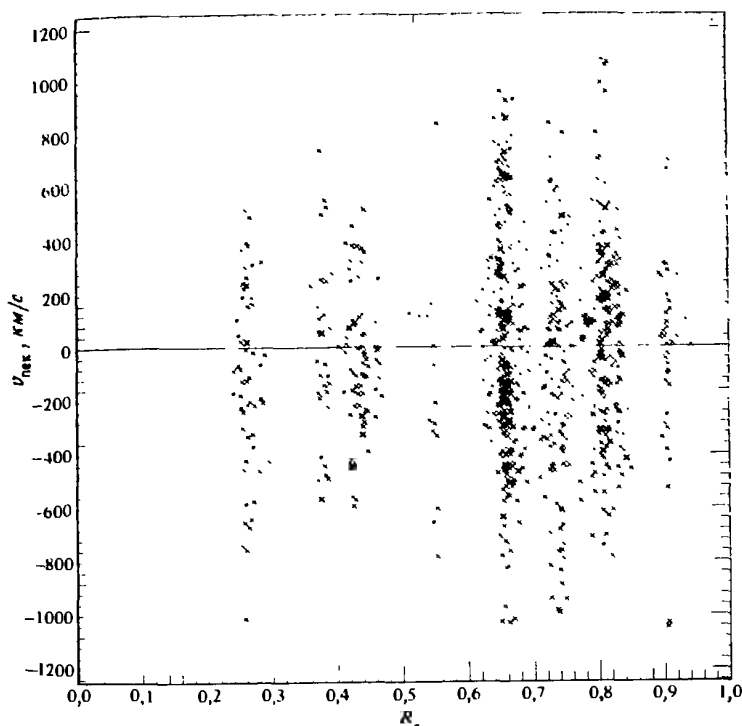


Рис. 30. Пекулярные радиальные скорости галактик в скоплении на данном относительном расстоянии от центра ($R_* = r/R$) в модели с $\Omega = 0,1$, $n = -1$, $R = 31,9$ в настоящее время ($C > 100$) (Saslaw and Aarseth, 1982).

Возмущения движения галактик большими (хотя и удаленными) скоплениями могут почти нейтрализовать эффекты адиабатического расширения. Чтобы увидеть это в простейшем случае, рассмотрим уравнение движения в сопутствующей системе (26.3) для совершенно изолированной галактики поля, движение которой возмущено только одним скоплением массы M , удаленным на расстояние r в сопутствующей системе:

$$\frac{d(Rv)}{dt} = \frac{GM}{Rr^2}. \quad (28.2)$$

Для получения приближенного решения, соответствующего стадии значительного сгущения, будем считать $M(t)$ и r^{-2} средними величинами и проинтегрируем, учитывая данное расширение $R(t)$. Например, когда $\Omega = 0,1$, Вселенная расширяется приблизительно как пустая модель при $R \gtrsim 3$. (Вспоминая, что $R = 3$ соответствует красному смещению $z \approx 10$, видим, что член, отвечающий за плотность в правой части уравнения (21.31), становится несуществен-

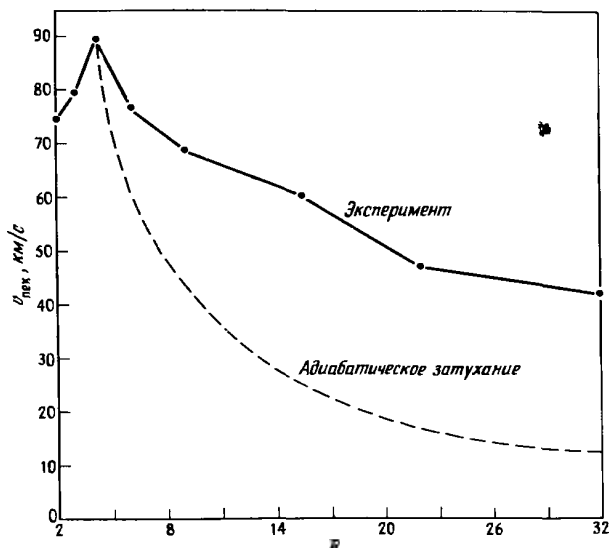


Рис. 31. Сравнение результатов эксперимента по исследованию эволюции дисперсии peculiarных лучевых скоростей для совершенно изолированных галактик поля со скоростью адиабатического затухания в эксперименте с 4000 галактик при $\Omega = 0,1$, $n = -1$ (Saslaw and Aarseth, 1982).

ным, так как $R \propto t$.) Поэтому

$$v \approx \frac{R_0 v_0}{R} + 5 \times 10^3 \ln \left(\frac{R}{R_0} \right) \langle M_{14} \rangle \langle r^{-2}_{\text{Mpc}} \rangle t_{10} \text{ км/с.} \quad (28.3)$$

Здесь R_0 и v_0 — начальные значения, усредненная по времени масса скопления измеряется в единицах $10^{14} M_{\odot}$, а современный возраст Вселенной t — в единицах 10^{10} лет. Современное физическое расстояние, полученное из соотношения $\langle r^{-2}_{\text{Mpc}} \rangle = R^{-2}(t) \langle r^{-2} \rangle$, измерено в мегапарсеках.

Первый член представляет собой адиабатическое затухание. Если принять значения параметров, разумные с астрономической точки зрения, легко получить, что peculiarные скорости, обусловленные возмущением от ближайшего большого скопления, имеют величину ~ 50 км/с. Конечно, эта оценка отражает лишь общее направление нелинейного развития в приблизительном согласии с рис. 31.

Результаты моделирования систем N тел не должны приниматься целиком на веру. Нередко имеется возможность проверки их внутренней согласованности. Метод проверки, применимый для данного случая, предложил Галилей. Покажем, что дисперсия скоростей совершенно изолированных галактик вызвана скорее возмущениями от больших скоплений, чем возмущениями от соседних галактик, или выбросами из малых групп. Один способ состоит в том,

чтобы выяснить, является ли дисперсия скоростей в подвыборке совершенно изолированных галактик с различными массами существенно независимой от их массы. Эта независимость действительно обнаружена. При различии масс примерно в 20 раз скорости изменяются примерно на 20%.

Другой способ проверки состоит в прослеживании траекторий совершенно изолированных галактик, чтобы посмотреть, не проходят ли они через группы. Можно сделать вывод, что в модели с $\Omega = 0,1$ лишь немногие галактики выброшены из групп. Однако в модели с $\Omega = 1,0$ траектории примерно половины из десяти галактик, обладающих самыми высокими скоростями, проходят через группы. Эти результаты могут привести к интересному методу определения Ω , если нам удастся понять, каковы следствия принадлежности галактики к группе (искажение формы галактики? странные кривые вращения? необычные вспышки звездообразования?). Приведенные данные связаны с большей скоростью формирования групп в космологических моделях с большими значениями Ω , но здесь еще нет полной ясности.

Возникают также другие методы определения Ω , лучше поддающиеся проверке наблюдениями. Поскольку вся история сгущивания существенно зависит от Ω , а пекулярные скорости совершенно изолированных галактик поля накапливаются в качестве прямого результата этого сгущивания, они также должны сильно зависеть от Ω , что и подтвердилось на самом деле. Таким образом, галактики поля обладают памятью, в которой сохраняется история сгущивания.

Например, на рис. 32 показаны гистограммы скоростей совершенно изолированных галактик поля в современную эпоху, полученные в экспериментах с двумя моделями при $\Omega = 0,1$, $n = -1$ и $\Omega = 1,0$, $n = 0$. Каждая модель содержит 160 таких галактик, и в обеих двухточечные корреляционные функции согласуются с наблюдениями. Таким образом, в этом отношении нет большого различия. Но распределение скоростей совершенно разное! Дисперсия скоростей в случае $\Omega = 1$ равна 185 км/с, в то время как при $\Omega = 0,1$ она составляет 42 км/с. Эта разница проявляется, хотя и в меньшей степени, также у менее изолированных галактик. Дисперсия скоростей у галактик поля является замечательной мерой пространственных корреляций в очень больших масштабах.

В качестве проверки можно также исследовать дисперсию скоростей центров масс различных скоплений галактик. Их до некоторой степени также можно рассматривать как пробные частицы, подчиняющиеся описанной закономерности. Правда, здесь несколько труднее интерпретировать результаты, поскольку принадлежность к скоплениям и группам значительно меняется между $z \approx 1$ и $z \approx 0$ (в отличие от совершенно изолированных галактик). Это период активного роста скоплений. Тем не менее можно проследить, как отдельные скопления приобретают новых членов. В модели с $\Omega = 0,1$ и $n = -1$ дисперсия скоростей центров масс 30 наиболее концентрированных скоплений уменьшилась с 62 км/с при $z = 1$ до 50 км/с при $z = 0$. В модели с $\Omega = 1,0$ и $n = -1$ она возросла со 140 до 220 км/с в течение того же периода, что указывает на быстрое увеличение пекулярных скоростей скоплений по мере их формирования. Таким образом, и в случае центров скоплений возмущения от соседних скоплений и добавочные скорости от аккрецированных членов сглаживают адиабатическое затухание. Снова распределение скоростей у объектов поля

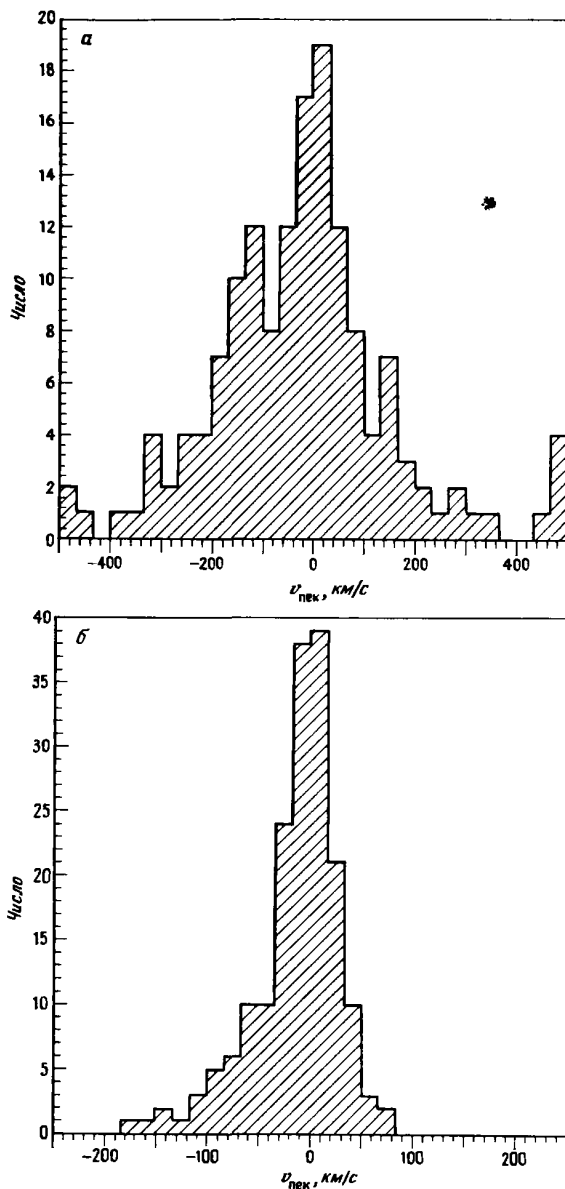


Рис. 32. Модельные распределения современных пекулярных лучевых скоростей для совершенно изолированных галактик поля, хорошо соответствующие наблюдаемой трехмерной двухточечной корреляционной функции. *a* — модели с высокой плотностью, $\Omega = 1$, $n = 0$; $R = 10,7$; *b* — модели с низкой плотностью, $\Omega = 0,1$, $n = -1$, $R = 31,9$ (Saslaw and Aarseth, 1982).

оказывается сильным средством, позволяющим различать истории происхождения пространственного сгущения.

Наступили волнующие времена также и для наблюдателей. Новая аппаратура позволяет быстро делать обзоры красных смещений. Представительные полные выборки галактик поля помогут нам понять, какой вклад вносят крупномасштабные потоки в движение Местного сверхскопления галактик. Более совершенные вторичные индикаторы расстояний, такие, как измерение движений облаков нейтрального водорода, или особенности спектра, связанные с абсолютной оптической светимостью, помогут точнее измерить пекулярные скорости. Сейчас еще рано говорить о конечных результатах, но предварительные оценки данных наблюдений указывают на низкую плотность вещества в скоплениях галактик. Чтобы Вселенная была закрытой, она должна содержать приблизительно однородно распределенное невидимое вещество, которое не оказывает значительного результирующего гравитационного воздействия на галактики поля.

29. КРАТКИЙ ОБЗОР ОСНОВ ТЕРМОДИНАМИКИ

29.1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

До сих пор исследование неустойчивости и сгущения бесконечных гравитационных систем проводилось по двум широким направлениям с использованием линейной кинетической теории и численных экспериментов в рамках задачи N тел. Теперь мы сворачиваем на третий путь — обращаемся к термодинамике. Классическая термодинамика — это теория большой широты и общности. Она пережила релятивистскую и квантовомеханическую революции в физике почти неприкосновенной. В частности, это произошло потому, что среди всех физических теорий термодинамика обладает наименее конкретным физическим содержанием. Ее положения касаются самых общих величин, которые должны быть заново определены через уравнения состояния для каждого конкретного случая. В свете этого естественно спросить, подчиняются ли термодинамике гравитационные системы.

Ответ будет утвердительный, но с некоторыми оговорками и ограничениями. Выводы гравитационной термодинамики — гравитермодинамики (или сокращенно ГТД) — часто неожиданны и противоречат интуиции, что отличает ее от термодинамики обычных газов. Удельные теплоемкости, например, могут быть отрицательными, а равновесие — труднодостижимым. В основном эти различия вызваны дальнедействием и всепроникающей природой сил тяготения (они не поддаются экранированию). В результате строгое понимание ГТД является менее определенным, чем понимание обычной термодинамики. Современная ситуация немного похожа на существовавшую в те времена, когда зарождавшуюся термодинамику ошупью создавали Уатт, Карно, Кельвин и Джоуль.

Непосредственное включение гравитации в термодинамику снова ведет к джинсовской неустойчивости, но уже другого рода. Этот синтез обеспечивает

связь с результатами линейной кинетической теории и приводит к новому пониманию нелинейного сгущения. Далее, в III части книги, мы увидим, что он позволяет описывать также важные аспекты устойчивости и эволюции в конечных звездных скоплениях.

В этой главе дается обзор идей и соотношений обычной термодинамики, необходимый для того, чтобы двигаться дальше. При этом не предпринимается попыток достичь полноты, широкого охвата или проникновения в тонкие детали, поскольку во многих специальных книгах этот предмет рассматривается очень подробно. (В списке литературы приводится несколько примеров таких книг.) Наша цель состоит главным образом в том, чтобы дать ясное описание и ввести общепринятые обозначения. Термодинамика иногда кажется более сложной, чем она есть на самом деле, потому что в различных ситуациях применяются разные наборы зависимых и независимых переменных. Недостаток внимания к обозначениям может вызвать полнейшую путаницу.

Основная предпосылка классической термодинамики состоит в том, что системы в состоянии равновесия могут характеризоваться конечным набором макроскопических параметров. Это могут быть осредненные микроскопические параметры, которые не известны в деталях и по своей природе и положению неодинаковы в системах различных типов. Чтобы обнаружить, что реальная система находится в равновесии, надо его нарушить. Поэтому равновесие всегда является идеализацией и означает, что макроскопические возмущения происходят на временных масштабах, очень больших по сравнению с масштабами микроскопических релаксаций.

Макроскопические параметры, которые описывают систему, обычно включают полную внутреннюю энергию U , энтропию S , объем V , занимаемый системой, и число частиц N , содержащихся в ней. Если система содержит больше одного типа объектов, каждая составляющая характеризуется числом N_i . Число частиц и объем — очевидные параметры. Причина использования внутренней энергии в качестве параметра состоит в том, что эта величина в системе сохраняется, и обычно таким свойством обладает она одна.

Энтропия не является столь очевидным параметром. Вторая основная предпосылка термодинамики состоит в том, что можно представить себе ансамбль подобных друг другу систем с различными значениями их макроскопических параметров. Если системы в ансамбле взаимодействуют очень слабо, только чтобы достичь равновесия, то наиболее вероятное значение макроскопических параметров следует из условия максимума энтропии. Поэтому энтропия будет функцией других параметров: $S = S(U, V, N)$. Это соотношение называется термодинамическим потенциалом в энтропийном представлении. Его можно преобразовать и получить термодинамический потенциал в энергетическом представлении: $U = U(S, V, N)$. Всегда полезно помнить, какое именно представление используется в данном случае.

Энтропия, подобно дирижеру симфонического оркестра, определяет роли других участников. Идея о том, что максимальное значение одной термодинамической функции может определять наиболее вероятные значения других параметров, развилась из вариационных принципов классической механики. Сме-

льный переход Гиббса от одной системы к их ансамблю создал статистико-механическую основу термодинамики.

Малое изменение параметров системы представляется дифференциалом термодинамического потенциала. В энергетическом представлении оно имеет вид

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial S} \right)_{V,N} dS + \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_{S,N} dV + \left(\frac{\partial U}{\partial N} \right)_{S,V} dN = TdS - PdV + \mu dN. \quad (29.1)$$

Величины, которые остаются постоянными при вычислении частных производных, нередко подробно записывают для достижения ясности и как напоминание о том, какое именно представление использовано. Три производных в этом выражении — это температура, давление (по принятой договоренности оно берется со знаком минус, так как с уменьшением энергии объем возрастает) и химический потенциал. Аналогично в энтропийном представлении

$$dS = \left(\frac{\partial S}{\partial U} \right)_{V,N} dU + \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_{U,N} dV + \left(\frac{\partial S}{\partial N} \right)_{U,V} dN = \frac{1}{T} dU + \frac{P}{T} dV - \frac{\mu}{T} dN, \quad (29.2)$$

если заметить, что

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_{U,N} = - \frac{(\partial U / \partial V)_{S,N}}{(\partial U / \partial S)_{V,N}}. \quad (29.3)$$

Конечно, соотношение (29.2) может быть получено из (29.1) посредством простой перестановки членов, но такой подход не будет ни общим, ни поучительным.

Уравнение (29.3) — простой пример связей между неявно выраженными частными производными. Так как эти связи пронизывают всю термодинамику, полезно остановиться и сделать их обзор. Рассмотрим произвольную непрерывную функцию $A(x, y, z)$, скажем, трех переменных. Мы можем связать между собой частные производные от A , так как данные значения $A(x, y, z)$ неявно определяют связи между ее независимыми переменными. Если A изменяется, ее полный дифференциал имеет вид

$$dA = \left(\frac{\partial A}{\partial x} \right)_{y,z} dx + \left(\frac{\partial A}{\partial y} \right)_{z,x} dy + \left(\frac{\partial A}{\partial z} \right)_{x,y} dz. \quad (29.4)$$

Поскольку эти связи сохраняются при всех значениях dA , можно положить $dA = 0$ и сделать дополнительно постоянной одну из переменных, скажем положить $dz = 0$. Результат после деления на dx можно записать так:

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_{A,z} = - \frac{(\partial A / \partial x)_{y,z}}{(\partial A / \partial y)_{z,x}}, \quad (29.5)$$

что по форме совпадает с (29.3). Такие же соотношения следуют из условий $dx = 0$ и $dy = 0$, которые эквивалентны циклической перестановке x, y и z , даю-

шей переходы $x \rightarrow y$, $y \rightarrow z$ и $z \rightarrow x$. Если разделить выражение (29.4) на dy , чтобы обратить соотношение (29.5), то видно, что

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y} \right)_{A,z} = \frac{1}{(\partial y / \partial x)_{A,z}}. \quad (29.6)$$

Перемножение трех форм (29.5) и использование соотношения (29.6) показывает, что

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y} \right)_{A,z} \left(\frac{\partial y}{\partial z} \right)_{A,x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_{A,y} = -1. \quad (29.7)$$

Другое нередко применяемое соотношение — это цепное правило, когда x , y и z сами являются функциями параметра w , так что $dx = (dx/dw)dw$ и т. д. Подстановка этих трех дифференциальных соотношений в (29.4) при $dA = dz = 0$ и сравнение результата с (29.5) дают

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_{A,z} = \frac{(\partial y / \partial w)_{A,z}}{(\partial x / \partial w)_{A,z}}. \quad (29.8)$$

Возвращаясь к выражению (29.1), нетрудно заметить, что температура, давление и химический потенциал (физическое обоснование которого можно найти в обычных учебниках) являются производными от термодинамического потенциала. Поэтому названные переменные по своей роли отличаются от S , V и N , как показывают соотношения между внутренней энергией, теплом и работой.

Теплота и работа — это формы превращения энергии. В противоположность внутренней энергии система не может содержать определенного количества работы и теплоты, поскольку они характеризуют процессы. Количество теплоты и работа, необходимые для преобразования данного количества энергии, сильно зависят от того, каким образом происходит переход. Как было показано методами экспериментальной колориметрии, малый квазистатический переход (между состояниями, очень близкими к равновесию), соответствующий количеству теплоты dQ , может быть связан с величиной, прирост которой не зависит от способа перехода. Фокус состоит в том, что изменение количества теплоты делится на температуру

$$\frac{dQ}{T} = dS, \quad (29.9)$$

и в результате получается энтропия. Символом dQ обозначен «неполный дифференциал», интеграл от которого зависит от пути интегрирования в термодинамическом фазовом пространстве $S - V - N$. Теплота — это энергия, преобразованная в относительно «хаотическое» микроскопическое движение объектов внутри системы.

Изменение полной внутренней энергии системы в ходе квазистатического процесса равно сумме количества теплоты, сообщенной системе, и механической и химической работы, совершенной над системой:

$$dU = dQ + dW_m + dW_c. \quad (29.10)$$

Подстановка выражения (29.9) и сравнение с (29.1) показывают, что механическую и химическую квазистатическую работу можно представить соответственно в виде:

$$dW_m = -PdV, \quad (29.11)$$

$$dW_c = \mu dN. \quad (29.12)$$

Поскольку dU и PdV могут быть определены из опыта, выражение (29.10) дает способ измерения количества энергии, перешедшей в тепло. Оно также поясняет, как выбор основных переменных определяет, что механическая работа равна $-PdV$. Иначе, если ожидать, что dU должно также содержать член VdP , может возникнуть путаница.

Другое важное различие внутри совокупности основных и производных величин состоит в том, что они могут быть либо экстенсивными, либо интенсивными. Предположим, существуют две системы, которые не взаимодействуют между собой. Тогда значения основных переменных U , S , V , N для сложной системы — это сумма их значений в отдельных системах. Эти величины являются «экстенсивными». С другой стороны, при образовании сложной системы из отдельных не взаимодействующих систем свойства производных величин T , P и μ не меняются. Это «интенсивные» величины. В особом случае идеальных газов возможно более строгое определение экстенсивности. Вместо того чтобы представлять себе не взаимодействующие системы, мы можем рассмотреть реальную систему и разделить ее на две части воображаемой стенкой. Тогда понятия экстенсивности и интенсивности применимы к взаимодействующим областям реальных систем. Это обобщение справедливо, так как взаимодействие весьма слабо — оно лишь достаточно, чтобы установилось равновесие. Неидеальные газы с крупномасштабными корреляциями или гравитационные системы с дальнедействующими силами не всегда удовлетворяют такому более обобщенному определению экстенсивности, так что следует соблюдать осторожность при рассмотрении следствий из этого свойства.

В обычной термодинамике равенство T , P или μ в двух реальных подсистемах означает, что они находятся соответственно в температурном, механическом и химическом равновесии. Это следует из принципа максимума энтропии. В качестве примера рассмотрим две подсистемы, которые имеют постоянную полную энергию $U = U_1 + U_2$ и разделены жесткой стенкой, которая пропускает тепло, но не вещество. Полная энтропия системы $S = S_1 + S_2$. Запись условия максимума энтропии при постоянных V_1 , V_2 , N_1 , N_2 дает с учетом соотношения (29.2):

$$dS = 0 = dS_1 + dS_2 = \frac{1}{T_1}dU_1 + \frac{1}{T_2}dU_2 = \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right)dU_1, \quad (29.13)$$

следовательно, при равновесии $T_1 = T_2$. Так же выводятся результаты для P и μ . Свойство экстенсивности энтропии и сохранение энергии существенны в этой цепочке доказательств.

29.2. ВНУТРЕННИЕ СВЯЗИ

До сих пор наше рассмотрение касалось структуры, лежащей в основе описания термодинамической информации. В различных ситуациях полезно подчеркивать ту или иную часть этой структуры. Поэтому теперь мы сделаем обзор взаимосвязей между различными формами описания, содержащими, однако, одну и ту же основную информацию.

Из соотношения (29.1) получаются интенсивные параметры как функции основных экстенсивных переменных: $T = T(S, V, N)$, $P = P(S, V, N)$, $\mu = \mu(S, V, N)$. Это — «уравнения состояния». Записанное в основных переменных, каждое уравнение состояния является дифференциальным уравнением в частных производных. Поэтому оно содержит меньше информации о системе, чем термодинамические потенциалы, — во всяком случае, функции интегрирования в них отсутствуют.

Однако совокупность всех уравнений состояния может быть эквивалентной термодинамическому потенциалу по содержанию информации. Поскольку этот потенциал зависит от внешних переменных, выражение в первом приближении однородно:

$$U(\lambda S, \lambda V, \lambda N) = \lambda U(S, V, N). \quad (29.14)$$

Дифференцируя обе части по λ и затем выбирая определенное значение $\lambda = 1$, получаем уравнение Эйлера

$$U = TS - PV + \mu N. \quad (29.15)$$

Таким образом, знание $T(S, V, N)$, $P(S, V, N)$ и $\mu(S, V, N)$ дает возможность восстановить термодинамический потенциал $U(S, V, N)$.

Уравнение, которое дополняет (29.1) и включает в себя дифференциалы от интенсивных переменных, может теперь быть получено взятием дифференциала от (29.15) и вычитанием из него (29.1). Результат называется уравнением Гиббса — Дюгема

$$SdT - VdP + Nd\mu = 0. \quad (29.16)$$

Таким образом, вариации интенсивных параметров не являются полностью независимыми. Подстановкой $S(T, P, N)$, $V(T, P, N)$ и $\mu(T, P, N)$ в (29.16) и интегрированием можно найти связь между T , P и μ ; в качестве альтернативы можно связать T , P и μ путем исключения S , V и N из уравнений состояния. Заметим, что соотношение между P , V , T и N , которое для идеальных газов называется уравнением состояния (единственным в данном случае), есть в каком-то смысле смешанное представление и не содержит полной информации о термодинамических свойствах.

Все соотношения, о которых говорилось до сих пор, можно также переписать в энтропийном представлении, при котором термодинамическим потенциалом является $S(U, V, N)$. Тогда уравнение Гиббса — Дюгема, например, принимает вид

$$Ud\left(\frac{1}{T}\right) + Vd\left(\frac{P}{T}\right) - Nd\left(\frac{\mu}{T}\right) = 0. \quad (29.17)$$

Некоторые термодинамические производные имеют очевидный физический смысл и часто используются в общепринятых выражениях и зависимостях. Среди них — изотермическая сжимаемость

$$\kappa_T \equiv - \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_{N,T}, \quad (29.18)$$

коэффициент теплового расширения

$$\alpha \equiv \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_{N,P}, \quad (29.19)$$

удельная теплоемкость при постоянном объеме

$$C_V \equiv \frac{T}{N} \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_{N,V} = \frac{1}{N} \left(\frac{dQ}{dT} \right)_{N,V}, \quad (29.20)$$

и удельная теплоемкость при постоянном давлении

$$C_P \equiv \frac{T}{N} \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_{N,P} = \frac{1}{N} \left(\frac{dQ}{dT} \right)_{N,P} \quad (29.21)$$

Каждая из них представляет собой удельное изменение одной из основных переменных при специфических условиях.

Другие термодинамические производные часто могут быть подходящим образом переформулированы при использовании эквивалентности смешанных частных производных от термодинамического потенциала. Например, из

$$\frac{\partial^2 U}{\partial V \partial S} = \frac{\partial^2 U}{\partial S \partial V} \quad (29.22)$$

мы легко получаем

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_{S,N} = - \left(\frac{\partial P}{\partial S} \right)_{V,N}. \quad (29.23)$$

Это — пример «максвелловских связей», которых существует великое множество для каждого основного представления и каждого выбора основных переменных.

Основные переменные S , V , N не всегда могут быть наилучшими в каждой конкретной ситуации. Например, мы можем захотеть выразить термодинамический потенциал двух систем, находящихся в тепловом равновесии, через общую температуру T совместно с V и N , в частности потому, что T измерить много легче, чем энтропию S . Простая подстановка $S(T, V, N)$ в $U(S, V, N)$ с целью получить $U(T, V, N)$ не работает. Хотя таким путем получается совершенно правильное соотношение $U(T, V, N)$, оно представляет собой дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка, интеграл от которого содержит неопределенную функцию. Таким образом, по информационному содержанию $U(S, V, N)$ и $U(T, V, N)$ неэквивалентны.

Найти эквивалентную формулировку легко с помощью преобразования Лежандра. Основная идея состоит в том, чтобы заменить описание кривой (или поверхности) в каждой ее точке определением прямых (или плоскостей), касательных к ней. В качестве простой иллюстрации приведем пример для случая одной переменной. Предположим, что внутренняя энергия является функцией одной только энтропии $U(S)$, и мы хотим заменить ее функцией температуры $F(T)$, содержащей ту же информацию. Вместо того чтобы определять последовательно от точки к точке $U(S)$, рассмотрим касательную к ней, наклон которой в любой точке есть

$$T(S) = \frac{dU}{dS}. \quad (29.24)$$

Но для полного определения касательной наряду с ее наклоном надо знать ее общую точку с F . Таким образом, касательная в плоскости $U - S$ (рис. 33) определяется как

$$T = \frac{\Delta U}{\Delta S} = \frac{U - F}{S - 0}. \quad (29.25)$$

Ключевая идея — использовать точку касания, чтобы определить новую функцию от T или, перегруппировав соотношение (29.25), определить

$$F = U - TS = U - \frac{dU}{dS} S. \quad (29.26)$$

Наконец, используя $U(S)$, чтобы исключить U из (29.26), и подставляя $S(T)$ из (29.24), получаем $F(T)$. Это преобразование Лежандра для $U(S)$. Начав с $F(T)$, мы можем снова получить $U(S)$ обратным преобразованием, за исключением особой точки, где $d^2F/dT^2 = 0$. Это последнее условие связано с требованием термодинамической устойчивости системы; математически же оно обеспечивает зависимость T от S .

Выбор символов в этом примере объясняется тем, что мы знаем результат заранее. $F(T, V, N)$ есть свободная энергия, и она получается из $U(S, V, N)$, как и в соотношении (29.26), путем фиксирования остальных переменных. Свободная энергия — это пример одного из термодинамических потенциалов. Другие преобразования Лежандра дают другие потенциалы. Если интересующая нас переменная — давление, то получается энтальпия

$$H(S, P, N) = U + PV. \quad (29.27)$$

Если определяются температура и давление, мы можем использовать функцию Гиббса

$$G(T, P, N) = U - TS + PV, \quad (29.28)$$

и т. д. Эквивалентность вторых частных производных от термодинамических потенциалов порождает все новые наборы максвелловских соотношений. Преобразования Лежандра могут быть также применены к энтропийному пред-

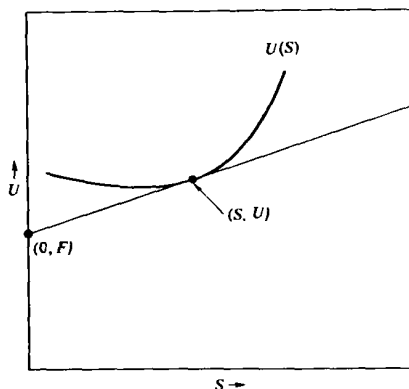


Рис. 33. Определение кривой $U(S)$ путем нахождения наклона и положения точки касания прямой, касательной к ней.

ставлению, где в результате вместо термодинамических потенциалов получаются функции, называемые обобщенными функциями Массье. Примером является $S(P/T) = S - (P/T)V$ — функция от U , P/T и N .

Основная роль термодинамических потенциалов — описывать системы, находящиеся в равновесии при постоянных температуре, давлении и химическом потенциале. Например, если система может обмениваться энергией с резервуаром (другой системой, обладающей настолько большой теплоемкостью, что ее температура остается постоянной), то равновесные значения свободных внутренних термодинамических параметров системы минимизируют свободную энергию при постоянной температуре резервуара. Чтобы в этом убедиться, вспомним положение термодинамики, что при устойчивом равновесии полная энергия системы и резервуара минимальна,

$$d(U + U_r) = 0, \quad (29.29)$$

$$d^2(U + U_r) = d^2U > 0, \quad (29.30)$$

когда энтропия постоянна, так что

$$d(S + S_r) = 0. \quad (29.31)$$

Причина того, что $d^2U_r = 0$, заключается в равенстве нулю по определению всех дифференциалов интенсивных параметров вследствие большого размера резервуара. Поэтому

$$d(U + U_r) = dU + T_r dS_r = 0 \quad (29.32)$$

и, так как $dS_r = -dS$ и $T_r = T$, получаем

$$d(U - TS) = dF = 0. \quad (29.33)$$

Наконец, соотношение (29.30) показывает, что $d^2F > 0$. Аналогично системы, находящиеся в механическом контакте с резервуаром давления, имеют постоянную энтальпию.

29.3. СВЯЗИ С КИНЕТИЧЕСКОЙ ТЕОРИЕЙ И СТАТИСТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКОЙ

Термодинамика связывает различные величины, но она не говорит нам о том, какой смысл они имеют в каждой конкретной физической системе. Нам необходимо найти фактически существующие уравнения состояния или термодинамический потенциал. Связи с кинетической теорией и статистической механикой делают возможным такой шаг.

Мы уже нашли одну связь с кинетической теорией через соотношение (25.15) между гравитационной потенциальной энергией и двухточечной корреляционной функцией $\xi(r)$. Это пример путаницы, когда две различные величины, имеющие одинаковые обозначения, каждое из которых является стандартным в своей области, сходятся вместе. Чтобы справиться с этой путаницей, будем продолжать применять обозначение U для общей внутренней энергии из ч. II, а гравитационную корреляционную энергию обозначим через W . Здесь больше не будет использоваться понятие термодинамической «работы», которая появляется только в форме неполного дифференциала. Через полную одночастичную функцию распределения имеется связь с кинетической энергией [уравнение (25.14)], а отсюда — с полной внутренней энергией. Для обычного однородного газа, в котором случайные скорости характеризуются температурой T , внутренняя энергия выражается соотношением

$$\frac{U}{NkT} = \frac{3}{2} + \frac{n}{2kT} \int_0^\infty \phi(r) \xi(r, n, T) 4\pi r^2 dr, \quad (29.34)$$

где k — постоянная Больцмана. Здесь $\phi(r)$ — потенциальная энергия взаимодействия частиц. В общем случае корреляционная функция может зависеть от плотности $n = N/V$ и температуры, а также от взаимных расстояний.

Этот результат нельзя считать термодинамическим потенциалом системы, так как по форме он отличается от $U(S, V, N)$. Его также нельзя рассматривать как уравнение состояния в энергетическом представлении, поскольку оно не имеет форму $T(S, V, N)$. Это уравнение состояния $T^{-1}(U, V, N)$ в энтропийном представлении, так как $T^{-1}(U, V, N) = \partial S(U, V, N) / \partial U$.

Чтобы найти термодинамический потенциал и построить термодинамику, нужны еще два уравнения состояния. Исходя из физической интуиции, следует ожидать, что давление равно давлению идеального газа за вычетом величины, пропорциональной плотности энергии взаимодействия. Как подробно показано в гл. 8 и 9 книги Фаулера (Fowler, 1936), это тот случай, когда

$$\frac{P}{kT} = n - \frac{n^2}{6kT} \int_0^\infty r \frac{d\phi(r)}{dr} \xi(r, n, T) 4\pi r^2 dr. \quad (29.35)$$

(В разд. 30.2 рассматривается одно из следствий этого результата.) Теперь можно проинтегрировать уравнение Гиббса — Дюгема (29.17), чтобы найти третье уравнение состояния:

$$\frac{\mu}{T} = \frac{\mu}{T}(U, V, N) = \frac{\mu}{T}(u, v), \quad (29.36)$$

где всюду используются величины $u = U/N$ и $v = V/N$. Три уравнения состояния затем могут быть подставлены в уравнение Эйлера в энтропийном представлении:

$$S(U, V, N) = \frac{1}{T}U + \frac{P}{T}V - \frac{\mu}{T}N, \quad (29.37)$$

что дает термодинамический потенциал. Эта процедура обеспечивает связь между термодинамикой и кинетической теорией. В качестве упражнения читатель может воспользоваться ею в случае $\xi = 0$ и получить выражение для энтропии идеального одноатомного газа

$$S = \frac{N}{N_0} S_0 + NR \ln \left[\left(\frac{U}{U_0} \right)^{3/2} \left(\frac{V}{V_0} \right) \left(\frac{N}{N_0} \right)^{-5/2} \right], \quad (29.38)$$

где принятая за основу сравнения энтропия равна

$$S_0 = \frac{5}{2} N_0 R - N_0 \left(\frac{\mu}{T} \right)_0. \quad (29.39)$$

Имеется несколько эквивалентных альтернативных подходов к получению термодинамического потенциала, из которых два наиболее удобны. Один состоит в том, чтобы найти удельную энтропию $s = S/N$, прямо интегрируя выражение

$$ds = \frac{1}{T} du + \frac{P}{T} dv. \quad (29.40)$$

Второй путь — вычисление преобразования Лежандра для энтропии. Поскольку все наши уравнения состояния выражены через температуру, подходящим преобразованием Лежандра является функция Массье

$$S(1/T, V, N) \equiv S(U, V, N) - \frac{\partial S}{\partial U} U = S - \frac{1}{T} U = - \frac{F}{T}. \quad (29.41)$$

Эта функция тривиальным образом связана со свободной энергией. Мы называем ее свободной энтропией. Так как S является функцией от U , N и V , уравнение (29.41) приводит к соотношению

$$\left(\frac{\partial(F/T)}{\partial(1/T)} \right)_{N,V} = U. \quad (29.42)$$

Таким образом, посредством интегрирования получается другой вариант выражения для термодинамического потенциала в термодинамике кинетических систем.

Обратимся теперь к связям между термодинамикой и статистической механикой. Эти связи обеспечивают другие подходы к уравнениям состояния — подходы, следовать которым иногда проще и удобнее. Основные принципы изложены во многих руководствах, поэтому здесь мы лишь напомним наиболее важные из них.

Каждому резервуару и связанному с ним термодинамическому потенциалу соответствует статистико-механический ансамбль. Эти ансамбли являются воспроизводимыми совокупностями подсистем, каждая из которых воспроизводит макроскопические свойства системы. Микроскопические свойства системы, например, звезды, в общем случае различны у отдельных членов системы. Ансамбль, члены которого полностью изолированы и обладают определенными энергией, объемом и числом объектов, называется «микроканоническим ансамблем». Его термодинамические потенциалы зависят только от этих переменных: $S(U, V, N)$. Если члены ансамбля находятся в тепловом равновесии с резервуаром, они составляют «канонический ансамбль», для которого термодинамическим потенциалом является свободная энергия $F(T, V, N)$. Если члены ансамбля находятся в равновесии как с тепловым резервуаром, так и с резервуаром-источником частиц, они составляют «большой канонический ансамбль». Для него термодинамическим потенциалом является большой канонический потенциал $U(T, V, \mu) = U(S, V, N) - TS - \mu N$.

Больцман и Планк сформулировали фундаментальное статистическое положение, на котором покоится термодинамика. Энтропия макросостояния микроканонического ансамбля связана с числом Ω микроскопических конфигураций ансамбля в данном макросостоянии как

$$S = k \ln \Omega. \quad (29.43)$$

В этом фундаментальном уравнении k — постоянная Больцмана. Справедливость такого рода соотношения представляется очевидной, потому что энтропия аддитивна, в то время как вероятности микроскопических состояний перемножаются. Степень загадочности (еще одна переменная статистической механики?) этого замечания уменьшается, если рассмотреть две независимые системы. Их объединенная энтропия $S_{12} = S_1 + S_2$. Их совместная микроскопическая вероятность $\Omega_{12} = \Omega_1 \Omega_2$. Если S должна быть экстенсивной функцией $f(\Omega)$ только от Ω , то $f(\Omega_1 \Omega_2) = f(\Omega_1) + f(\Omega_2)$. Общее решение этого функционального уравнения имеет форму (29.43).

Чтобы применять уравнение Больцмана (29.43), необходимо научиться считать макросостояния. Предполагается, что каждое макросостояние может быть реализовано с одинаковой априорной вероятностью. Однако некоторым макросостояниям системы может соответствовать не единственный набор микросостояний. Эти макросостояния имеют большую энтропию и большую вероятность реализации в ансамбле. В случае классического газа, как показано в руководствах по статистической механике,

$$S = k \ln Z + \frac{U}{T}, \quad (29.44)$$

где Z — статистическая сумма

$$Z = \sum_i e^{-\epsilon_i/kT}. \quad (29.45)$$

Сумма берется по всем различным энергетическим состояниям ϵ_i системы. Если число объектов, находящихся в каждом энергетическом состоянии, равно n_i , то $\sum_i n_i \epsilon_i = U$ и $\sum_i n_i = N$. Теперь есть возможность, хотя это обычно сложно, выразить T через U , V и N , чтобы получить $S(U, V, N)$. Вместо этого более естественно, используя такой подход, работать со свободной энергией

$$F = U - TS = -kT \ln Z \quad (29.46)$$

из двух предыдущих уравнений. Вообще же энергетические состояния зависят от объема системы. Знание статистической суммы дает поэтому все термодинамические параметры. Например,

$$U = F + TS = -T^2 \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{F}{T} \right)_V = \frac{kT^2}{Z} \frac{\partial Z}{\partial T}, \quad (29.47)$$

где при переходе к последнему равенству использовано соотношение (29.46). Объединяя этот результат с соотношением (29.44), выражаем энтропию непосредственно через Z . Остальные термодинамические характеристики получают методами, описанными выше. Конечно, статистическая сумма должна строиться для каждой конкретной системы.

При разработке этих деталей часто бывает полезно перейти к «термодинамическому пределу» бесконечной системы. Причина состоит в том, что энергетические состояния, из которых составляется статистическая сумма, в общем зависят от размера и формы системы. В выражении (29.45) скрыта неявная зависимость от объема. Более того, они могут также зависеть от того, какой ансамбль используется для их вычисления. Термодинамический предел позволяет обойти эти проблемы, просто вычисляя Z в пределе $N \rightarrow \infty$, $V \rightarrow \infty$ с $N/V = \text{const}$. Аналогичный подход встречался нам прежде при переходе от кинетического описания к жидкостному. Строго доказано, что этот предел существует при многих, но не при всех условиях. Первоначально главные ограничения состояли в том, чтобы потенциал взаимодействия частиц падал быстрее, чем r^{-3} при $r \rightarrow \infty$, и возрастал быстрее, чем r^{-3} при $r \rightarrow 0$. При этом отталкивающее ядро предотвращает коллапс, тогда как быстрое падение потенциала на больших расстояниях предотвращает влияние глобальных характеристик системы на термодинамику. Позже эти доводы были распространены на силы, обратно пропорциональные квадрату расстояния, действующие при определенных условиях, что будет описано в гл. 30.

29.4. ФЛУКТУАЦИИ И ФАЗОВЫЕ ПЕРЕХОДЫ

Равновесная термодинамика имеет дело с осредненными макроскопическими величинами. В действительности объекты всегда колеблются внутри системы и в любой подобласти макроскопические величины будут флуктуировать

вокруг своих средних значений. Замечательным свойством равновесной термодинамики является ее способность описывать эти флуктуации. Хотя флуктуации обычно малы, они могут становиться огромными в гравитационных системах. Гигантские флуктуации — это предвестники неустойчивости.

Чтобы напрямую вычислить флуктуации, надо представить себе множество изолированных систем с некоторыми фиксированными N , V и T , находящихся в равновесии с термостатом. Приток и отток тепла от системы к термостату порождают флуктуации энергии в каждой системе. Запишем среднюю внутреннюю энергию, пользуясь соотношением (29.45):

$$U = \bar{\epsilon}_i = \frac{\sum_i \epsilon_i e^{-\epsilon_i/kT}}{\sum_i e^{-\epsilon_i/kT}}. \quad (29.48)$$

Дифференцирование этого выражения по $1/kT$ без совершения работы внешних сил над системой (при постоянных ϵ_i) дает среднеквадратичную флуктуацию U :

$$\left(\frac{\partial U}{\partial (1/kT)} \right)_{N,V} = -kT^2 \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_{N,V} = - \frac{\sum_i \epsilon_i^2 e^{-\epsilon_i/kT}}{\sum_i e^{-\epsilon_i/kT}} + \left(\frac{\sum_i \epsilon_i e^{-\epsilon_i/kT}}{\sum_i e^{-\epsilon_i/kT}} \right)^2 \quad (29.49)$$

или

$$kT^2 \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_{N,V} = \bar{\epsilon}_i^2 - \bar{\epsilon}_i^2 = (\Delta U)^2. \quad (29.50)$$

Уравнение (29.20) показывает, что флуктуации тесно связаны с удельной теплоемкостью при постоянном объеме. Когда большое изменение внутренней энергии системы N частиц с объемом V происходит при малом изменении температуры, могут возникнуть большие флуктуации. Используя другие ансамбли, подобным же образом можно вычислить флуктуации N и V . Существуют более мощные методы для вычисления смешанных моментов и моментов более высокого порядка (Callen, 1966).

Многие системы частично описываются уравнением состояния $P(T, V, N)$; таким образом, особенно удобной мерой их флуктуаций является среднеквадратичное изменение объема

$$(\Delta V)^2 = - \left(\frac{\partial V}{\partial (P/kT)} \right)_{T,N} = -kT \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_{T,N} = kTV\kappa_T. \quad (29.51)$$

Подобным же образом, фиксируя объем и рассматривая флуктуации числа частиц внутри него, получаем

$$(\Delta N)^2 = - \left(\frac{kTN^2}{V^2} \frac{\partial V}{\partial P} \right)_{T,N} = \frac{kTN}{V} \left(\frac{\partial N}{\partial P} \right)_{T,V}. \quad (29.52)$$

Для идеального газа, когда $PV = NkT$, мы снова получаем флуктуации порядка $\sqrt{N}$ в парциальном объеме. Оба случая справедливы для систем, находящихся в механическом равновесии с резервуаром давления.

Бесконечные резервуары интенсивных параметров, конечно, являются идеализациями. На практике обычно проводят воображаемую границу вокруг подобласти внутри системы и рассматривают остальную систему как резервуар. Затем рассматриваются флуктуации внутри подобласти интересующей нас системы. Это можно делать либо для одной подобласти в различные моменты времени, либо для многих подобластей в одно время.

При определенных режимах изменения термодинамических параметров система может терять свою «упругость». Например, если кинетическая энергия тел близка к равновесию с их энергией взаимодействия, то заметное изменение объема подобласти может не оказывать очень сильное влияние на давление. Тогда возможны большие флуктуации плотности. Для этих подобластей становятся одинаково вероятными микросостояния необычайно широкого диапазона. Некоторые из этих микросостояний могут обладать меньшей свободной энергией (или большей энтропией), чем предшествующие микросостояния, при слегка иных температуре, давлении или плотности. Как только подобласть попадает в такое микросостояние, предшествующие микросостояния становятся много менее вероятными. Подсистема оказывается в новом состоянии, как в ловушке. Эта подсистема меняет термодинамические функции окружающей системы. Множество таких подсистем может формировать ядра, и их новое микросостояние распространяется по всей системе. Происходит фазовый переход.

Множество флуктуаций постоянно провоцирует возможность фазового перехода. Как только складываются подходящие условия, такой переход происходит. Он влечет за собой многочисленные внезапные изменения. Лед превращается в воду, вода в пар. Кристаллы меняют структуру, магнитные структуры коллапсируют.

Термодинамика не может описывать систему, эволюция которой включает фазовые переходы. Ситуация здесь оказывается слишком далекой от равновесной; флуктуации величин сравнимы с их средними значениями. Однако термодинамическое описание содержит достаточно информации, чтобы подсказать собственный конец. После того как переход произойдет, можно прибегнуть к новому термодинамическому описанию, возможно, с измененным уравнением состояния. Более того, часто можно найти уравнения состояния, которые феноменологически позволяют приближенно объединить начало и конец перехода.

30. ГРАВИТАЦИЯ И ТЕРМОДИНАМИКА

30.1. СТАТИСТИКО-МЕХАНИЧЕСКИЙ ПОДХОД

Трудности, с которыми сталкивается статистическая механика даже в «обычных» лабораторных системах, настолько велики, что ее выводы имеют

тенденцию распадаться на два типа. Выводы одного типа получаются на основе фундаментальных принципов, они точны, но справедливы только для узкого класса искусственных систем. Они хороши тем, что дают четкие и понятные примеры явлений специального вида. Выводы другого типа получаются менее строго, они больше основаны на интуиции и применимы к системам, более близким к реальности. Эти выводы позволяют достичь практического понимания более интересных явлений. Правильность такого подхода можно проверить с помощью экспериментов и численных расчетов. Иногда строгие выводы удастся частично распространить на реальные системы, и это является главным поводом для оптимизма.

Сказанное в полной мере относится и к гравитационной термодинамике. При исследованиях полезны выводы обоих типов. Сначала покажем, что можно узнать точно о системах специального вида. Обычный прием, применяемый при упрощении задачи, состоит в том, чтобы сократить число измерений. Гравитационная статистическая сумма, если она двумерна, вычисляется точно, и это почти все, что требуется для нахождения уравнения состояния.

Двумерные системы не следует путать с объектами, расположенными на плоскости, гравитационный потенциал которых пропорционален r^{-1} . В нашем случае рассматриваются двумерные системы в трехмерном пространстве. Вернее, мы решаем двумерное уравнение Пуассона для точечной массы в начале координат. Действуя по аналогии с вычислением трехмерного кулоновского потенциала, читатель может показать, что

$$\phi_{ij} = Gm^2 \ln r_{ij}, \quad (30.1)$$

где $r_{ij} = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$. (Попробуйте рассмотреть также одномерный случай.) Такой же потенциал имеет бесконечный стержень с однородной плотностью в трехмерном пространстве (еще одно упражнение для читателя). Таким образом, движение материальных точек в двумерном представлении можно наглядно описать как движение набора бесконечных параллельных прямых, обладающих массой, наблюдаемое в плоскости, перпендикулярной им. Двумерный потенциал и задаваемая им сила $\propto r^{-1}$ являются дальнедействующими и не экранируются. Эти основные свойства, которые сохраняются и в трехмерном представлении, коренным образом меняют статистическую механику.

Двумерное уравнение состояния для давления при распределении, не зависящем от времени, легко получается из статистической суммы (29.45). Перепишем ее сначала для непрерывного энергетического спектра, заменяя суммирование интегралом по двумерным координатам и импульсам:

$$Z = \int e^{-U/kT} d\mathbf{x}_1 d\mathbf{p}_1 \dots d\mathbf{x}_N d\mathbf{p}_N. \quad (30.2)$$

Полная внутренняя энергия U равна гамильтониану сложной системы

$$U = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i}^N \phi(r_{ij}). \quad (30.3)$$

Здесь все массы для простоты считаются одинаковыми.

Теперь давление связано со свободной энергией $F(T, N, V)$ соотношением

$P = -(\partial F / \partial V)_{T, N}$ и отсюда — со статистической суммой посредством (29.46):

$$P = kT \frac{\partial \ln Z}{\partial V} \Big|_{T, N}. \quad (30.4)$$

В двумерной задаче площадь поверхности A играет роль объема. Рассматривая ее как двумерный объем, следует выделить зависимость от площади в соотношении (30.2). Чтобы это сделать, перейдем к безразмерным пространственным координатам x'_i , записав

$$x_i = A^{1/2} x'_i. \quad (30.5)$$

Заметим также, что в выражении для U пространственные составляющие и импульсы в статистической сумме разделены. Применительно к соотношению (30.4) нам следует рассмотреть только пространственную часть (обозначенную также через U в следующих трех уравнениях), включающую энергию взаимодействия. Таким образом,

$$Z \propto A^N \int e^{-U/kT} dx'_1 \dots dx'_N. \quad (30.6)$$

Беря производную, получаем

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial A} \right)_{T, N} = N A^{-1} Z - \frac{A^N}{kT} \int e^{-U/kT} \frac{\partial U}{\partial A} dx'_1 \dots dx'_N. \quad (30.7)$$

Вспомяная, что $r_{ij} = A^{1/2} r'_{ij}$, используем выражение (30.3), что дает

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial A} \right)_{T, N} = \frac{N}{A} Z - \frac{A^N}{kT} \int e^{-U/kT} \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{r_{ij}}{2A} \frac{\partial \phi(r_{ij})}{\partial r_{ij}} dx'_1 \dots dx'_N. \quad (30.8)$$

Введение потенциала (30.1) дает нам возможность выполнить суммирование тривиальным образом, так как теперь выражение содержит только $N(N-1)$ идентичных членов, не зависящих от r . Остающийся интеграл пропорционален ZA^{-N} . После подстановки в (30.4) получим точное уравнение состояния для двумерных гравитационных систем (Salzberg, 1965):

$$PA = NkT \left[1 - \frac{(N-1)Gm^2}{4kT} \right]. \quad (30.9)$$

Представим себе, что гравитационная связь частиц может изменяться по желанию. Тогда, поскольку $G \rightarrow 0$, или (что эквивалентно) $m^2/T \rightarrow 0$, снова получаем уравнение состояния для идеального газа. С другой стороны, так как число частиц возрастает, оно достигает критического значения $\approx 4kT/Gm^2$, при котором полная гравитационная энергия становится так велика, что давление исчезает. Если частицы теперь сближаются настолько, что ϕ_{ij} и, следовательно, U принимают большие по абсолютной величине отрицательные значения, то интеграл от статистической суммы (30.6) перестает сходиться. В этот момент чисто термодинамическое описание становится невозможным. Происходит фазовый переход, и система коллапсирует. Однако равновесная термодинамика не позволяет проследить подробности коллапса с возможной здесь фрагментацией.

Уравнение состояния (30.9) иллюстрирует также другую важную сторону гравитационной термодинамики. Когда взаимодействия существенны, термодинамические параметры в подобластях данной системы могут потерять свои простые свойства интенсивности и экстенсивности. Такая модификация справедлива и в обычной термодинамике неидеальных газов. По мере того как мы рассматриваем все большие и большие подобласти данной системы с постоянной плотностью, давление падает, так как его зависимость от N нелинейна. На первый взгляд может показаться, что такое поведение системы приводит к осложнениям. Однако это не столь важно по двум связанным между собой причинам. Во-первых, всегда можно вернуться к ансамблю Гиббса слабо взаимодействующих систем, что позволяет сохранить свойства интенсивности и экстенсивности, как обсуждалось в разд. 29.1. Во-вторых, как показано в следующем разделе, при отсутствии существенной корреляции подобласти данной системы могут взаимодействовать только слабо. Тогда подобласти ведут себя как ансамбль Гиббса, и термодинамические параметры остаются экстенсивными (или интенсивными) в незакоррелированных подобластях.

Переходя к трем измерениям, мы начинаем понимать, почему задача усложняется. При потенциале вида r^{-1} производная от статистической суммы зависит от точного положения всех объектов. Как будет показано в следующем разделе, это соотношение по-прежнему может быть записано в очень удобной форме. Однако сначала мы остановимся на некоторых строгих выводах трехмерной задачи, применимых к интересующей нас проблеме.

Чтобы существовало точное значение термодинамического предела, система должна иметь основное состояние равновесия. Чтобы в таком состоянии свободная энергия была минимальна, оно должно быть «насыщено». Это значит, что при возрастании N величина свободной энергии на одну галактику не должна меняться. В состоянии насыщения свободная энергия пропорциональна N . Если свободная энергия возрастает пропорционально более высокой степени N , то в термодинамическом пределе, когда $N \rightarrow \infty$, энергия связи на частицу тоже становится бесконечной. Таким образом, вещество в основном состоянии должно становиться все более и более плотным при возрастании N . Если взглянуть немного по-другому, то N должно возрастать, а V уменьшаться неограниченно, делая невозможным достижение термодинамического предела при $\rho \rightarrow \text{const}$.

Гравитационные системы, как часто отмечалось прежде, не насыщаются и, таким образом, не имеют предельного состояния равновесия. Трехмерные системы, находящиеся под воздействием одних только сил тяготения, в состоянии вириального равновесия (а оно не является предельным равновесным состоянием) обладают энергией связи, пропорциональной N^2 . Этот вывод меняется, если рассматривать совместно гравитационные и квантовомеханические силы, чтобы определить основное состояние (Levy-Leblond, 1969; Hertel et al., 1971). Когда существенны силы обоих типов, полная энергия выражается соотношением

$$U(N) \approx N(p^2/2m) - N^2(Gm^2/2r). \quad (30.10)$$

Если, согласно соотношению неопределенностей, минимальное расстояние между двумя частицами $r \geq h/p$, то минимизация U по импульсу p и подстановка этого значения p в выражение для U дают самый низкий энергетический уровень $U_0(N) \approx -N^3(G^2 m^5/8 h^2)$. Однако если частицы являются фермионами и подчиняются статистике Ферми, то их волны де Бройля h/p не могут перекрываться и тогда N частиц заполняют объем $\sim N(h/p)^3$ со средним расстоянием между частицами $r \geq N^{1/3}(h/p)$. Это ведет к немного большей степени насыщения основного состояния, чем было прежде ($N^{7/3}$ вместо N^3). Такие эвристические выводы относительно релятивистских фермионов представлены в пионерских работах Ландау и Чандрасекара, посвященных устойчивости белых карликов и нейтронных звезд. Там они получены более точно и строго на основе исследования термодинамического предела величин, имеющих вид $N^{-7/3}F(T, V, N)$ в основном состоянии. Отсутствие обычного термодинамического предела для гравитирующих фермионов снова указывает на то, что гравитационные системы существенно неустойчивы. В следующем разделе будет показано, каким образом к ним все же можно применять модифицированное термодинамическое описание.

Как и в двумерном случае, трехмерная гравитационная термодинамика пригодна для описания, если система не находится в сильно неравновесной фазе. Термодинамику можно применять к ансамблю медленно эволюционирующих гравитационных систем совсем так же, как положения обычной равновесной термодинамики применяются к обычным медленно эволюционирующим системам (*de Groot and Mazur, 1962*). Основная трудность здесь состоит в том, что никто не знает, как вычислять трехмерную статистическую сумму точно в замкнутом виде. Поэтому мы будем вынуждены использовать несколько менее замкнутую форму, которая связывает статистическую сумму с кинетической теорией.

30.2. КИНЕТИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Мы уже встречались с применением кинетической теории в соотношении (29.35), связывающем давление и двухточечную корреляционную функцию. Хотя это соотношение может быть выведено целиком из кинетической теории, теперь очевидна его более глубокая связь со статистической механикой.

Эту тесную связь легко понять, получая уравнение для давления в трехмерном пространстве так же, как было получено соотношение (30.9) для двух измерений. Таким образом, мы можем использовать прежний вывод повторно. Производная по объему от статистической суммы подобна выражению (30.8), за исключением того, что A заменено на V и множитель $1/2$ из преобразования безразмерных поверхностных (объемных) координат заменен на $1/3$. Теперь, хотя производная от $\phi(r_{ij})$ дает совокупность членов, зависящих от r_{ij} , все они сохраняют свою прежнюю форму. Их число снова равно $N(N-1)$, и

они представляют все пары объектов. Поэтому конфигурационный интеграл можно брать только по двум представительным парам координат dx_1, dx_2 , преобразованным обратно к обычным трехмерным координатам. Используя соотношение между локальной плотностью и двухточечной корреляционной функцией, выводим уравнение (29.35).

Теперь начинают выясняться причины, по которым очень важна функция $\xi(r)$. Она определяет расстояния между парами объектов, по полной потенциальной энергии которых можно судить о том, как тяготение влияет на термодинамические функции. Тот факт, что тяготение является парным взаимодействием, объясняет также с учетом соотношения (29.35), почему в термодинамике используются только двухточечные корреляции. Корреляции более высоких порядков не должны добавлять новой информации о взаимодействиях. Конечно, сама по себе величина $\xi(r)$ не может быть выведена из равновесной статистической механики. Поэтому следует привлечь кинетическую теорию из предыдущих глав, чтобы получить замкнутое описание. В действительности кинетическая теория в свою очередь связана со статистической механикой через теорему Лиувилля. Это обеспечивает знание всех положений и скоростей, а отсюда и возможность вычислить точно статистическую сумму, так что на этом уровне все описания гравитационных систем объединяются.

Уравнение (29.35) теперь также иллюстрирует, почему требования к гравитационной термодинамике не так жестки, как это может показаться на первый взгляд. Хотя интеграл от корреляционной функции формально имеет бесконечный предел, корреляционная функция обычно бывает отлична от нуля только внутри конечной области. Такие области часто малы по сравнению с астрономическими масштабами. В бесконечной системе такие области не будут сильно взаимодействовать и термодинамические параметры могут сохранять свои экстенсивные и интенсивные свойства на больших масштабах. Существует термодинамическое описание, в котором производится осреднение по областям, превосходящим по размерам те, в которых $\xi \neq 0$. Этот вид статистического экранирования чем-то аналогичен дебаевской сфере в плазме. Экранирование здесь, однако, слабее, потому что гравитационные крупномасштабные корреляции не уменьшаются экранированием зарядами противоположного знака, как это происходит в плазме. В космологических приложениях, таких как сгущивание галактик, начальные корреляции могут иметь меньшую длину и им может не хватить времени, чтобы вырасти до более крупных масштабов. Например, рассматривая раннюю эпоху, величину $\xi(r, t)$ из соотношения (24.1) можно подставить в (29.35), чтобы получить особый вид давления. Этот кинетический подход более подробно рассматривается в гл. 32.

Поскольку корреляции, сгущения и скопления в процессе эволюции растут по интенсивности и масштабу, термодинамические величины должны осредняться по все большему масштабу. На таких масштабах флуктуации по всем осредненным объемам малы. Тем не менее термодинамические характеристики, присущие большим масштабам, отражаются на свойствах систем меньших масштабов, так как все они взаимосвязаны.

В дополнение к усреднению крупномасштабных корреляций в гравитационной термодинамике пренебрегают корреляциями самых малых масштабов,

когда два объекта находятся в одной и той же точке конфигурационного пространства. На практике такие столкновения с нулевым моментом импульса случаются редко и заполняют незначительную долю фазового пространства. Более вероятно, что два объекта становятся связанными в результате близкого прохождения трех или более тел. Тогда связанные объекты можно рассматривать как один объект большей массы. Такова форма перенормировки масс. Эта операция повторяет в малом масштабе упоминавшееся выше осреднение по большим областям, где сильно закоррелированные участки рассматривались как одиночные объекты.

Как и в обычной термодинамике, в гравитационной термодинамике считается, что изменения параметров системы могут происходить за характерное время, в течение которого основная функция распределения (корреляции) существенно не меняется. Физические условия, делающие это возможным, в каждом случае свои. В обычной термодинамике взаимодействия на близком расстоянии (например, столкновения в газе) удерживают функцию распределения в состоянии, близком к равновесию. Эти взаимодействия имеют малое характерное время, а термодинамические изменения протекают относительно медленнее, поэтому функция распределения всегда успевает релаксировать. В гравитационных системах такая внутренняя стабильность отсутствует. Однако многие астрономические системы меняют свое основное распределение настолько медленно, что можно представить себе термодинамические процессы, происходящие за много меньшее характерное время, пока основное распределение изменится очень мало. Поэтому, например, можно считать функцию $\xi(r, t)$ как бы «замороженной» в данный момент времени t по отношению к термодинамическим изменениям. В гл. 31 будут определены условия, при которых такое приближение перестает быть справедливым.

30.3. МОДЕЛЬНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Рассматривая модели, мы делаем попытки найти математические описания, которые отразили бы физическую суть сложной проблемы. При первых исследованиях неидеального газа уравнение состояния Ван-дер-Ваальса описывало простую модель, которая учитывала фазовые переходы. Эта модель является представителем большого класса сходных по физическому смыслу, но математически более сложных уравнений состояния для однородных систем. Уместно задаться вопросом: как связать эти модели с гравитационными системами?

В термодинамике обычно рассматривается уравнение состояния Ван-дер-Ваальса, которое часто записывается таким образом:

$$\left(p + a \frac{N^2}{V^2}\right) \left(1 - b \frac{N}{V}\right) = \frac{NkT}{V}. \quad (30.11)$$

Как правило, такое уравнение хорошо описывает поведение газов в лаборатории. Значения постоянных a и b измеряются экспериментально. Они неодинаковы для разных веществ, но могут быть выведены из их физических свойств. Величина b характеризует близкодествующую часть потенциала взаимодействия между частицами, которая соответствует твердому отталкивающему

ядру; с ее помощью учитывается объем, занятый частицами. Величина a относится к дальнедействующей части потенциала, ответственной за уменьшение давления.

Для гравитационных систем, состоящих из точечных масс, $b = 0$, так как здесь нет жесткого ядра. Сравнение с соотношением (29.35) позволяет предположить, что уравнение Ван-дер-Ваальса можно применять, когда

$$a = \frac{1}{6} \int_0^\infty r \frac{d\phi(r)}{dr} \zeta(r, n, T) 4\pi r^2 dr. \quad (30.12)$$

Видно, однако, что такое приближение возможно только в случае, когда двухточечные корреляции не сильно зависят от плотности и температуры. Уравнение (24.1) для $\xi(r, T)$ показывает, что, когда корреляции в любой момент времени линейны, ξ не зависит от плотности, но существует зависимость от температуры, которую необходимо учесть. Поэтому даже слегка сгущенные гравитационные системы несколько более сложны для анализа, чем простой газ Ван-дер-Ваальса. Для получения лучшего приближения в уравнении (30.11) можно заменить a на a/T .

В более сложную модель можно включить, например, градиенты плотности. В классе таких моделей, исследованном Ландау, принималось, что локальная плотность свободной энергии системы может быть разложена по теории возмущений около своего однородного равновесного состояния. Тогда выражение для свободной энергии явно содержит члены, включающие $(n - \langle n \rangle)^2$ и $[\nabla(n - \langle n \rangle)]^2$, умноженные на постоянные коэффициенты. Однако такие более сложные феноменологические модели трудно связать непосредственно с «микроскопическим» описанием гравитационных систем.

В третьей части этой книги рассматривается моделирование свойств конечных систем. Помимо того что они имеют другие граничные условия, с ними надо обращаться совсем иначе, чем с бесконечными системами, поскольку пути их эволюции много более разнообразны. Возможность образования сильно асимметричных конфигураций обуславливает существование совершенно новой области энергетических состояний статистической суммы. Эти состояния подавляются в бесконечных системах, которые должны быть однородными на больших масштабах.

31. ГРАВИТЕРМОДИНАМИЧЕСКАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ

Существовали огромные колебания
Температуры... Ты знал, что однажды было тепло;
Но Холод — это высочайшая математическая Идея...
Холод — это Ноль...
Ничто, из которого возникает
Все Сущее и все перемены.

Эдит Ситвелл

31.1. ОБРАЩЕНИЕ В НУЛЬ СКОРОСТИ ЗВУКА

В гл. 15 было показано, как анализ, проведенный Джинсом для жидкости, и последующее рассмотрение с позиций кинетической теории предсказывают

гравитационную неустойчивость. Когда гравитационная энергия возмущения становится приблизительно равной его кинетической энергии, возмущенная среда становится неустойчивой и сжимается. При таком методе анализа распространение самогравитирующих волн сравнивается с гипотетическим распространением волн в негравитирующей среде. Как только тяготение становится более существенным, волны распространяются медленнее, пока не начнется скорее сжатие, чем перемещение.

Термодинамический подход позволяет описывать такое поведение волн и даже пойти дальше. Вводя гравитацию в уравнение состояния системы, можно непосредственно показать, как скорость звука обращается в нуль. В общем случае для адиабатической скорости звука существует выражение

$$c^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_s, \quad (31.1)$$

причем производная берется при постоянной энтропии. Уравнения состояния, такие как (29.35), не содержат явно выраженную энтропию, поэтому лучше всего переписать (31.1), введя более удобные производные, например $(\partial P / \partial V)_T$.

Чтобы переписать производные, воспользуемся приемами, рассмотренными в гл. 29. Применяя соотношения (29.5) и (29.8), получаем из (31.1)

$$\left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_s = - \frac{(\partial S / \partial \rho)_P}{(\partial S / \partial P)_\rho} = - \frac{\left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_P \left(\frac{\partial T}{\partial \rho} \right)_P}{\left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_\rho \left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_\rho} = \left(\frac{\partial T}{\partial S} \right)_P \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_T = - \frac{V^2}{mN} \frac{(\partial S / \partial T)_P}{(\partial S / \partial T)_V} \left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_T. \quad (31.2)$$

Здесь мы учли, что $\rho = mN/V$, и вынесли за скобки величину N , так как она везде постоянна. Последнее равенство содержит коэффициент удельной теплоемкости при постоянных давлении и объеме, который в кинетической теории обычных газов часто обозначается через γ . Для правильного применения этого коэффициента его необходимо исследовать более подробно.

Проницательный читатель отметит, что термодинамические производные из последнего равенства (31.2) содержат различные наборы независимых переменных. В $(\partial S / \partial T)_P$ независимыми переменными являются (T, P) , тогда как в других производных используются переменные (T, V) . Чтобы быть последовательными, нам следует всюду перейти к одному набору, скажем (T, V) . Самый простой и действенный способ выполнить это преобразование состоит в использовании формализма Якоби, уже знакомого нам по гл. 7 [см. уравнения (7.8) и (7.9)], в динамическом представлении.

Термодинамические якобианы определяются детерминантами, как в уравнении (7.9), однако теперь мы не ограничиваемся только абсолютными значе-

ниями величин. Преобразование $(u, v, \dots, w)$ к $(x, y, \dots, z)$ заключается в следующем:

$$\frac{\partial(u, v, \dots, w)}{\partial(x, y, \dots, z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \dots & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix} \quad * \quad (31.3)$$

Легко проверить, что якобианы обладают свойством

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{y, \dots, z} = \frac{\partial(u, y, \dots, z)}{\partial(x, y, \dots, z)}, \quad (31.4)$$

которое оказывается весьма полезным при преобразовании термодинамических производных. Более того, из свойств детерминантов следует, что

$$\frac{\partial(u, v, \dots, w)}{\partial(x, y, \dots, z)} = - \frac{\partial(v, u, \dots, w)}{\partial(x, y, \dots, z)}, \quad (31.5)$$

$$\frac{\partial(u, v, \dots, w)}{\partial(x, y, \dots, z)} = \frac{\partial(u, v, \dots, w)}{\partial(r, s, \dots, t)} \frac{\partial(r, s, \dots, t)}{\partial(x, y, \dots, z)}, \quad (31.6)$$

$$\frac{\partial(u, v, \dots, w)}{\partial(x, y, \dots, z)} = 1 / \frac{\partial(x, y, \dots, z)}{\partial(u, v, \dots, w)}. \quad (31.7)$$

Последние два свойства легко запомнить, поскольку формально они совпадают со свойствами обычных производных. С этими простыми преобразованиями мы снова встретимся в гл. 33, но в несколько ином контексте.

Теперь продолжим эти преобразования, чтобы совершить переход $(T, P) \rightarrow (T, V)$ в равенстве (31.2):

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_P &= \frac{\partial(S, P)}{\partial(T, P)} = \frac{\partial(S, P)}{\partial(T, V)} \frac{\partial(T, V)}{\partial(T, P)} = \frac{\partial V}{\partial P} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_V \frac{\partial P}{\partial V} \right]_T - \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_T \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V \\ &= \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_V \left[1 - \frac{\partial V}{\partial P} \right]_T \frac{\partial P}{\partial T} \left[\frac{\partial T}{\partial S} \right]_V \frac{\partial S}{\partial V} \left[\right]_T. \end{aligned} \quad (31.8)$$

Третье равенство следует из определения детерминанта. Последний член в (31.8) содержит производные по всем четырем переменным и, поскольку мы нуждаемся только в двух независимых переменных, чтобы определить термодинамику при $N = \text{const}$, нам надо еще больше упростить этот член. Подстановка (29.15) в последнюю производную по энтропии не исключает S как четвертую переменную. Чтобы преобразовать эту производную, нам требуется

нечто более действенное — соотношение Максвелла. Оно должно содержать вторую производную от функции, первая производная при постоянном объеме которой является энтропией и которая к тому же имеет производную по объему при постоянной температуре. Таким образом, это должна быть функция от температуры и объема при постоянном N . Таким требованиям удовлетворяет свободная энергия $F(T, V, N)$. Действительно, $F = U - TS$, так что $dF = dU - TdS - SdT$, и подстановка выражения (29.1) для dU при постоянном N показывает, что $dF = -SdT - PdV$. Поэтому

$$S = - \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_V \quad \text{и} \quad P = - \left(\frac{\partial F}{\partial V} \right)_T \quad (31.9)$$

и, таким образом,

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_T = - \frac{\partial^2 F}{\partial V \partial T} = - \frac{\partial^2 F}{\partial T \partial V} = \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V, \quad (31.10)$$

что и является искомым соотношением Максвелла. Введение его в соотношение (31.8) и объединение с (31.1) и (31.2) дает окончательно

$$c^2 = - \left(\frac{V^2}{mN} \frac{\partial P}{\partial V} \right)_T \left[1 - \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T \frac{\partial T}{\partial S} \right]_V \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V^2. \quad (31.11)$$

Здесь производные берутся по двум независимым переменным, T и V (напомним, что производная от энтропии может быть обращена), и, следовательно, выражение для скорости звука имеет столь же простой вид, как и в общем случае при постоянном N .

Примечательно, что скорость звука может обратиться в нуль, если уравнения состояния удовлетворяют равенству

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_T = \frac{\partial T}{\partial S} \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V^2. \quad (31.12)$$

Такого никогда не бывает при рассмотрении идеального газа, сжимаемость которого при постоянной температуре всегда положительна, как и удельная теплоемкость при постоянном объеме.

Гравитационные системы, однако, имеют два уравнения состояния, (29.34) и (29.35):

$$U(T, V, N) = \frac{3}{2} NkT - \frac{3N^2}{V} a(T, V, N), \quad (31.13)$$

$$P(T, V, N) = \frac{NkT}{V} - \frac{N^2}{V^2} a(T, V, N), \quad (31.14)$$

где

$$a(T, V, N) = \frac{2\pi}{3} Gm^2 \int_0^\infty r \xi(r, T, V, N) dr \quad (31.15)$$

является на самом деле корреляционной энергией, деленной на плотность числа частиц.

Теперь понятно, что в среде, однородной на больших масштабах, ξ содержит V и N только в сочетании $n = N/V$. Отметим, что обычное соотношение $P = 2U/3V$ для идеального газа больше не выполняется, и отношение давления к плотности энергии более общим образом зависит от вида потенциала и от интеграла по функции ковариации. Этот интеграл в гравитационных системах сходится, если $\xi(r)$ уменьшается быстрее, чем r^{-2} при $r \rightarrow \infty$. Тогда $a(T, V, N) \rightarrow a(T, n)$. Если интеграл не сходится, то термодинамические функции в конечных системах дополнительно еще и прямо зависят от объема (а также от формы) системы. В случае расходимости интеграла можно все же получить описание «глобальной» термодинамики и устойчивости. Однако в этом случае приходится пользоваться некоторыми термодинамическими взаимосвязями (например, уравнением Эйлера, которое зависит от однородности термодинамического потенциала) с величайшей осторожностью. В дальнейшем, если не оговорено обратное, будем считать, что интеграл сходится. В общем случае это утверждение справедливо в бесконечных системах, если корреляции не имеют времени вырасти на всех масштабах, или же если имеется хорошая экранировка от областей, где величина $\xi(r)$ отрицательна. В конечных системах, близких к равновесию, $\xi(r)$ также может существовать в области, много меньшей, чем размер системы.

Когда множитель $a(T, V, N)$ существует, можно удовлетворить условию (31.12) для $c^2 = 0$. Для проверки требуется производная $\partial S/\partial T|_{V, N}$, которая получается в результате деления $\Delta U = T\Delta S$ на ΔT и перехода к пределу при $\Delta T \rightarrow 0$, либо более формально из соотношения

$$\left. \frac{\partial S(U, V, N)}{\partial T} \right)_{V, N} = \frac{\partial S}{\partial U} \frac{\partial U}{\partial T} = \frac{1}{T} \left. \frac{\partial U}{\partial T} \right)_{V, N}. \quad (31.16)$$

Поскольку $U(T, V, N)$ уже имеет требуемую форму, подстановка (31.13)–(31.16) в (31.12) дает

$$-\left(1 - \frac{2N}{kV} \frac{\partial a}{\partial T}\right) \left(1 - \frac{2Na}{kTV} + \frac{N}{kT} \frac{\partial a}{\partial V}\right) = \frac{2}{3} \left(1 - \frac{N}{kV} \frac{\partial a}{\partial T}\right)^2. \quad (31.17)$$

Это и есть условие, которому должна удовлетворять корреляционная функция, чтобы звуковые волны перестали распространяться и возмущения сделались долгоживущими. Хотя само по себе определение скорости звука следует из линейных уравнений движения, изменения корреляционной функции в соотношении (31.17) могут быть большими и нелинейными. В этом смысле (31.17) содержит информации больше, чем линейное дисперсное соотношение. Информация о масштабе неявно содержится в форме $\xi(r)$, которую не нужно разлагать в ряд Фурье по длинам волн.

Для иллюстрации укажем, что, когда величина $a(T, V, N) = a_0$, т. е. постоянна, уравнение (31.17) требует, чтобы $Na_0/kTV = 5/6$ при $c = 0$. Тогда, если заменить интеграл от $\xi(r)$ на квадрат характерной длины, приравнять kT

к величине $mv^2/3$ и сравнить с соотношением (15.11), можно увидеть, что физический смысл в этом случае тот же, что и у критерия Джинса.

Более реалистичный случай, исследование которого приводит к новым результатам, осуществляется, если $\xi(r, t)$ не зависит от n . Здесь описывается линейное сгущивание [уравнение (24.1)], и такое описание можно применить и к нелинейному сгущиванию, форма которого сохраняется при различных плотностях. Тогда (31.17) становится квадратным уравнением относительно производных вида $da/\partial T$. Можно получить общее решение, используя преобразование Лежандра, физический же смысл этого решения выясняется без особого труда. Во-первых, заметим, что физическое требование вещественности $da/\partial T$ приводит к тому, что либо $Na/kTV \geq 5/6$, либо $Na/kTV \leq 1/2$. Правильность знака первого множителя в соотношении (31.17) определяет в каждом случае неравенство для $da/\partial T$. Объединение этих неравенств дает ограничения

$$\frac{\partial \ln a}{\partial \ln T} < \frac{3}{5} \quad \text{либо} \quad \frac{\partial \ln a}{\partial \ln T} > 1, \quad (31.18)$$

когда скорость звука становится равной нулю. Более того, как прямо следует из соотношения (31.17), поскольку $Na/kTV \rightarrow 5/6$, производная $da/\partial T \rightarrow 0$ и малое изменение дисперсии скоростей не влияет на гравитационное сгущивание. Система находится в нейтральном состоянии, которое готово стать неустойчивым.

31.2. ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ФЛУКТУАЦИИ

Наиболее важная особенность этих промежуточных состояний состоит в том, что флуктуации становятся очень большими. Эти флуктуации как бы постоянно проверяют, не существует ли в фазовом пространстве состояния с более высокой энтропией, в которое система могла бы перейти. Подстановка уравнения состояния (31.14) в (29.52) показывает, что момент флуктуации плотности имеет вид

$$\left(\Delta N\right)^2 = N \left(1 - \frac{2Na}{kTV}\right)^{-1}, \quad (31.19)$$

когда $a(T, V, N) = a(T, n)$ не зависит явно от V . Как и следовало ожидать, условие равенства нулю скорости звука по существу то же самое, что и условие существования больших флуктуаций.

Формально флуктуации становятся бесконечными. На самом же деле, как известно, бесконечного роста не происходит по нескольким причинам. Если даже не учитывать, что в конечной системе нет бесконечных ресурсов, очевидно, что поступление большого числа объектов из бесконечно большого резервуара должно занять очень много времени — по крайней мере не меньше, чем время одного пересечения системы при температуре T . Этот процесс должен привести систему в сильно неравновесное состояние, так что ее уже нельзя было бы дальше описывать с помощью равновесной термодинамики, которой мы пользуемся. Фактически все описание перестает быть справедливым, когда

$(\Delta N)^2$ становится порядка N^2 , после чего понятие средней величины теряет термодинамический смысл.

Чтобы нельзя было подумать, что сингулярность является всего лишь особенностью второго момента, нам следует отметить, что моменты более высокого порядка при тех же условиях расходятся еще сильнее, причем $(m + 1)$ -й момент расходится по крайней мере так же быстро, как выражение в скобках в соотношении (31.19), возведенное в степень $-m$; моменты многих других термодинамических параметров также сильно расходятся; это общая катастрофа — термодинамика рушится.

Подобласти системы находят состояния с большей гравитационной энтропией и оказываются связанными в скопления. Неоднородности плотности формируются во все более обширных областях и термодинамическое описание, предполагающее постоянство T , N и V , становится недействительным. Были сделаны попытки применить термодинамику в этих условиях, добавив в набор однородных параметров градиенты. При этом свободная энергия становится интегралом от плотности свободной энергии, который можно распространить за пределы равновесного значения, чтобы включить градиенты (приближение Ландау). Однако оказалось, что, как правило, условия становятся слишком необычными, чтобы такое приближение было полезным. Его основное достоинство состоит в том, что оно позволяет определить наступление режима больших осцилляций.

Вне такого режима, когда гравитация все еще существенна, теория флуктуаций дает по крайней мере принципиальную возможность вычислить вероятность любого состояния. Эта вероятность следует из обращения постулата Больцмана — Планка (29.43), выполненного Эйнштейном. Вероятность того, что случайное микросостояние системы характеризуется значениями экстенсивных параметров, принадлежащими интервалам $d\hat{x}_0 \dots d\hat{x}_n$, есть

$$\Omega d\hat{x}_0 \dots d\hat{x}_n = \Omega_0 e^{-\Delta S/k} d\hat{x}_0 \dots d\hat{x}_n. \quad (31.20)$$

Здесь Ω_0 — нормировочная постоянная, а ΔS — разность между энтропией интересующего нас микросостояния и энтропией наиболее вероятного (равновесного) микросостояния. «Крышка» сверху означает случайные величины.

Ранее, в гл. 3, было показано, как из преобразований Лапласа и Фурье получаются «характеристические» функции, из которых следуют моменты распределения, такие как $\Omega(\hat{x}_0, \dots, \hat{x}_n)$. Теперь, делая прямое преобразование Фурье для Ω в случае одной флуктуирующей переменной, скажем $\hat{x}_0$, получаем

$$\begin{aligned} \omega(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{iy\hat{x}_0} \Omega(\hat{x}_0) d\hat{x}_0 \\ &= e^{iyx_0} \int e^{iy(\hat{x}_0 - x_0)} \Omega(\hat{x}_0) d\hat{x}_0 \\ &= e^{iyx_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} \int (\hat{x}_0 - x_0)^n \Omega(\hat{x}_0) d\hat{x}_0 = \end{aligned}$$

$$= e^{iyx_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} \langle (\hat{x}_0 - x_0)^n \rangle, \quad (31.21)$$

где x_0 — среднее значение $\hat{x}_0$. Последнее равенство есть не что иное, как сумма по моментам флуктуаций. Поэтому, исходя из всех моментов флуктуирующих переменных, можно вычислить их распределение, применяя обратное преобразование Фурье

$$\begin{aligned} \Omega(\hat{x}_0) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iy\hat{x}_0} \omega(y) dy \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\langle (\hat{x}_0 - x_0)^n \rangle}{2\pi n!} \int e^{-iy(\hat{x}_0 - x_0)} (iy)^n dy \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \langle (\hat{x}_0 - x_0)^n \rangle}{n!} \delta^{(n)}(\hat{x}_0 - x_0). \end{aligned} \quad (31.22)$$

Последнее выражение следует из n -кратного дифференцирования интегрально-го Фурье-представления δ -функции: $\delta(x) = (2\pi)^{-1} \int e^{-ixy} dy$. Последующее интегрирование по частям показывает, что n -я производная от δ -функции обладает свойством $[\delta^{(n)}(x)] f(x) dx = (-1)^n f^{(n)}(0)$, где все интегралы берутся в пределах от $-\infty$ до $+\infty$.

Получив такой результат, мы можем выразить любую термодинамическую величину, включающую интеграл по распределению, как сумму, содержащую производные от моментов флуктуации, вычисленную в состоянии равновесия. Если флуктуируют несколько переменных, используется многомерное фурье-разложение. Поскольку моменты флуктуации зависят от уравнений состояния, которые в свою очередь определяются посредством $\xi(r)$, двухточечная корреляционная функция может описывать корреляции на большем масштабе. При этом мы не получаем какой-либо независимой информации, так как функция $\xi(r)$ сама определяется крупномасштабными корреляциями в иерархии масштабов, что и замыкает круг.

В отдельных случаях можно измерить $\xi(r)$ непосредственно, скажем путем подсчета галактик или постулируя ее форму при определенных физических условиях. Тогда выражение (31.22) позволяет описать корреляции более высокого порядка, совместимые с данной функцией $\xi(r)$. Такое описание можно получить, когда ряды сходятся и флуктуации не слишком велики.

31.3. ФЛУКТУАЦИИ ВО ВРЕМЕНИ

Аналогично вопросу о флуктуациях свойств гравитационных систем в пространстве, можно задать вопрос о том, как свойства определенной области пространства флуктуируют во времени. Выбранная область не изолирована от остальной системы, так что флуктуирующие свойства всюду одни и те же. В качестве примера рассмотрим полное число объектов $N(t)$ в какой-либо момент времени в фиксированном объеме. В этом случае объем принадлежит большому каноническому ансамблю.

Историю изменения термодинамического параметра, в частности $N(t)$, можно представить траекторией в фазовом пространстве, координатами которого являются параметр и время. На рис. 34 показана схематически такая траектория. Уравнения гидродинамики дают усредненную траекторию $N_0(t)$. Отклонения от усредненной траектории — это флуктуации $\eta(t)$, так что

$$N(t) = N_0(t) + \eta(t). \quad (31.23)$$

Обычные уравнения гидродинамики не дают никакой информации об $\eta(t)$. Иногда задача формулируется так, что в эти уравнения дополнительно вводятся флуктуирующие силы (Simon, 1970). Когда флуктуации малы, эти силы, очевидно, имеют в основном случайный характер, как принято в формулировках Ланжевена и Фоккера — Планка. Однако если временные флуктуации становятся более сильными и коррелированными, то для их описания требуется весь аппарат кинетической теории более высокого порядка. Флуктуации автоматически должны учитывать, что описание оборвано (исключены корреляции более высокого порядка и долгоживущие корреляции).

При альтернативном подходе следует вначале рассмотреть макроскопическое термодинамическое описание и выяснить, к чему оно приводит. Если $\eta \ll N_0$, предполагается, что изменения $N_0(t)$ и $\eta(t)$ независимы. В случае идеального газа в стационарном состоянии обычно полагают, что $\eta(t)$ удовлетворяет линейному уравнению регрессии

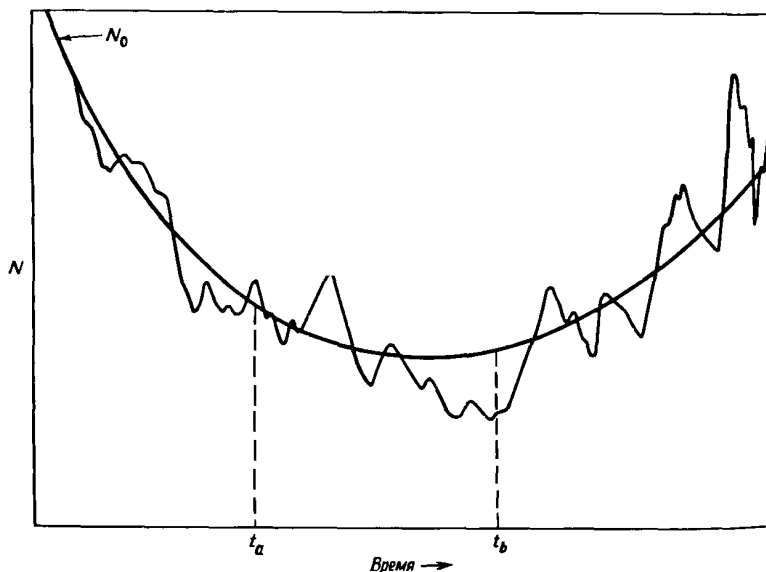


Рис. 34. Схематическая траектория в пространстве параметр — время, где параметром является число частиц.

$$\dot{\eta} = -\eta/\kappa, \quad (31.24)$$

где κ — положительная феноменологическая постоянная, связанная со временем затухания малой флуктуации. Такой подход является стохастическим, поскольку он дает описание наиболее вероятной (при заданных условиях) траектории затухания флуктуации. Обращенное во времени решение этого уравнения описывает наиболее вероятную траекторию роста флуктуации. Конечно, не все флуктуации эволюционируют наиболее вероятным образом, и если $N_0(t)$ изменяется, то наиболее вероятная траектория будет меняться со временем.

Чтобы обобщить уравнение (31.24), представим себе, что между моментами t_a и t_b на рис. 34 изображены всевозможные траектории, окружающие $N_0(t)$, по которым может следовать система. Очевидно, что вне фазовых переходов вероятность реализации каждой такой возможности уменьшается с увеличением суммарного отклонения данной траектории от $N_0(t)$. Чтобы выразить это утверждение количественно, нам нужна мера вероятности реализации произвольной траектории.

Найти ее можно с помощью уравнения (31.20). В нем предполагается, что вероятность любой траектории (т. е. «полной истории состояния системы») пропорциональна $\exp\{-[\Delta S(t)/k\tau]dt\}$, где отклонение энтропии интегрируется по траектории, а τ — характерное время. Это предположение не совсем верно, поскольку нам известно, что в идеальном газе, находящемся вблизи равновесия (что должно быть справедливо в частном случае), положительные флуктуации так же вероятны, как и отрицательные. Это побуждает нас ввести в показатель экспоненты интеграл от $(\Delta S)^2$ по траектории. Систему, сообщающую с тепловым резервуаром, можно описать с помощью ее свободной энтропии (29.41), которая теперь является явной функцией от времени $S(1/T, V, N, t)$. Эти соображения приводят к основному положению, что амплитуда вероятности (квадрат которой пропорционален вероятности) для любой траектории имеет вид

$$G = \exp \left\{ -\frac{N_0(t)}{2k^2\tau} \int_{t_a}^{t_b} \left[\frac{kT\tau}{\mu N_0(t_0)} \frac{d(S - S_0)}{dt} + \frac{\partial(S - S_0)}{\partial\eta} \right]^2 dt \right\}. \quad (31.25)$$

Здесь $S_0 = S(N_0(t))$ и μ — химический потенциал.

Уравнение (31.25) дает амплитуду вероятности отдельной траектории. Для нахождения полной амплитуды вероятности того, что система придет в состояние N_b из состояния N_a , следует проинтегрировать по всем возможным траекториям. Интегрирование выполняется с помощью элементарных приемов, которые хотя и просты, но выходят за рамки нашей книги. По этой причине ниже лишь упоминаются некоторые результаты (Saslaw, 1970).

В случае идеального газа с $N_0 = \text{const}$ уравнение (31.25) дает амплитуду вероятности $\psi(\eta, t)$ того, что система находится в макроскопическом состоянии (N, t) :

и

$$\psi(\eta, t) \propto e^{-t/a} e^{-\eta^2/b}, \quad (31.26)$$

где a — характерное время затухания и $b \approx N_0$. Дисперсия имеет вид $\eta \sim N^{1/2}$, как и следовало ожидать. Более того, корреляция флуктуаций плотности в два различных момента времени затухает экспоненциально, как следует из уравнения (31.24). Таким образом, в соотношении (31.25) мы пришли к объединенному описанию пространственных и временных флуктуаций. Когда N_0 не постоянно, на его изменяющемся фоне изменяются флуктуации обоих типов, которые теперь становятся взаимосвязанными, но тем не менее различимыми. Например, если $N_0(t) \propto t^{-m}$, наиболее вероятная траектория затухания флуктуаций плотности представляется выражением

$$\eta(t) = \eta(t_0) \left(\frac{t_0}{t} \right)^{m/2} \exp \left\{ - \frac{t}{\tau(m+1)} \left[\left(\frac{t}{t_0} \right)^m - \frac{t_0}{t} \right] \right\}, \quad (31.27)$$

которое теперь заменяет решение уравнения (31.24) и сводится к нему при $m = 0$. Когда $m > 0$, расширение увеличивает скорость затухания.

В гравитационных системах вид свободной энтропии меняется в соответствии с уравнениями (31.13)—(31.15). Термодинамика вновь становится принципиально иной, так как $Na/kTV \rightarrow 1$ (где a , конечно, определяется выражением (31.15)). Когда гравитационная и кинетическая энергии становятся сравнимыми по величине, амплитуда вероятности имеет неаналитическую особенность вида $\exp(1/x)$, где $x \rightarrow 0$. Выражение для наиболее вероятной траектории $\eta(t)$ также расходится (хотя эта расходимость аналитическая). Более того, когда система приближается к этому режиму, флуктуации в ней остаются положительно коррелированными на все больших и больших масштабах времени. Точно также на данном интервале времени корреляции возрастают.

Траектории, ведущие к гигантским флуктуациям и непрерывному коллапсу подсистем, становятся самыми вероятными. В гравитационной системе вклад от энергии тяготения в свободную энтропию противоположен вкладу кинетической энергии. Когда $Na/kTV \approx 1$, эти два вклада примерно уравниваются друг друга, хотя каждый сам по себе может быть очень велик. Когда это случается, большое флуктуационное возрастание плотности не вызывает больших отклонений энтропии (в отличие от идеального газа). Поэтому они становятся весьма вероятными. Система устремляется в состояние с экстремальными значениями энтропии, и, когда преобладает тяготение, экстремальные значения осуществляются в неоднородной фазе.

31.4. ГРАВИТАЦИОННЫЕ ФАЗОВЫЕ ПЕРЕХОДЫ

Дом, пораженный раздором, не может устоять...
Он целиком превратится либо в одно, либо в другое.

Авраам Линкольн

Гравитационные фазовые переходы качественно похожи на переходы других типов в физических системах, но им свойственны и существенные отличия. Все фазовые переходы имеют отношение к изменениям, обычно резким, типа преобладающей симметрии. Часто это изменение симметрии связано с изме-

нением крупномасштабных корреляций или порядка внутри системы. Обычные примеры — это появление дальнего порядка, когда газ конденсируется в жидкость, и появление симметрии при кристаллизации, когда жидкость переходит в твердое состояние. Внутри твердого вещества могут осуществляться фазовые переходы в различные кристаллические формы, когда изменяются давление и температура. Фазовые переходы происходят также в ферромагнетиках, сверхпроводниках и в жидком гелии. При таких процессах внешний вид образца может либо меняться, либо не меняться. В лаборатории переходы обычно происходят между двумя устойчивыми фазами, и, если исключить состояния, попадающие на критическую кривую на плоскости $P - T$, вещество находится целиком либо в одной, либо в другой фазе.

В бесконечных гравитационных системах одной из фаз является однородное распределение. При другой фазе существуют скопления и свободные объекты между ними, обладающие более высокой полной энергией. Пример такого распределения показан на рис. 35. Свободные объекты должны существовать, чтобы при образовании скоплений сохранялась полная энергия системы. Некоторые из таких «странников» выбрасываются из скоплений, движение других лишь слегка возмущается скоплениями, с которыми они никогда не были связаны. По прошествии длительного времени отдельные скопления захватывают «странников», обладающих подходящей энергией. В то же время скопления теряют некоторых своих членов. Насколько сбалансированы эти два процесса, не известно.

Поскольку никакая гравитационная фаза никогда не бывает устойчивой, система всегда находится в переходной фазе. Наиболее важная особенность такого перехода состоит в том, что он совершается с разными скоростями на различных масштабах. После формирования связанных скоплений их траектории подчиняются с большой точностью бесстолкновительному уравнению

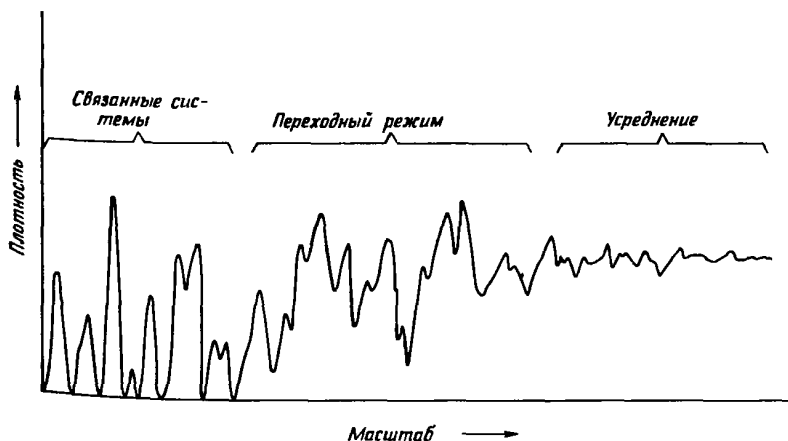


Рис. 35. Схематическое изображение флуктуаций плотности, имеющих разную характерную длину.

Больцмана и эволюция становится заметной не раньше, чем пройдет время $\geq N/(G\rho)^{1/2}$. Если рассматривать эти скопления как частицы в гравитационной системе, то можно ввести новую джинсовскую длину. Переход к сгущиванию второго порядка происходит быстрее всего на масштабе, соответствующем новой джинсовской длине. Хотя на больших масштабах система также неустойчива, им требуется большее время для роста, и среднее распределение по таким масштабам можно рассматривать снова как однородное в течение долгого времени. Описанная ситуация схематически иллюстрируется на рис. 35. Можно ожидать, что на малых масштабах внутри скоплений и на больших масштабах — там, где система близка к однородности, — термодинамика обеспечивает хорошее приближенное описание. В промежуточном диапазоне средние термодинамические величины теряют смысл, и именно на этом масштабе происходит фазовый переход. Приведенное описание одинаково хорошо применимо всюду во Вселенной.

Поскольку Вселенная эволюционирует, скопления, образовавшиеся первыми, объединяются в скопления второго порядка, затем из скоплений второго порядка образуются скопления третьего порядка и т. д., так что непрерывная иерархия сгущивания охватывает все большие масштабы. В этом смысле о Вселенной можно сказать, что она находится в состоянии непрерывного фазового перехода. Поскольку Вселенная имеет конечный возраст и в некоторый исходный момент распределение галактик в ней было однородным, степень скученности прямо связана со скоростью и достигнутой степенью расширения. Одни способы описания сгущивания более чувствительны к расширению, чем другие, как уже отмечалось в гл. 25—28. Во всех случаях самый важный результат состоит в том, что вклад тяготения в энтропию системы возрастет в процессе ее эволюции.

Физика гравитационных фазовых переходов понятна в меньшей степени, чем физика переходов, наблюдаемых в лаборатории. Например, понятие критической точки оказывается иным вследствие дальнего действия сил тяготения. Более того, при лабораторных фазовых переходах можно многое понять, изучая зависимости между термодинамическими величинами вблизи критической точки. Можно показать, что показатели экспонент, характеризующие расходимость этих величин, встречаются в определенных сочетаниях и удовлетворяют определенным условиям. В гравитационных же фазовых переходах еще многое предстоит изучить. В отсутствие лабораторных измерений полезную роль могут сыграть специально поставленные численные эксперименты.

32. ТЕРМОДИНАМИКА И СГУЩИВАНИЕ ГАЛАКТИК: $\xi(r) \propto r^{-2}$

Если идти этим путем,
То как ни идти и откуда ни выйти.
В любой час дня, в любое время года
Он всегда будет одним и тем же...

Г. Элиот

Гравитационная термодинамика применима ко многим астрофизическим задачам. В этой главе будет показано, как она объясняет тот факт, что для

сгущивания галактик характерно асимптотическое состояние $\xi \propto r^{-2}$. Позже, в третьей части книги, на основе гравитационной термодинамики будут описаны некоторые свойства конечных систем.

Численное моделирование сгущивания галактик, рассмотренное в гл. 27, показывает, что двухточечная корреляционная функция в конечном счете приближается к виду $\xi(r) \propto r^{-\gamma}$, где $\gamma \approx 2$. Этот результат приблизительно одинаков в широких пределах независимо от того, когда начинается сгущивание и каким образом оно происходит. В гл. 25 показано, что величина $\gamma = 2$ динамически устойчива. Теперь мы найдем, что она асимптотически устойчива в более глубоком термодинамическом смысле.

Чтобы двигаться дальше, нам нужно сделать предположение о форме двухточечной корреляционной функции. Степенные зависимости не имеют масштаба, т. е. $f(\lambda r)/f(r) = \lambda^k$ независимо от r^* . Ньютонов гравитационный потенциал меняется по степенному закону и космологический гравитационный фон не имеет масштаба (т. е. кривизна пренебрежимо мала) во всех моделях на тех расстояниях, где наблюдались существенные корреляции. Эти факты позволяют предположить степенной вид корреляционных функций. С другой стороны, если корреляций в начальный момент нет, то у них будет время для распространения только на некоторое расстояние $r_1(t)$ с тех пор, как образовались галактики. Более того, на некотором малом масштабе r_0 галактики не должны взаимодействовать как точечные массы в процессе эволюции. Эти соображения наводят на мысль, что степенная зависимость корреляции имеет обрывы сверху и снизу. Никакая простая аргументация не позволяет описать детали этих обрывов, хотя линейный анализ, приводящий к выражению (24.1), показывает, что $\xi(r)$ быстро убывает при больших r . По-видимому, физическую суть задачи можно описать, пользуясь простым условием обрыва

$$\begin{aligned} \xi(r, t) &= a(t)r^{-\gamma} \text{ для } r_0(t) \leq r \leq r_1(t) \\ &= 0 \text{ при остальных значениях } r. \end{aligned} \quad (32.1)$$

Амплитуда $a(t)$ будет зависеть также от T , N и V .

До сих пор с нашими предположениями были совместимы несколько значений γ ; особое значение $\gamma = 2$ будет выбрано из термодинамических соображений. Подстановка условия (32.1) в соотношения (31.12)–(31.14) дает выражения для внутренней энергии и давления

$$\begin{aligned} U &= \frac{3}{2}NkT - \frac{2\pi Gm^2 N^2 r_1^{2-\gamma} a(t)}{V(2-\gamma)} (1 - h^{2-\gamma}) \text{ для } \gamma \neq 2, \\ &= \frac{3}{2}NkT - \frac{2\pi Gm^2 N^2 a(t)}{V} \ln h^{-1} \text{ для } \gamma = 2; \\ P &= \frac{NkT}{V} - \frac{2\pi Gm^2 N^2 r_1^{2-\gamma} a(t)}{3V^2(2-\gamma)} (1 - h^{2-\gamma}) \text{ для } \gamma \neq 2, \end{aligned} \quad (32.2)$$

* В этом можно убедиться, следуя Эйлеру и дифференцируя по λ , полагая затем $\lambda = 1$ (частный случай) и выражая $f(r)$.

$$= \frac{NkT}{V} - \frac{2\pi Gm^2 N^2 a(t)}{3V^2} \ln h^{-1} \quad \text{для } \gamma = 2; \quad (32.3)$$

где $h \equiv r_0/r_1 \leq 1$. Отметим также, что $a(t)$ содержит характерную длину, которая может быть взята равной r_1 , так как вклад тяготения всегда меняется как r_1^{-1} .

Чтобы сделать термодинамическое описание полным, можно найти оставшееся уравнение состояния для химического потенциала μ . Эквивалентный, но менее трудоемкий альтернативный подход состоит в вычислении свободной энергии с помощью соотношения (29.42). Поскольку $\xi(r, t)$ не имеет масштаба по r , зависимость от температуры должна входить в выражение для амплитуды $a(t) = a(t, r_1, T, V, N)$. Положим

$$z \equiv 1/T \quad (32.4)$$

и разложим в ряд

$$a(z) = \sum a_m z^m. \quad (32.5)$$

Коэффициенты a_m могут зависеть от r_1, t, V и N . (Здесь индекс суммирования m не имеет ничего общего с массой.) Эффекты гравитационной корреляции должны исчезать в пределе, когда очень велика кинетическая энергия хаотического движения, т. е.

$$\lim_{z \rightarrow 0} a(z) = 0. \quad (32.6)$$

так что в этом разложении появляются только положительные степени m .

Подстановка соотношений (32.2) и (32.5) в (29.42) и интегрирование в пределах от $1/T_0$ до $1/T$ дают

$$\begin{aligned} F(T, V, N) &= \frac{T}{T_0} F_0(T, V, N) - \frac{2\pi Gm^2 N^2 r_1^{2-\gamma} (1 - h^{2-\gamma})}{V(2-\gamma)} \\ &\times \sum_{m=1} \frac{a_m}{(m+1)z} (z^{m+1} - z_0^{m+1}) \quad \text{для } \gamma \neq 2, \\ &= \frac{T}{T_0} F_0(T, V, N) - \frac{2\pi Gm^2 N^2 \ln h^{-1}}{V} \sum_{m=1} \frac{a_m}{(m+1)z} (z^{m+1} - z_0^{m+1}) \\ &\quad \text{для } \gamma = 2. \end{aligned} \quad (32.7)$$

Отметим, что $z \geq z_0$ по определению принятой за начало отсчета температуры. Интегрирование (29.42) не определено сверху для функции от N и V , которая входит в $F_0(T, V, N)$. Поскольку вся зависимость от температуры данного взаимодействия учитывается в процессе суммирования, член F_0 должен быть свободной энергией идеального газа хаотически движущихся галактик, лишённого корреляций, т. е. для него $h = 1$. Поэтому из обычной термодинамики следует, что [см. соотношение (29.38)]

$$F_0(T, V, N) = -\frac{S_0}{N_0} N T_0 - \frac{3}{2} N k T_0 \ln \frac{T}{T_0} - N k T_0 \ln \left(\frac{V}{V_0} \frac{N_0}{N} \right) = F_{\text{без взаимодействия}} \quad (32.8)$$

Уравнения (32.2), (32.3) и (32.7) вместе с (32.8) полностью определяют термодинамическое состояние системы, двухточечная корреляционная функция которой подчиняется степенному закону. Из них, пользуясь приемами, обсуждавшимися в гл. 29, можно вывести некоторые другие термодинамические свойства. В частности, полная энтропия по сравнению с энтропией основного состояния S_0 есть, согласно (29.41),

$$S = - \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_{V, N} = \frac{S_0}{N_0} N + \frac{3}{2} N k \ln \frac{T}{T_0} + N k \ln \left(\frac{V N_0}{V_0 N} \right) - \frac{2\pi G m^2 N^2 r_1^{-\gamma} (1 - h^{2-\gamma})}{V(2-\gamma)} \sum_{m=0} \left[\frac{m}{m+1} (z^{m+1} - z_0^{m+1}) + z_0^{m+1} \right]_{a_m} \quad (32.9)$$

для $\gamma \neq 2$. Для $\gamma = 2$ мы снова лишь заменяем множитель $r_1^{2-\gamma} (1 - h^{2-\gamma}) / (2 - \gamma)$ на $\ln h^{-1}$. Выражение (32.9) не является термодинамическим потенциалом $S(U, V, N)$, для записи которого требовалось бы знание температурной зависимости в $a(t)$ из (32.2) для того, чтобы исключить $T(U, V, N)$. Однако это выражение, представляющее энтропию в виде $S(T, V, N)$, наиболее удобно для наших целей. Хотя его можно обобщить далее, введя вместо степенного разложения формальное интегрирование $a(t)$ по температуре, разложение сразу же делает очевидными два результата.

Во-первых, когда $T = T_0$ (или $z = z_0$), единственной суммируемой энтропией является энтропия основного состояния. Отклонения от основного состояния вносят вклад в гравитационную энтропию, поскольку $z \geq z_0$. Только в пределе $T_0 \rightarrow \infty$ (т. е. $z_0 \rightarrow 0$) вклад тяготения в энтропию основного состояния отсутствует, так как корреляции исчезают. Во-вторых, член с $m = 0$ не вносит вклада в энтропию. Ни один член из выражения для энергии U , не зависящей от температуры [например, член, учитывающий эффект космологического расширения, $\propto (t/H)^2 N$], не влияет на энтропию. Это происходит потому, что здесь движение упорядочено.

Вклад тяготения в энтропию и другие термодинамические величины часто бывает противоположен по знаку вкладам эффектов «идеального газа» и бесстолкновительных взаимодействий. Теперь можно спросить, какое значение γ максимизирует вклад тяготения при любых h ? Предположение о том, что $\gamma = 2$, поскольку это единственное выделенное значение, приводит нас к сравнению двух функций

$$\Gamma(\gamma \neq 2) \equiv \frac{1 - h^{2-\gamma}}{2 - \gamma}, \quad (32.10)$$

$$\Gamma(2) \equiv \ln h^{-1} = -\ln h. \quad (32.11)$$

(Заметим, что множитель $r_1^{-\gamma}$ сокращается с r , входящим во все коэффициенты a_m .) При $h = 1$ (нет корреляций) эти две функции равны:

$\Gamma(\gamma \neq 2) = \Gamma(2) = 0$. Для любых других величин h наклоны этих двух функций равны соответственно

$$\frac{d\Gamma(\gamma \neq 2)}{dh} = -h^{1-\gamma} = -\frac{h^{2-\gamma}}{h} \quad \text{и} \quad \frac{d\Gamma(2)}{dh} = -\frac{1}{h}. \quad (32.12)$$

Поскольку $0 \leq h \leq 1$, при $\gamma < 2$ величина $d\Gamma(2)/dh$ меньше $d\Gamma(\gamma \neq 2)/dh$, так что $\Gamma(2) \geq \Gamma(\gamma \neq 2)$, причем знак равенства справедлив только при $h = 1$. Таким образом, при значениях $0 \leq \gamma \leq 2$ величина $\gamma = 2$ всегда минимизирует свободную энергию для $0 \leq h \leq 1$. С другой стороны, для $\gamma > 2$ свободная энергия становится бесконечной и отрицательной в пределе $h \rightarrow 0$ для точечных масс или больших масштабов корреляции. Поэтому значение $\gamma = 2$ действительно представляет собой барьер, поставленный термодинамикой. В гравитационных системах свободная энергия минимизируется в процессе их эволюции к $\gamma = 2$, и, очевидно, как раз это совершается при сгущивании галактик.

Если говорить об энтропии, то значение $\gamma = 2$ максимизирует вклад тяготения в полную энтропию. Поскольку этот вклад по знаку противоположен другим вкладам, в результате снижается величина полной энтропии. Когда преобладает тяготение, полная энтропия может стать отрицательной. Здесь ситуация совершенно не похожа на случай идеального газа, когда энтропия максимальна при равновесии. Так, по-другому выражается отсутствие равновесия в гравитационных системах. Поскольку $h \rightarrow 0$, значение $\gamma = 2$ дает экстремум энтропии. Таким образом, в этом отношении общий принцип, заключающийся в том, что системы стремятся к экстремальному значению энтропии (при данных ограничениях), применим и к гравитационным системам, и к идеальному газу.

Можно взглянуть на этот результат и с несколько иной точки зрения. В обычной неравновесной термодинамике идеальных газов предполагается, что вблизи равновесия термодинамические функции такие же, как и в положении равновесия, если не считать явной зависимости от времени. Поэтому давление и температура в расширяющемся облаке газа будут меняться со временем, но уравнение состояния останется таким же, как и в случае, когда газ стационарен. Физически это разумное предположение, если характерное время столкновительной релаксации меньше характерного времени макроскопических изменений.

Для гравитационных систем, как отмечалось в гл. 30, мы должны представить себе термодинамические изменения на временных масштабах, при которых корреляционная функция $\xi(r)$ «заморожена». Таким образом, мы полагаем, что T , V и N зависят от времени, а γ и a_m не зависят. Вычисление производной по времени от соотношения (32.9) с целью найти dS/dt при этих условиях показывает, что скорость накопления гравитационной энтропии максимальна при $\gamma = 2$.

Этот результат сильно отличается от своего аналога в случае идеального газа. У идеальных газов существует стационарное состояние, характеризующееся минимальной скоростью накопления энтропии (см. книгу *de Groot and*

Magur, 1962, упоминавшуюся в гл. 30). Грубо говоря, это происходит потому, что накопление энтропии связано с диссипацией. Состояния, в которых происходит сильная диссипация, не живут долго. Таким образом, следует ожидать, что в состоянии равновесия диссипация минимальна и поэтому минимально накопление энтропии. Гравитационное скучивание, однако, не имеет стационарного состояния равновесия. Однажды начавшись в бесконечной системе, скучивание продолжается до состояния, в котором накопление гравитационной энтропии максимально. Это состояние характеризует нелинейный ход эволюции системы.

Со временем система достигает асимптотического состояния максимальной энтропии при $\xi(r) \propto r^{-2}$ на все больших и больших масштабах. Мы видели, что процессы, вызывающие этот переход, не могут быть подробно описаны в рамках термодинамики; для этого требуется привлечение кинетической теории. Объединение этих двух описаний должно вывести нас на перспективный путь к пониманию неравновесной термодинамики гравитационных систем.

Флуктуации также максимизируются, когда $\gamma \rightarrow 2$. Подстановка соотношения (32.3) в (29.52), которую просто сделать, если учесть (29.6), показывает, что $\Delta N/N \rightarrow 1$, когда тяготение становится доминирующим. Эти большие флуктуации тождественны формированию четко выраженных и иногда связанных скоплений галактик. Район скучивания должен быть покинут множеством галактик, чтобы компенсировать энергию связи скоплений. Впоследствии эти галактики поля могут быть захвачены другими скоплениями. Таким образом, мы приходим к изучению эффективности процесса скучивания.

33. ЭФФЕКТИВНОСТЬ ГРАВИТАЦИОННОГО СКУЧИВАНИЯ

Ряд нелинейных описаний, подобных теореме вириала в приложении к космологии, может быть выведен непосредственно из основных законов, однако пока такой вывод для эффективности скучивания отсутствует. Приемлемый метод может состоять здесь в построении модели, достаточно простой, чтобы решение было аналитическим, в которой сохранялось бы физическое существо проблемы.

Предположим, что существует иерархия скучивания на различных четко определенных уровнях. Рассмотрим взаимодействие двух соседних уровней иерархий. Эти уровни могут соответствовать, например, скучиванию шаровых звездных скоплений (или субгалактик, если они состоят из множества шаровых скоплений), приводящему к образованию галактик. Это может быть также скучивание галактик, приводящее к образованию скоплений. Предполагается, что объекты низшего уровня внутри себя прочно связаны; мы будем называть их частицами и считать материальным точками. Объекты более высокого уровня объединены более свободно — это скопления.

Наш анализ начинается с области, где уже произошел фазовый переход. Плотность скопления велика по сравнению с плотностью окружающего фона. Не все частицы входят в скопления. Рассмотрим судьбу произвольной

странствующей частицы, которая движется через поле скоплений, и спросим, какова вероятность, что частица-странница будет захвачена скоплением? Эта вероятность и есть мера эффективности сгущивания.

Странствующая частица может быть одной из тех, которые были выброшены из формирующегося скопления, или же она никогда не была связанной. Поэтому ее скорость не связана со скоростями других частиц и скоплений каким-либо простым равновесным соотношением, но зависит от деталей ее предыдущей истории. Поэтому мы возьмем ее скорость в качестве начального условия.

В некоторый выделенный момент эволюции общая картина может включать скопления с различными радиусами и странствующие между ними частицы с различными положениями, скоростями и массами. Связь между частицей и скоплением определяется их относительной скоростью; аналогично связь между частицей и группой скоплений определяется скоростью частицы относительно центра масс группы. На эти относительные скорости будет влиять хаббловское расширение. Однако моделирование задачи N тел и анализ, проведенный в предыдущих главах, показывают, что, хотя скорость расширения влияет на время, в течение которого достигается данное состояние сгущивания, ее вклад в конечное состояние по истечении многих хаббловских времен можно считать вторичным. Когда скопления уже сформировались, дальнейшая эволюция сгущивания на этом уровне иерархии замедляется. Поэтому оказывается, что суть эффективности сгущивания можно понять, рассматривая частицы, движущиеся в нерасширяющемся поле скоплений.

Условие, при котором частица связана с некоторым скоплением или полем скоплений, состоит в том, что ее полная энергия (на единицу массы) по отношению к скоплениям отрицательна. Если принять, что заданы положение $\mathbf{r}_i$ и масса M_i для i -го скопления, то критерий связи произвольной частицы, обладающей скоростью v в положении $\mathbf{r}$, имеет вид

$$\frac{1}{2}v^2 - G \sum_i \frac{M_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} - 4\pi G \sum_j \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|} \int_0^{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|} \rho_j R^2 dR + \int_{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|}^{R_j} \rho_j R dR \right) < 0. \quad (33.1)$$

Сумма по i включает все скопления поля, которые не содержат данной частицы; сумма по j включает все те скопления, которым она принадлежит. Скопления считаются сферическими и нменюшими внутреннюю плотность ρ_j и радиус R_j . Некоторые скопления могут перекрываться. Чтобы сделать выражение (33.1) безразмерным, введем определения

$$\frac{v^2}{2GM_0/r_0} \equiv v_*^2, \quad (33.2)$$

$$M_i/M_0 \equiv X_i, \quad (33.3)$$

$$r_1/r_0 \equiv y_i, \quad (33.4)$$

$$\eta_i \equiv (4\pi r_0^3/M_0)\rho_i, \quad (33.5)$$

где M_0 и r_0 — характерные масса и длина. Тогда (33.1) принимает вид

$$E = v_*^2 - \sum_i \frac{X_i}{|y - y_i|} - \sum_j \left(\frac{1}{|y - y_i|} \int_0^{|y - y_i|} \eta_i v'^2 dy' + \int_{|y - y_i|}^{R_j r_0} \eta_j y' dy' \right) < 0. \quad (33.6)$$

Имея данную скорость v_* , частица будет связана с одним или несколькими скоплениями поля, если $E < 0$. Частица будет связанной в данной области, если в ней всюду $E < 0$. Таким образом, для любых v_* , y_i , X_i , R_j и η_j можно просто определить, является ли частица связанной. Хотя рассматривается не динамическая модель, можно ожидать, что связанная частица будет удаляться от центра скопления медленнее, чем при хаббловском расширении, и в конце концов она будет наблюдаться как член скопления. Необходимое для этого время зависит, естественно, от степени ее связанности и скорости хаббловского расширения.

Теперь мы существенно меняем нашу точку зрения на соотношения (33.6). Вместо того чтобы рассматривать одно поле скоплений, рассмотрим ансамбль полей. Это значит, что мы относимся теперь к величинам X_i , $|y - y_i|$, R_j и η_j так, как будто они получены из некоторого вероятностного распределения. Исходя из наличия такого вероятностного распределения, зададим вопрос, какова вероятность того, что $E < 0$. По определению это есть эффективность сгущивания. Она измеряет вероятность того, что случайное скопление удерживает частицу в данном распределении.

Далее мы должны классифицировать относящиеся к делу распределения и увидеть, как они отображают распределение E . Это можно сделать самосогласованным образом при наличии полной информации, как в случае моделирования задачи N тел. Здесь мы лишь опишем простой пример, в котором эффективность сгущивания скорее занижена по сравнению с более реальными случаями.

Самый простой вариант соотношения (33.6) содержит только два члена:

$$E = v_*^2 - X\sigma, \quad (33.7)$$

где

$$\sigma(y) = \frac{1}{|y - y_i|}. \quad (33.8)$$

Эта формула может соответствовать трем разным физическим ситуациям. Во-первых, она может описывать частицу внутри скопления. В этом случае X — масса вещества скопления внутри области, радиус которой соответствует положению частицы, а $X\sigma$ (при $y_i = 0$) есть не что иное, как потенциальная энергия частицы за вычетом вклада от массы вещества скопления, находящегося в области между $|r - r_j|$ и R_j . Если этот вклад велик, он почти не зависит от $|y - y_i|$ и может быть формально включен в v_* . Если он мал, им можно пренебречь и получить надежный нижний предел для эффективности сгущивания.

Вклады от других скоплений, которые увеличивали бы эффективность сгущения, считаются сравнительно малыми.

Во втором случае, описываемом соотношением (33.7), рассматривается частная, находящаяся вне скоплений, поведенье которой определяется гравитационной связью с ближайшим скоплением. Этот случай наиболее интересен. Третий случай применим, когда суммирование по i и j может быть описано данным статистическим распределением. Например, если значения всех $X_i/|y - y_i|$ и η_i не зависят друг от друга и если число членов настолько велико, что можно применить центральную предельную теорему, то распределение сумм приближается к нормальному гауссову. В этом случае следует учесть вклады от всех скоплений. Они представлены распределением X , в котором σ может быть нормирована к единице.

В формуле (33.7) мы можем при желании приписать вероятностные распределения величинам v , X и σ . Снова, чтобы упростить рассуждения, предположим, что скорость v относится к определенной частице и задана. Подобно этому, величина $\sigma(v)$ относится к данному положению и тоже задана (мы увидим также, как распределение σ изменяет результаты). Распределение массы [или распределение сумм в соотношении (33,6)] будет иметь плотность вероятности $f(X)$. Отсюда мы должны получить плотность вероятности $f(E)$.

Преобразование плотностей вероятности — это обычная процедура. Предположим, что $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ есть n -мерный случайный вектор для n случайных переменных X_i , имеющих совместную плотность вероятности $f_x(X_1, X_2, \dots, X_n)$. Положим, что существует детерминированное непрерывное взаимно однозначное преобразование E с непрерывными производными, которое отображает X на другой n -мерный случайный вектор $U = (U_1, \dots, U_n)$, имеющий совместную вероятность $f_u(U_1, \dots, U_n)$. Преобразование E определено n уравнениями $U_i = E_i(X_1, \dots, X_n)$, для которых существуют обратные преобразования $X_i = H_i(U_1, \dots, U_n)$. Попытаемся найти соотношение между f_x и f_u . Пусть в случае если событие X имеет вероятность $P\{X \in A\}$ быть найденным в области A , преобразованное событие U имеет ту же вероятность быть найденным в области EA , которая является образом A после преобразования E . (Вероятность события не должна зависеть от описывающих его переменных.) Таким образом, $P\{X \in A\} = P\{U \in EA\}$ или (при выражении через плотности вероятности)

$$\int_A f_x(X_1, \dots, X_n) dX_1 \dots dX_n = \int_{EA} f_u(U_1, \dots, U_n) dU_1 \dots dU_n. \quad (33.9)$$

Поэтому плотности вероятности преобразуются так же, как заменяются переменные в определенном интеграле:

$$f_u(U_1, \dots, U_n) = f_x(X_1, \dots, X_n) \left| \frac{\partial(X_1, \dots, X_n)}{\partial(U_1, \dots, U_n)} \right|, \quad (33.10)$$

где $X_i = H_i(U_1, \dots, U_n)$ и в конце стоит абсолютная величина уже знакомого нам якобиана

$$\frac{\partial(X_1, \dots, X_n)}{\partial(U_1, \dots, U_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial H_1}{\partial U_1} & \dots & \frac{\partial H_1}{\partial U_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial H_n}{\partial U_1} & \dots & \frac{\partial H_n}{\partial U_n} \end{vmatrix}. \quad (33.11)$$

Легко применить этот результат к выражению (33.7), где $n = 1$ и $U_1 = E$, что даст

$$f(E) = \frac{1}{\sigma(y)} f(X). \quad (33.12)$$

Возьмем теперь распределение масс скоплений (или сумму членов в выражении для потенциальной энергии), чтобы получить гауссову плотность

$$f(X) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \mu^{-1} [1 + \operatorname{erf}(1/\mu \sqrt{2})]^{-1} \exp\left[-\frac{(X-1)^2}{2\mu^2}\right], \quad (33.13)$$

нормированную в области $0 \leq X \leq \infty$. Таким образом, M_0 из выражения (33.3) есть наиболее вероятная масса (или величина суммы потенциальных энергий), а μ — мера дисперсии масс. Из уравнений (33.12) и (33.13) получаем

$$f(E) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \mu^{-1} \sigma^{-1} [1 + \operatorname{erf}(1/\mu \sqrt{2})]^{-1} \exp\left[\frac{(v_*^2 - E - \sigma)^2}{2\mu^2 \sigma^2}\right]. \quad (33.14)$$

Это выражение представляет вероятность того, что частица, движущаяся со скоростью v_* через поле скоплений, имеющих гауссово распределение масс, имеет полную энергию E по отношению к ближайшему окружению. Его можно также интерпретировать как вероятность того, что частица имеет энергию E по отношению ко всему полю скоплений при обстоятельствах, обсуждавшихся выше. Эта интерпретация зависит от расстояния частицы до ближайшего скопления (или от положения всех остальных скоплений). Распределение E также гауссово, но имеет наиболее вероятное значение $v_*^2 - \sigma$ и дисперсию $\mu\sigma$. Как и ожидалось, чем ближе частица к некоторому скоплению, тем больше σ и меньше (или больше по абсолютной величине при отрицательном знаке) становится ее наиболее вероятная энергия.

Используя выражение (33.14), теперь можно вычислить эффективность сгущивания или вероятность того, что частица связана, так как для данных

значений v_* , σ и μ

$$P\{E < 0\} = \int_{-\infty}^0 f(E) dE = \left\{ 1 + \operatorname{erf} \left[\frac{(1 - v_*^2/\sigma)}{\mu\sqrt{2}} \right] \right\} / [1 + \operatorname{erf}(1/\mu\sqrt{2})]. \quad (33.15)$$

Полезно вспомнить, что функция ошибок обладает свойствами

$$\operatorname{erf} z = 2\pi^{-1/2} z + O(z^3) \quad \text{при } z \rightarrow 0,$$

$$\operatorname{erf} z \rightarrow 1 - \pi^{-1/2} z^{-1} e^{-z^2} \left[1 - \frac{1}{2z^2} + O(z^{-4}) \right] \quad \text{при } z \rightarrow \infty. \quad (33.16)$$

Эффективность сгущения имеет некоторые интересные физические свойства. Когда преобладает влияние ближайшего скопления, она определяется дисперсией масс скоплений и отношением кинетической энергии частицы к ее гравитационной энергии. Если гауссова дисперсия масс очень велика, $\mu \rightarrow \infty$ и $P\{E < 0\} \rightarrow 1$ для любой конечной величины v_*^2/σ . Это происходит потому, что существует высокая вероятность найти частицу вблизи очень массивного скопления. При очень узком распределении масс $\mu \rightarrow 0$ и $P \rightarrow 0$, если $v_*^2/\sigma > 1$, но $P \rightarrow 1$, если $v_*^2/\sigma < 1$. Для $v_*^2/\sigma = 1$, $P \geq 1/2$ при любых μ . Для $v_*^2/\sigma \rightarrow 0$, $P \rightarrow 0$ при всех конечных μ , так как $\operatorname{erf}(-z) = -\operatorname{erf}(z)$. Когда $v_*^2/\sigma \rightarrow 0$, $P \rightarrow 1$. Все эти свойства вполне согласуются с интуитивными соображениями. Что удивительно, однако, так это широкий диапазон условий, при которых P велико, скажем $P > 1/2$, и захват странствующей частицы становится очень вероятным. Аналогичные выводы справедливы, когда распределение представляет собой гравитационную энергию всего поля скоплений. Следует также заметить, что наши результаты не зависят от деталей динамической траектории частицы.

Полученные результаты нетрудно обобщить на случай, когда σ также является случайной функцией в ансамбле полей. Теперь как массы скоплений, так и их дисперсия даются некоторой совместной плотностью вероятности $f(x, \sigma)$. Вводя переменные $X_1 = X$, $u_1 = E = v_*^2 - X\sigma$ и $u_2 = \sigma = X_2$, из соотношения (33.10) получаем

$$f(E) = \int \sigma^{-1} f\left(\frac{v_*^2 - E}{\sigma}, \sigma\right) d\sigma. \quad (33.17)$$

Тогда обобщенная эффективность сгущения для выражения (33.17) будет

$$P\{E < 0\} = \int \sigma^{-1} \int_{-\infty}^0 f\left(\frac{v_*^2 - E}{\sigma}, \sigma\right) dE d\sigma. \quad (33.18)$$

Если нет корреляции между пространственным распределением скоплений и их массами, то

$$f\left(\frac{v_*^2 - E}{\sigma}, \sigma\right) = f_1\left(\frac{v_*^2 - E}{\sigma}\right) f_2(\sigma), \quad (33.19)$$

и выражение для эффективности сгущивания упрощается. В частном случае, когда $f_2(\sigma) = \delta(\sigma - \sigma_0)$, этот результат сводится к предыдущей форме.

Применение этого подхода к более сложным моделям сопряжено с некоторыми затруднениями (Saslaw, 1979). Однако трудно избежать основного вывода, что сгущивание весьма эффективно. Расчеты для N тел, описанные в гл. 28, также показывают высокую эффективность сгущивания; несгущенными остаются лишь немногочисленные галактики поля.

Теперь мы в состоянии использовать модель, чтобы выяснить, как корреляции между скоплениями влияют на эффективность сгущивания. После анализа, проведенного в гл. 32, нас не удивит, если мы обнаружим, что $\xi(r) \propto r^{-2}$ максимизирует эффективность сгущивания. Чтобы это увидеть, необходимо только обобщить анализ, результатом которого стало соотношение (27.7). Предположим для простоты, что частицы и скопления имеют одинаковое пространственное распределение. Вероятность найти скопление на расстоянии между r и $r + dr$ от частицы есть, как обычно,

$$\omega(r)dr = 4\pi nr^2(1 + ar^{-\gamma})dr. \quad (33.20)$$

Чтобы найти σ , нам нужно преобразовать $\omega(r)dr$ в распределение ближайших скоплений. Это можно сделать просто, если пренебречь двумя эффектами, которые несущественны для результата. Первый состоит во влиянии некоторой априорной информации о том, что в интервале между 0 и r нет скоплений, на вероятность существования объектов в точках 0 и r . Второй — это влияние трехточечных корреляций и корреляций более высокого порядка на положение ближайшего скопления. С такими упрощениями вероятность $\omega_1(r)dr$ того, что ближайшее к частице скопление находится между r и $r + dr$, по аналогии с (27.5), выражается в виде

$$\omega_1(r) = 4\pi nr^2(1 + ar^{-\gamma}) \exp \left[- \left(\frac{4\pi nr^3}{3} + \frac{4\pi nar^{3-\gamma}}{3-\gamma} \right) \right]. \quad (33.21)$$

При $a = 0$ она сводится к выражению (27.5) для однородного случайного распределения.

Чтобы оценить влияние корреляций на ожидаемую величину расстояния r_1 до ближайшего скопления, рассмотрим случай $a < 1$:

$$\langle r_1 \rangle = \int_0^\infty r \omega_1(r) dr = \frac{0.55}{n^{1/3}} - \frac{1}{3-\gamma} \left(\frac{4\pi n}{3} \right)^{(3-\gamma)/3} \Gamma \left(\frac{4-\gamma}{3} \right) a + O(a^2). \quad (33.22)$$

При $0 < \gamma < 3$ ожидаемое расстояние до ближайшего скопления уменьшается с ростом a .

Потенциальная гравитационная энергия в соотношении (33.6) ведет себя более интересным образом. Ее ожидаемая величина является суммой ожидаемых энергий каждого из скоплений поля. Поскольку все эти члены отрицательны, использование только первого члена, отвечающего ближайшему скоплению, дает минимальную величину гравитационной связи. Поэтому, исполь-

зую соотношение (33.7) с $\langle \sigma(r_1) \rangle = \langle r_1^{-1} \rangle$, получаем наименьшую ожидаемую эффективность сгущивания. Поскольку в выражении (33.20) вероятность вычислялась для любой частицы в поле скоплений, не имеет значения, в каком месте поля находится частица (предположим для простоты, что она не находится внутри скопления). С помощью выражения (33.21) проще всего исследовать случай малой и большой корреляции отдельно. При $\gamma < 3$

$$\begin{aligned} \langle \sigma \rangle &= \left\langle \frac{1}{r_1} \right\rangle = \int_0^{\infty} r^{-1} \omega_1(r) dr \\ &= \left(\frac{4\pi n}{3} \right)^{1/3} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) + \frac{a}{3-\gamma} \left(\frac{4\pi n}{3} \right)^{(\gamma+1)/3} \Gamma\left(\frac{2-\gamma}{3}\right) \text{ для } \xi \ll 1 \\ &= \Gamma\left(\frac{2-\gamma}{3-\gamma}\right) \left(\frac{4\pi n a}{3-\gamma} \right)^{1/(3-\gamma)} \text{ для } \xi \gg 1. \end{aligned} \quad (33.23)$$

Когда незакоррелированная первоначально система эволюционирует и корреляции растут, можно ожидать, что γ возрастает, начиная с нуля. Когда $\gamma \rightarrow 2$, как $\Gamma[(2-\gamma)/3]$, так и $\Gamma[(2-\gamma)/(3-\gamma)]$ расходятся как $(2-\gamma)^{-1}$, т. е. имеют простой полюс при $\gamma = 2$. Это наш старый знакомый — логарифмическая расходимость, скрывающаяся в интеграле для $\langle 1/r_1 \rangle$, когда $a \neq 0$ [можно воспользоваться выражением (33.21) для малых r_1]. Таким образом, даже минимальная величина $\langle \sigma \rangle$, обязанная своим существованием ближайшему скоплению, становится очень большой, когда $\gamma \rightarrow 2$. Мы имеем здесь дело с системой, обладающей определенным значением σ , а именно со средней величиной $\langle \sigma \rangle$, а не с ансамблем, обладающим распределением значений σ . Поэтому мы только подставляем $\langle \sigma \rangle$ в (33.15), чтобы получить эффективность сгущивания.

Даже не слишком подробная модель показывает, что значение $\gamma = 2$ максимизирует эффективность гравитационного сгущивания. Этот результат является другим аспектом стремления системы максимизировать гравитационный вклад в полную энтропию. Похоже, что эта тенденция преобладает в наблюдаемом распределении галактик по небу. Обнаруженные малые отклонения γ от 2 могут быть обусловлены корреляциями в распределении поглощающей пыли внутри нашей Галактики или же остаточными эффектами первоначальных условий и космологического расширения.

34. НЕЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ КОРРЕЛЯЦИЙ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

И все, и вся Материя живет,
Смерть — это лишь существования вид,
Как пузыри средь водного покрова,
Мы лопаемся, став водою снова.

Александр Поуп

34.1. УРАВНЕНИЕ СОСТОЯНИЯ

Представим себе жизнь, какой она могла быть миллион лет назад. Вы находитесь в джунглях, и к вам подкрадывается тигр. Ваша способность выжить зависит от способности распознавать образы. Если вы можете различить только полосы на шкуре тигра (корреляции малого масштаба), но не всего тигра целиком, то будете застигнуты врасплох. Возможно, именно так развилась способность нашего зрения распознавать корреляционные функции высокого порядка. Подобным же образом, ограничив свое исследование скупивания только двух- и трехточечными корреляционными функциями, мы многое упускаем. Требуется простая мера скупивания высокого порядка, которая была бы также связана с основами гравитационной физики.

В гл. 27 мы видели, что гравитационное скупивание может быть охарактеризовано распределением пустых полостей. Они в свою очередь связаны с корреляциями высокого порядка, описывающими галактики, которым следовало бы находиться в полости, но которых там нет. Мы можем обобщить идею полостей, рассматривая функции распределения $f(N)$, определяющие вероятность найти некоторое число галактик внутри объема V произвольной формы и размера. При $N = 0$ распределение полостей описывается функцией $f = (0)$, которая вычисляется с помощью соотношения (27.7) для распределения Пуассона. Поскольку скупивание эволюционирует, мы должны найти какой-либо метод вычисления отклонений $f(N)$ от пуассоновского распределения.

Применение уравнений ББГКИ здесь не поможет, поскольку режим быстро становится нелинейным. В этой ситуации остается надежда на термодинамику, и эта надежда действительно оправдывается! Как показано в разд. 30.2, в двухточечной корреляционной функции содержится много информации о скупивании на больших масштабах, так как она эволюционирует согласованно со всеми корреляционными функциями более высокого порядка. Наша задача состоит в том, чтобы извлечь информацию о корреляциях более высоких порядков из двухточечной функции, вообще не решая уравнений ББГКИ.

В нескольких предыдущих главах было описано, как двухточечная корреляционная функция определяет термодинамические свойства бесконечной системы. Среди этих свойств — уравнения состояния, учитывающие гравитацию. Они в свою очередь определяют равновесные флуктуации. Именно из этих флуктуаций — временно образовавшихся скоплений, которые возникают, разрушаются и часто диссипируют, — можно извлечь функцию распределения $f(N)$. Далее мы увидим, насколько хорошо согласуются выводы теории и результаты моделирования задачи N тел.

Рассмотрим снова нашу бесконечную систему галактик с одинаковыми массами m . Расширяющийся фон косвенным образом устраняет среднее поле тяготения, но он не входит явно в термодинамику. Напишем уравнения (29.34) и (29.35) для внутренней энергии и давления в форме

$$U = \frac{3}{2} NT(1 - 2b), \quad (34.1)$$

$$P = \frac{NT}{V} (1 - b). \quad (34.2)$$

Температура (в энергетических единицах, с постоянной Больцмана, равной единице) определяется кинетической энергией хаотического движения

$$K = \frac{3}{2} NT = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m v_i^2, \quad (34.3)$$

где суммируются пекулярные скорости N галактик в объеме V . Величина b из соотношения (29.34) служит мерой влияния гравитационной энергии корреляций W :

$$b \equiv -\frac{W}{2K} = -\frac{2\pi G m^2 n}{3T} \int_0^{\infty} \xi(n, T, r) r dr. \quad (34.4)$$

Величина b зависит от формы двухточечной корреляционной функции ξ , а в гл. 32 показано, что $\xi \propto r^{-2}$ в конечной области максимизирует гравитационную энтропию сгущивания. Здесь, однако, b интересует нас в первую очередь как функция n и T . Поэтому мы полагаем, что интеграл по координатам вычислен, и в результате получена квазиравновесная величина $b(n, T)$ для некоторого момента времени.

Полученная величина $b(n, T)$ содержит информацию о сгущивании на всех масштабах вследствие зависимости ξ от всех N -точечных корреляций из полного набора уравнений БГККИ. Таким образом, определение $b(n, T)$ заменяет решение всей связанной цепочки уравнений БГККИ при данных начальных условиях. Конечно, такой подход оказался бы бесполезным, если бы была определена неправильная или неустойчивая функция $b(n, T)$. Однако вид $b(n, T)$ сильно ограничен простыми физическими соображениями.

Во-первых, величина $b(n, T)$ должна зависеть только от определенной комбинации n и T . В этом можно убедиться несколькими способами. Нетрудно заметить, что b — функция безразмерного отношения потенциальной и кинетической энергий. В бесконечной термодинамически однородной системе единственной характерной длиной, которая входит в выражение для потенциальной энергии, является среднее расстояние между галактиками $\bar{r} \approx n^{-1/3}$. Таким образом, b должна зависеть только от отношения потенциальной и кинетической энергий двух типичных галактик, находящихся на этом расстоя-

ний, т. е. от $Gm^2/Tn^{-1/3}$. Чтобы избавиться от дробного показателя степени, возведем это отношение в куб и запишем

$$b = b(G^3 m^6 n T^{-3}) = b(n T^{-3}). \quad (34.5)$$

Этот результат также следует (более формально) из инвариантности масштаба. Величина b и соответствующие ей термодинамические свойства определяются усреднением по однородным системам. Снова $\bar{r} = n^{-1/3}$ — это единственная характерная длина, которая может быть построена для термодинамических переменных, которые описывают систему. Все другие длины, включая корреляционную, должны быть кратны $\bar{r}$. Предположим, что существует (возможно, непрерывная) иерархия скучивания. Требование однородности означает, что величина b инвариантна в отношении преобразования масштаба $\bar{r} \rightarrow \lambda \bar{r}$. Физически это равносильно тому, что значение b одинаково для различных уровней иерархии скучивания на масштабах, превышающих масштаб двухточечных корреляций на этом уровне. Поэтому $n^{-1/3} \rightarrow \lambda n^{-1/3}$ или $n \rightarrow \lambda^{-3} n$ и $b \rightarrow \lambda^0 b = b$, причем последнее уравнение выражает масштабную инвариантность. Поскольку b есть отношение $-W/2K \propto Gm^2 N^2 / rNT$, масштабная инвариантность требует, чтобы $T \rightarrow \lambda^{-1} T$, потому что число N относится к очень большому фиксированному объему и не зависит от уровня иерархии скучивания. Физически такое введение масштаба для температуры означает, что скопления на более высоком уровне иерархии обладают меньшими случайными скоростями относительно друг друга, чем скопления меньшего размера. (Этот эффект не следует путать с изменением масштаба, которое происходит во время физического расширения системы как целого.) Масштабная инвариантность поэтому требует, чтобы

$$b(\lambda^{-3} n, \lambda^{-1} T) = b(n, T). \quad (34.6)$$

Это — функциональное уравнение, решение которого, как легко видеть, имеет вид (34.5).

Существует другое, возможно, более тонкое ограничение, которое тоже ведет к условию $b = b(n T^{-3})$. Оно состоит в том, что энтропия системы, находящейся в равновесии (здесь применительно к нашему квазистатистическому состоянию), не зависит от пути, которым система пришла в данное состояние. Другими словами, энтропия должна выражаться полным дифференциалом. Подстановка выражений (34.1) и (34.2) в соотношение (29.40) показывает, что энтропия выражается в виде

$$d\left(\frac{S}{N}\right) = d \ln(n^{-1} T^{3/2}) - 3db + b d \ln(n T^{-3}). \quad (34.7)$$

Как видно снова, чтобы энтропия была полным дифференциалом, не зависящим от того, каким путем система достигла своего состояния, должно удовлетворяться соотношение (34.5). Поэтому мы приходим к виду соотношения $b = b(n T^{-3})$, исходя из трех связанных в своей основе точек зрения.

Для распределения полостей не играет роли, как b зависит от $n T^{-3}$; оказы-

вается, здесь требуется лишь конечное значение b . Однако для выяснения распределений вероятностей $f(N)$ при $N > 0$ необходимо знать функциональную форму $b(nT^{-3})$. Физические ограничения, которые мы рассмотрим ниже, ставят для нее жесткие пределы.

Как видно из определения (34.4), возможные значения b заключены между нулем (нет тяготения или корреляций) и единицей (вириальное равновесие). Поскольку b зависит от произведения $G^3 m^6 T^{-3} n$ в целом, значение $b = 0$ получается как при отсутствии тяготения, так и при $n \rightarrow 0$. Обычно термодинамические переменные являются аналитическими функциями друг друга. Поэтому разложение в степенной ряд для $b(G^3 m^6 n T^{-3})$ должно начинаться с линейных членов. Это согласуется с требованием малости корреляций при высокой температуре. Между прочим, такая аргументация приводит к теории Дебая — Хюккеля, если ее применять к разреженной плазме и электролитическим растворам. Рассматривая тяготение, мы больше интересуемся нелинейными членами, и здесь нам на помощь приходит теорема вириала. При низких температурах и высоких плотностях образуются более тесно связанные скопления. Такие скопления объединяют все большее число галактик и приближаются к состоянию вириального равновесия, что означает $b \rightarrow 1$, когда $nT^{-3} \rightarrow \infty$. Предельным случаем является иерархия тесно связанных двойных систем. Простейшая форма, обладающая таким свойством, имеет вид

$$b = \frac{b_0 n T^{-3}}{1 + b_0 n T^{-3}}, \quad (34.8)$$

где $(Gm^2)^{-3} b_0$ — положительная безразмерная константа.

Эта форма b может также рассматриваться как первое приближение Паде для некоторой функции общего вида $b(nT^{-3})$. Непрерывная дробь удовлетворяла бы физическим условиям, наложенным на b , но соотношение (34.8) приводит к простейшей форме статистического распределения по объему для N галактик $f(N)$, которое хорошо согласуется с результатами численных экспериментов. Таким образом, оно кажется разумным приближением, хотя строгую связь его с цепочкой уравнений БГКИ еще предстоит исследовать. Иногда, для того чтобы продвинуться вперед, необходимо разрубить гордиев узел.

Эта форма b имеет интересные термодинамические применения. Рассмотрим, например, следующую из нее энтропию. Подстановка выражения (34.8) в (34.7) и интегрирование дают

$$\frac{S}{N} = \ln n^{-1} T^{3/2} - 3b - \ln(1 - b) + s_0. \quad (34.9)$$

Как и ожидалось, S является экстенсивной переменной. Для малой величины b и данной средней плотности слабо коррелированная структура уменьшает S по сравнению со значением, соответствующим случайному максвелловскому распределению с $b = 0$ (случай идеального газа). Энтропия уменьшается здесь потому, что сгущивание однородно, и теория в этой простой форме не учитывает переход от сгущенных галактик к галактикам поля и изменение распре-

ления скоростей. Когда $b \rightarrow 1$, субскопления образуются при вириальном равновесии. Внутри каждого субскопления распределение снова становится случайным максвелловским. Когда большинство галактик находится в вириализованных скоплениях, вклад в энтропию от явных гравитационных членов $S_{\text{грав}} = -3b - \ln(1 - b)$ становится положительным и, когда $b \rightarrow 1$, $S_{\text{грав}} \rightarrow \infty$ с логарифмической расходимостью.

Подстановка выражения для температуры, полученного из (34.8), в соотношение (34.9) показывает, что полная энтропия системы с постоянной средней плотностью также становится бесконечной, когда $b \rightarrow 1$. Поэтому экстремум энтропии в бесконечной гравитационной системе не достигается, когда все частицы захватываются точечной сингулярностью. Это происходит, когда существует иерархия сгущивания, достигшая вириального равновесия на всех масштабах. Такая ситуация в корне отличается от существующей внутри одного конечного скопления (см. гл. 43). В конечном скоплении распределение плотности никогда не бывает однородным на каком-либо заметном масштабе, и корректный подсчет состояний отличается от подсчета в бесконечной системе, которая может быть осреднена по большим масштабам. На подсчет состояний в конечных системах также сильно влияет образование тесно связанных пар (гл. 48). В бесконечных системах образование таких пар подавляется общим расширением, и небольшое число пар, которые все же формируются, имеет лишь локальное значение.

34.2. ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ $f(N)$

Теперь мы можем получить аналитическое выражение для вероятности $f(N)$ найти N галактик в случайно выбранном объеме V . Рассмотрим большую систему, которая по предположению описывается равновесной гравитермодинамикой, по крайней мере в первом приближении. Составим ансамбль подобластей одинакового объема, много меньшего, чем полный объем. Как число галактик, так и их полная энергия будут различными у членов этого ансамбля. Это некий разумный способ составить представительную выборку для всей Вселенной. С точки зрения термодинамики можно считать, что каждая подобласть находится в контакте с большим резервуаром. Через ее границы могут проходить как частицы (галактики), так и энергия. Мы имеем большой канонический ансамбль, который характеризуется данным химическим потенциалом μ и температурой. Он описывает системы с переменными N и U (см. разд. 29.3).

Из статистической термодинамики известно, что вероятность найти N_j частиц в энергетическом состоянии $U_j(N, V)$ есть

$$P_{N_j}(V, T, \mu) = \frac{e^{-U_j + N_j \mu T}}{Z_G(T, V, \mu)}, \quad (34.10)$$

где

$$Z_G(T, V, \mu) = \sum_{j, N} e^{-U_j + N_j \mu T} \quad (34.11)$$

— большая статистическая сумма (снова при $k = 1$). Это не что иное, как обобщенные выражения (29.45) для большого канонического ансамбля. Здесь ясно видно, почему необходимо исключить состояния, содержащие тесные пары, — они давали бы бесконечно большой положительный вклад в Z_G .

Исключение таких пар при подсчете состояний допустимо, потому что на самом деле их образуется очень мало. Их формирование в конечном нерасширяющемся сферическом скоплении происходит за время, примерно в N раз превышающее время парной релаксации τ_R и в N^2 раз — динамическое время пересечения τ_c (см. гл. 48). Это существенно, так как τ_c характеризует «одночастичное» взаимодействие, τ_R — «двухчастичное», а пары с точечной массой образуются вследствие трехчастичного взаимодействия, при котором третье тело уносит избыток энергии и импульса. Для расширяющейся системы скорость образования таких пар еще ниже. Когда галактики расходятся, их взаимодействие становится слабее. Эти выводы подтверждаются при моделировании задачи N тел.

Большому каноническому ансамблю соответствует потенциал Ψ , производные которого описывают термодинамические свойства ансамбля [см. уравнение (29.46)]:

$$\Psi\left(\frac{1}{T}, V, \frac{\mu}{T}\right) = \ln Z_G \quad (34.12)$$

и, например,

$$S = T \left(\frac{\partial \Psi}{\partial T} \right)_{V, \mu} + \Psi, \quad (34.13)$$

$$N = T \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \mu} \right)_{V, T}. \quad (34.14)$$

Чтобы найти явный вид Ψ , заметим, что по определению энтропии

$$S = - \sum_{j, N} P_{j, N} \ln P_{j, N}. \quad (34.15)$$

Подстановка выражения (34.10) в (34.15) сразу дает

$$S = \frac{U}{T} - \frac{N}{T} \mu + \Psi. \quad (34.16)$$

Объединяя этот результат с термодинамическим соотношением Эйлера (29.15), видим, что

$$\Psi = \frac{PV}{T} = \bar{N}(1 - b), \quad (34.17)$$

где последнее равенство следует из выражения (34.2), а $\bar{N}$ означает среднее число частиц в объеме V . Все эти результаты не зависят от функциональной формы b .

Вероятность найти заданное число частиц N в объеме V произвольной формы (аналогичные рассуждения применимы также и к его проекции на пло-

скость) следует из суммирования выражения (34.10) по всем энергетическим состояниям:

$$f(N) = \sum_i P_{\lambda_i}. \quad (34.18)$$

Замечая, что e^Ψ дает нормировку суммы по состояниям (34.11), предполагаем, что $f(N)$ можно вычислить, не выполняя прямо суммирования (34.18). Чтобы сделать это, определим производящую функцию (ср. с характеристическими функциями из гл. 3 и разд. 31.2), усреднив величину e^{qN} , где q — произвольная переменная

$$\begin{aligned} \langle e^{qN} \rangle &\equiv \sum_N e^{qN} f(N) \\ &= Z_G^{-1} \sum_{N, J} e^{-U_J - T + (q + \mu T)N} \\ &= \exp \left\{ \Psi \left(\frac{\mu}{T} + q \right) - \Psi \left(\frac{\mu}{T} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (34.19)$$

Здесь мы воспользовались соотношениями (34.11) и (34.12) и теперь можем считать аргументы T^{-1} и V в Ψ известными, поскольку они не входят явно в последующий анализ.

На этой стадии можно упростить алгебраические выкладки, рассматривая $\Psi(x)$ как функцию от e^x , записав

$$z \equiv e^q. \quad (34.20)$$

Тогда соотношение (34.19) принимает вид

$$\sum_N f(N) z^N = \exp \{ \Psi(z e^{\mu/T}) - \Psi(e^{\mu/T}) \} = e^{-\Psi(e^{\mu/T})} e^{\Psi(z e^{\mu/T})}. \quad (34.21)$$

Теперь разложим последнюю экспоненту в ряд Тейлора вблизи $z = 0$ и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях z в обеих частях уравнения, чтобы получить

$$f(N) = e^{-\Psi(e^{\mu/T})} \frac{e^{\mu N/T}}{N!} (e^\Psi)_0^{(N)}, \quad (34.22)$$

где

$$(e^\Psi)_0^{(N)} = \left[\left(\frac{d}{d(z e^{\mu/T})} \right)^N \exp \Psi(z e^{\mu/T}) \right] \Big|_{z e^{\mu/T} = 0}. \quad (34.23)$$

Это и есть основной результат.

Его можно применить непосредственно к распределению пустых полостей. Для $N = 0$ и, следовательно, для $U = 0$ из соотношений (34.11), (34.12) вытекает, что $\Psi(0) = 0$, и поэтому

$$\begin{aligned} f(0) &= e^{-\Psi(e^{\mu/T})} = e^{-\lambda(1-b)} \\ &= e^{-4\pi r^3 n(1-b)/3}, \end{aligned} \quad (34.24)$$

если использовать равенство (34.17). Последнее выражение, в частности, представляет вероятность найти пустой сферический объем радиуса r . Оно сводится к обычному результату (27.7) для распределения Пуассона, когда $b \rightarrow 0$ и тяготение становится несущественным. Заметим, что, хотя операция взятия производной от соотношения (34.24) зависит от величины b , она не зависит от функциональной формы $b(n, T)$. Если $b \rightarrow 1$, галактики сгущаются все сильнее, так что вероятность найти пустую область некоторого размера в воображаемом пределе приближается к единице.

Чтобы найти полный набор распределений $f(N)$, сначала перепишем выражение (34.23) несколько иначе. Переходя от дифференцирования по $ze^{\mu/T}$ к дифференцированию по $e^{\mu/T}$, замечаем, что

$$\frac{d}{de^{\mu/T}} = e^{-\mu/T} \frac{d}{d(\mu/T)} \quad (34.25)$$

Чтобы получить $db/d(\mu/T)$, используем соотношение (34.17):

$$\frac{d\Psi}{d(\mu/T)} = \frac{d[Vn(1-b)]/db}{d(\mu/T)/db} = nV, \quad (34.26)$$

где последнее равенство следует из выражений (34.14) или (34.16) при постоянном V . Подстановка соотношений (34.25) и (34.26) в (34.23) дает

$$(e^{\Psi})_0^{(N)} = \left[\left(ne^{-\mu/T} \frac{d}{d[n(1-b)]} \right)^N e^{Vn(1-b)} \right] \Big|_{n=0}. \quad (34.27)$$

Здесь $n = n(b, T)$ и сложный оператор в скобках действует N раз. Чтобы найти химический потенциал, объединим соотношения (34.1), (34.7), (34.16) и (34.17), что дает

$$\frac{\mu(n, b)}{T} = \ln(nT^{-3/2}) - b - \int n^{-1} b dn. \quad (34.28)$$

В формуле (34.27) особенного внимания заслуживают две детали. Во-первых, свойства распределения в гравитационной взаимодействующей системе определяются тем, что в пределе она бесконечно разрежена, $n \rightarrow 0$. Так бывает и при вириальном описании неидеального газа. Во-вторых, существует форма $b(n)$, которая чрезвычайно упрощает операторы в соотношении (34.27), а именно $n(1-b) \propto b$. Примечательно, что она соответствует форме (34.8), полученной из физических соображений.

Вводя соотношение (34.8) в $n(b)$, можно прямо вычислить $(e^{\Psi})_0^{(N)}$ для нескольких первых значений N , чтобы определить общий вид этого выражения, который затем может быть доказан по индукции (Saslaw and Hamilton, 1984). Затем подстановка выражения (34.17) для Ψ и объединение с (34.22) дают наконец общую формулу для функций распределения:

$$f(N) = e^{-N(1-b) - Nb} \frac{\bar{N}^N (1-b)^N}{N!} [\bar{N}(1-b) + Nb]^{N-1}. \quad (34.29)$$

Этот основной результат зависит только от $N = nI$ и b , причем обе величины могут быть определены независимо от (34.8) для любой совокупности тяготеющих тел. Таким образом, в основной теории нет свободных параметров.

Моменты флуктуаций могут быть вычислены либо прямо из $f(N)$, либо методами, описанными в гл. 29 и 35, например:

$$\langle \Delta N^2 \rangle = \frac{N}{(1-b)^2}, \quad (34.30)$$

$$\langle \Delta N^3 \rangle = \frac{N}{(1-b)^4} (1+2b). \quad (34.31)$$

$$\langle \Delta N^4 \rangle = \frac{N}{(1-b)^6} (1+8b+6b^2) + 3\langle \Delta N^2 \rangle^2. \quad (34.32)$$

В каждом случае видно, что флуктуации становятся очень большими, формально бесконечными, когда $b \rightarrow 1$. Это указывает на формирование связанных, вириализованных субскоплений. Чем больше момент, тем сильнее он расходится, — вывод, отмеченный раньше в разд. 31.2.

Поскольку теория такого типа не следует строго из уравнений движения частиц, ее необходимо проверить. Ясно, что она будет применима к нелинейному асимптотическому состоянию, когда флуктуации, группы и гигантские скопления становятся «вмороженными» в расширение Вселенной. Результаты прямых численных экспериментов с системами N тел можно сравнить с $f(N)$, как обсуждалось в гл. 27 в связи с частным случаем $f(0)$. На рис. 36—38 пока-

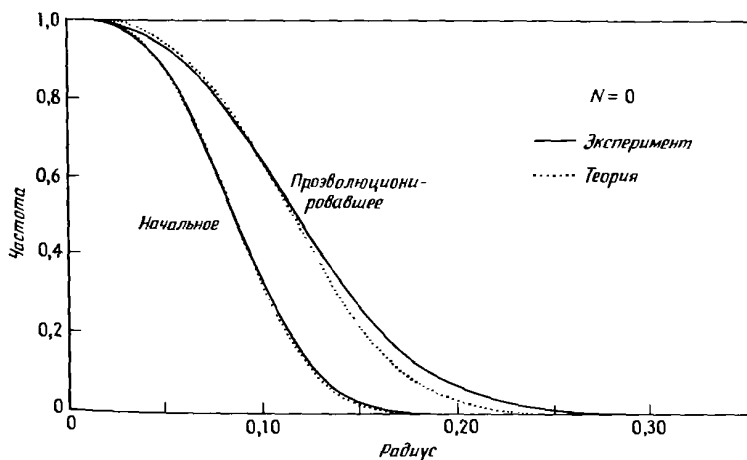


Рис. 36. Сравнение экспериментальной и теоретической функций распределения $f(0)$ для пустых полостей сферической формы радиуса r (Saslaw and Hamilton, 1984).

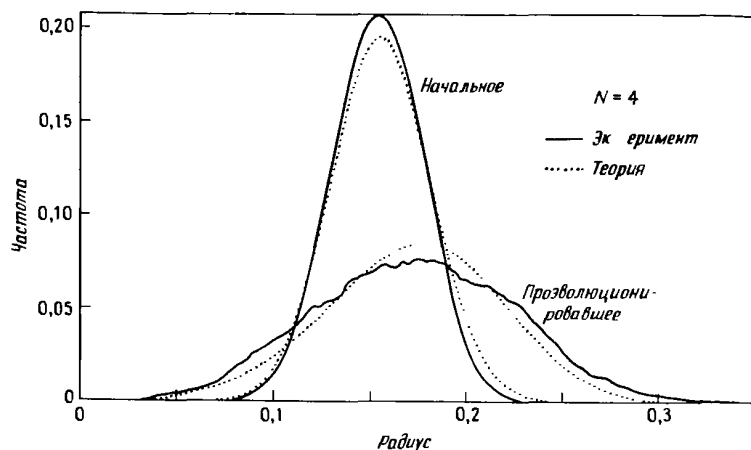


Рис. 37. Сравнение экспериментальной и теоретической функций распределения $f(4)$ для сферических областей радиуса r , содержащих четыре галактики (Saslaw and Hamilton, 1984).

заны примеры таких сравнений для модели расширяющейся Вселенной с $\Omega = 1,0$. Моделирование начинается с пуассоновского распределения галактик одинаковой массы, движение которых определяется одним только хаббловским расширением. Показана ситуация, когда фактор расширения стал порядка 8 и двухточечная корреляционная функция достигла примерно той формы и

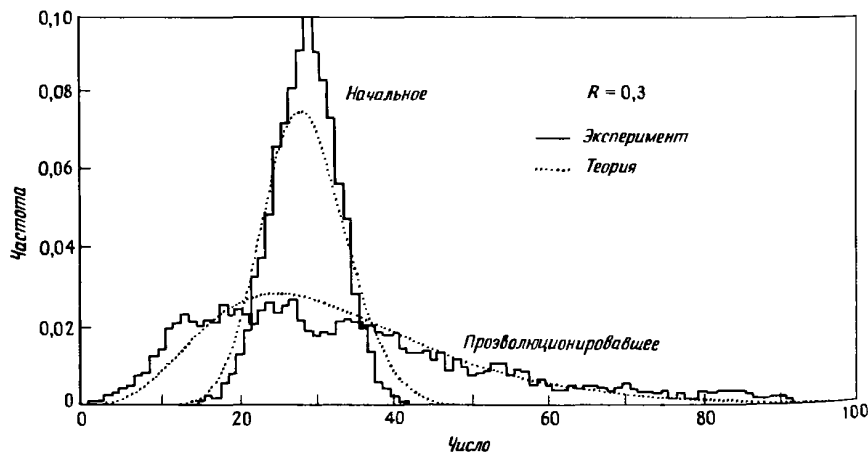


Рис. 38. Сравнение экспериментальной и теоретической функций распределения $f(N)$ для сферических областей с заданным радиусом $R = 0,3$ (Saslaw and Hamilton, 1984).

амплитуды, которые наблюдаются в настоящее время. [В более раннюю эпоху «замороженное равновесие» не было достигнуто, поэтому, как и следовало ожидать, результаты не вполне соответствуют формуле (34.29).]

На рис. 36 показано распределение сферических полостей $f(0)$ для первоначально пуассоновского распределения и их распределение в конце эволюции. Сплошными кривыми представлены данные моделирования, а пунктирными — результаты теории (34.29). На рис. 37 показаны результаты для $f(4)$. Чтобы получить четкую картину распределений более высокого порядка, обратим процедуру. Вместо того чтобы искать вероятность существования сферы любого радиуса, содержащей данное число галактик, будем интересоваться вероятностью найти некоторое число галактик внутри сферы данного радиуса. На рис. 38 показаны результаты для сферы радиуса 0,3. (Сопутствующий радиус в моделируемой Вселенной всегда нормирован к единице.)

О согласии между теорией и экспериментом можно судить двумя способами. Во-первых, различия между пунктирной и сплошной кривыми в конце эволюции можно сравнить с соответствующими различиями в ее начале (когда они обусловлены шумами пуассоновского распределения). Небольшое систематическое превышение при малых N для модели на рис. 38 может быть вызвано большим, чем предсказывает равновесная теория, числом постоянно связанных тесных групп. Во-вторых, теоретические кривые на всех рисунках хорошо согласуются с одним и тем же значением $b = 0,65$. Это значение может меняться в пределах $\pm 0,05$ и все-таки обеспечивать хорошее совпадение. Но $b = -W/2K$ может быть также определено прямо путем сравнения областей распределения. Значение, которое находят из усреднения по различным областям, равно $0,74 \pm 0,05$. (Вспомним, что в разд. 25.2 и гл. 27, где $\beta = 2/3 = 1/(2b)$, такое значение и ожидалось.) Для распределения $f(N)$ (34.29) было впоследствии найдено, что оно хорошо согласуется с наблюдаемым распределением галактик во Вселенной при $b = 0,70 \pm 0,05$ (Crane and Saslaw, 1986). Это же значение b следует и из уравнения космической энергии и соотношения (24.4) (Saslaw, 1986).

Различие в пределах $\leq 20\%$ между теорией и экспериментом, видимо, показывает, что относительно простая равновесная теория учитывает многие, но не все детали поведения $f(N)$. Эволюция и неоднородность, безусловно, важны, но не являются решающими. Это показано на примере открытых моделей с $\Omega = 0,1$, где единственная подгоночная величина b обеспечивает хорошее согласие между экспериментальной и теоретической кривыми для всех $f(N)$, но эта величина b отличается от непосредственно вычисленной примерно на 30%. В открытых моделях скучивание на больших масштабах не столь значительно, как в закрытых (с той же самой двухточечной корреляционной функцией). Более того, как показано в гл. 28, дисперсия скоростей скоплений и галактик поля в открытых моделях менее однородна, чем в закрытых. Поэтому открытые модели более далеки от однородности температуры, характерной для равновесной термодинамики.

Из всех наших рассуждений о бесконечных гравитационных системах ясно, что мы только начинаем приближаться к пониманию поведения на больших

масштабах мириадов частиц, силы взаимодействия которых описываются столь простой зависимостью, как закон обратных квадратов.

35. ЗАДАЧИ И ПРИЛОЖЕНИЯ

35.1. ГРАВИТАЦИОННАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ В МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ СИСТЕМАХ

В гл. 21 и при последующих вычислениях мы имели дело с системами, включающими только одну составляющую. Даже в том случае, когда массы объектов в этой составляющей были различными, качественная сторона взаимодействия от этого не менялась. Ситуация становится иной, когда имеются две или несколько связанных между собой составляющих, которые взаимодействуют неодинаково. При этом часто возникают новые виды неустойчивостей, представляющие значительный интерес.

Относительно простым примером может служить Вселенная, заполненная барионами и жидкостью из маломассивных бесстолкновительных частиц, например нейтрино. Возникновение различных неустойчивостей зависит от того, какая составляющая преобладает в общей плотности массы, и от того, в какой из них возникло первоначальное возмущение. Возмущения массивных бесстолкновительных нейтрино будут затухать на масштабах, меньших, чем джинсовская масса для нейтрино. Покажите, что джинсовская масса при возмущениях плотности нейтрино во Вселенной, где преобладают барионы, есть

$$M_J \approx \frac{4\pi}{3} \langle v^{-1} \rangle^{-3} m_\nu \bar{n}_\nu \left[\frac{3}{8\pi G \rho_b} \right]^{3/2} \quad (1)$$

в любой заданный момент времени. Какова соответствующая джинсовская масса во Вселенной, в составе которой преобладают нейтрино? Каковы эти величины по сравнению с массами звезд, галактик и скоплений галактик при различных значениях m_ν и n_ν ? Что изменится в случае, если нейтрино релятивистские? Покажите, что возмущения нейтрино будут расти главным образом под действием гравитационной неустойчивости, если их гравитационная шкала времени много меньше, чем то время, которое требуется для обладающего средней скоростью нейтрино, чтобы пересечь возмущенную область (*I. Wasserman*, 1981, *Aph. J.*, v. 248, p. 1; *A.D. Melott*, 1983, *MNRAS*, v. 202, p. 595).

35.2. «БЛИНЫ»

Рассмотрение сферически-симметричного возмущения плотности в расширяющейся Вселенной дает представление о развитии процессов, но оно не полностью соответствует действительности. То же самое можно сказать о единственной моде фурье-разложения. Похоже, что галактики образуются благодаря взаимодействию множества возмущений с определенным спектром длин волн, направлений движения и амплитуд. В результате могут получиться

сильно анизотропные структуры, из которых возможно образование цепочек галактик на самых больших, наименее отрелаксировавших масштабах.

Строго проследить за таким нелинейным развитием очень трудно. Однако определенная степень понимания проблемы может быть достигнута с помощью приближения, которое распространяет лагранжевы координатный формализм с линейного на нелинейный режим. В этих координатах положение частицы $\mathbf{r}$ в момент t определяется ее начальным положением $\mathbf{q}$ и временем t , т.е. $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t, \mathbf{q})$. В отсутствие давления («пыль») растущие возмущения, вызванные ньютоновским тяготением, имеют вид

$$\mathbf{r} = a(t)\mathbf{q} + b(t)\mathbf{p}(\mathbf{q}). \quad (1)$$

Рост первого члена обеспечивается хаббловским расширением, а рост второго — возмущением. В линейном режиме $a(t)$ и $b(t)$ определяются методами, аналогичными описанным в гл. 21. Определение $\mathbf{p}(\mathbf{q})$ из начальных условий дает $\mathbf{r}$ для каждой частицы, что эквивалентно полной информации о движении.

Предположим далее, что формула для $\mathbf{r}$ справедлива и в нелинейном режиме. Чтобы исследовать эволюцию группы частиц, начавшуюся вблизи некоторого положения $\mathbf{q}$, покажите, что тензор деформации

$$D_{ik} = \frac{\partial r_i}{\partial q_k} \quad (2)$$

можно привести к виду

$$D = \begin{vmatrix} a(t) - \alpha b(t) & 0 & 0 \\ 0 & a(t) - \beta b(t) & 0 \\ 0 & 0 & a(t) - \gamma b(t) \end{vmatrix}. \quad (3)$$

Какому уравнению подчиняются величины α , β и γ ? На основании закона сохранения массы покажите, что плотность вблизи частицы, имеющей координату $\mathbf{q}$, будет бесконечной, если $a(t) = \alpha b(t)$ для $\alpha(\mathbf{q}) > 0$, где α — наибольшая среди величин α , β , γ . Физически это условие интерпретируется так, что сжатие вдоль быстрее всего сокращающейся оси в итоге приводит к образованию плотной уплощенной системы, или «блина». Детальная нелинейная эволюция такой системы до сих пор прослеживалась только в численных экспериментах для простых случаев (Ya.B. Zeldovich, 1970, *Astrop. and Astrophys.*, v. 5, p. 84; A.G. Doroshkevich *et al.*, 1980, *MNRAS*, v. 192, p. 321; A.G. Doroshkevich *et al.*, 1983, *MNRAS*, v. 202, p. 537).

35.3. ФЛУКТУАЦИИ И ПОЛУИНВАРИАНТЫ

Выводы, сделанные в гл. 29—31, дают точное выражение для флуктуаций в термодинамических системах (Callen, 1966; см. ссылку в гл. 29). Поскольку

вероятности возникновения флуктуаций тесно связаны с их энтропией, при термодинамическом подходе разумно использовать энтропийное представление $S(U, V, N)$. Любой экстенсивной переменной, в общем случае обозначенной через X , соответствует интенсивная переменная F в представлении Массье. Система, каноническая по отношению к X , будет находиться в равновесии с резервуаром F . Например, если X является энергией U , то F соответственно будет температурой. Подобным же образом, если рассматриваются флуктуации числа частиц, необходимо иметь резервуар с постоянной величиной $-\mu/T$.

В каноническом ансамбле вероятность того, что X имеет значение меньше некоторого X_0 , есть

$$P(X < X_0) = e^{-\Psi(F)} \int_{-\infty}^{X_0} e^{-FX} dG(X), \quad (1)$$

где $\Psi(F)$ — преобразование Лежандра для энтропии, а $dG(X)$ — число состояний системы между X и $X + dX$. Множитель e^{-FX} пропорционален вероятности того, что система действительно находится в одном из своих возможных состояний dG . Множитель перед знаком интеграла служит для нормировки на $X_0 = \infty$ и $P(X < \infty) = 1$.

К счастью, нет необходимости знать $dG(X)$, чтобы вычислить флуктуации. Требуется только найти $\Psi(F)$ на основе равновесной термодинамики, как это делалось в гл. 29—31. Интересно вычислить производящую функцию

$$\langle e^{aX} \rangle = e^{-\Psi(F)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{aX} e^{-FX} dG(X). \quad (2)$$

Покажите, что она следует из выражения

$$\begin{aligned} \ln \langle e^{aX} \rangle &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!} (-1)^{n-1} \frac{d^{n-1} \lambda}{dF^{n-1}} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!} M_n(X). \end{aligned} \quad (3)$$

Последнее равенство определяет величины $M_n(X)$, которые известны в теории вероятностей и в статистике как «полуинварианты» или «кумулянты». Покажите, что они удовлетворяют соотношениям

$$M_n(bX) = b^n M_n(X), \quad (4)$$

$$M_n(X + b) = M_n(X) + b \delta_{n,1} \quad (5)$$

используя

$$M_n(X) = \lim_{a \rightarrow 0} D^n \ln \langle e^{aX} \rangle, \quad (6)$$

где $D \equiv d/da$.

Следующий шаг состоит в том, чтобы связать полуинварианты с моментами флуктуаций. Ключ к этому шагу может дать исследование величины, за-

данной последним уравнением до перехода к пределу при $a \rightarrow 0$. Примем, что

$$M_n(a; X) \equiv D^n \ln \langle e^{aX} \rangle = D M_{n-1}(a; X), \quad (7)$$

и поэтому $M_n(X) = M_n(0; X)$. Моменты флуктуаций являются степенями $\delta X = X - \langle X \rangle$, усредненными по ансамблю, т. е. $\langle (\delta X)^n \rangle$. Они являются также членами разложения в ряд Тейлора

$$\langle e^{a\delta X} \rangle = \sum_0^{\infty} \frac{a^n}{n!} \langle (\delta X)^n \rangle. \quad (8)$$

Легко видеть, что $M_1(a; \delta X) = \langle \delta X e^{a\delta X} \rangle / \langle e^{a\delta X} \rangle$ и это предполагает определение более общей величины

$$\langle (\delta X)^n \rangle_a \equiv \langle (\delta X)^n e^{a\delta X} \rangle / \langle e^{a\delta X} \rangle, \quad (9)$$

где $\langle (\delta X)^n \rangle = \langle (\delta X)^n \rangle_0$. Поэтому покажите, что

$$M_n(a; \delta X) = D^{n-1} \langle \delta X \rangle_a \quad (10)$$

и

$$\langle X \rangle = M_1(X) \quad (11)$$

$$\langle (\delta X)^2 \rangle = M_2(X), \quad (12)$$

$$\langle (\delta X)^3 \rangle = M_3(X), \quad (13)$$

$$\langle (\delta X)^4 \rangle = M_4(X) + 3M_2^2(X) \quad (14)$$

и т.д.

В качестве частного примера покажите, что усредненная флуктуация энергии 3-го порядка есть

$$\langle (\delta U)^3 \rangle = k^2 T^3 \left(2C_v + T \frac{dC_v}{dT} \right), \quad (15)$$

где C_v — удельная теплоемкость при постоянном объеме.

36. ЛИТЕРАТУРА

ГЛАВА 20

- Hewett P.C. The estimation of galaxy angular correlation functions, MNRAS, **201**, 867 (1982).
 Holmberg E. On the clustering tendencies among the nebulae, Ap. J., **92**, 200 (1940).
 Kiang T., Saslaw W.C. The distribution in space of clusters of galaxies, MNRAS, **143**, 129 (1969).
 Neyman J., Scott E.L., Shane C.D. On the spatial distribution of galaxies, a specific model, Ap. J., **117**, 92 (1953).
 Peebles P.J.E. The Large Scale Structure of the Universe (Princeton: Princeton UP), 1980.
 [Имеется перевод: Пиблс П. Дж. Структура Вселенной в больших масштабах. — М.: Мир, 1983.]

- Sharp N.A.* Practical estimation of the angular covariance function, *Astr. & Astrophys.*, **74**, 308 (1979).
- Totsuji H., Kihara T.* The correlation function for the distribution of galaxies, *PASJ*, **21**, 221 (1969).
- de Vaucouleurs G.* The case for a hierarchical cosmology, *Science*, **167**, 1203 (1970).
- de Vaucouleurs G.* The large scale distribution of galaxies and clusters of galaxies, *PASP*, **83**, 113 (1971).
- Weinberg S.* *Gravitation and Relativity* (New York: Wiley), 1974. [Имеется перевод: *Вейнберг С.* Гравитация и космология. — М.: Мир, 1975.]

ГЛАВА 21

- Abramowitz M., Stegun I.A.* *Handbook of Mathematical Functions* (Washington: US Govt. Printing Office), 1964. [Имеется перевод: *Справочник по специальным функциям/Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган.* — М.: Наука, 1979.]
- Bonnor W.B.* "Jeans" formula for gravitational instability, *MNRAS*, **117**, 104 (1957).
- Ellis G.F.R., MacCallum M.A.H.* A class of homogeneous cosmological models, *Comm. Math. Phys.*, **12**, 108 (1969).
- Лифшиц Е.М.* О гравитационной устойчивости в расширяющейся Вселенной. — *ЖЭТФ*, 1946, т. 16, с. 587.
- Saslaw W.C.* Conditions for the rapid growth of perturbations in an expanding universe, *Ap. J.*, **173**, 1 (1972).

ГЛАВА 23

- Fall S.M., Saslaw W.C.* The growth of correlations in an expanding universe and the clustering of galaxies, *Ap. J.*, **204**, 631 (1976).

ГЛАВА 25

- Fall S.M., Severne G.* Correlation dynamics in an expanding universe, *MNRAS*, **174**, 241 (1976).
- Irvine W.M.* Local inhomogeneities in a universe satisfying the cosmological principle, *Harvard University thesis*, 1961.
- Layzer D.* A preface to cosmology, I. The energy equation and the virial theorem for cosmic distributions, *Ap. J.*, **138**, 174 (1963).
- Saslaw W.C.* Galaxy clustering and thermodynamics, *Ap. J.*, **235**, 299 (1980).

ГЛАВА 26

- Aarseth S.J.* Direct integration methods of the N -body problem, *Astrophys. Space Sci.*, **14**, 118 (1971).
- Aarseth S.J.* Direct methods for N -body simulations, in *Multiple Time Scales*, J.U.B. Brackbill & B.I. Cohen (eds.) (New York: Academic Press), 1984.
- Aarseth S.J., Zare K.* A regularization of the three-body problem, *Celestial Mech.*, **10**, 185 (1974).
- Aarseth S.J., Lecaer M.* Computer simulations of stellar systems, in *Annual Reviews of Astronomy*, **13**, 1 (1975).
- Ahmad A., Cohen L.* A numerical integration scheme for the N -body gravitational problem, *J. Comp. Phys.*, **12**, 389 (1973).

- Heggie D.C. A global regularization of the gravitational N -body problem, *Celestial Mech.*, **10**, 217 (1974).
- Hockney R.W., Eastwood J.W. *Computer Simulations Using Particles* (New York: McGraw-Hill), 1981.
- Kustaanheimo P., Stiefel E.J. Perturbation theory of Kepler motion based on spinor regularization, *J. Reine Angew. Math.*, **218**, 204 (1965).
- Spitzer L. Dynamical theory of spherical stellar systems with large N , in *IAU Symp. No. 69*, A. Hayli (ed.) (Boston: D. Reidel), 1974.

ГЛАВА 27

- Aarseth S.J., Gott J.R., Turner E.L. N -body simulations of galaxy clustering, I. Initial conditions and galaxy collapse times, *Ap. J.*, **228**, 664 (1979).
- Aarseth S.J., Saslaw W.C. Formation of voids in the galaxy distribution, *Ap. J. Lett.*, **258**, • 1.7 (1982).
- Efstathiou G. The clustering of galaxies and its dependence upon Ω , *MNRAS*, **187**, 117 (1979).
- Efstathiou G., Eastwood J.W. On the clustering of particles in an expanding universe, *MNRAS*, **194**, 503 (1981).
- Gott J.R., Turner E.L., Aarseth S.J. N -body simulations of galaxy clustering, III. The covariance function, *Ap. J.*, **234**, 13 (1979).
- Kiang T., Saslaw W.C. The distribution in space of clusters of galaxies, *MNRAS*, **143**, 129 (1969).
- Miyoshi K., Kihara T. Development of the correlation of galaxies in an expanding universe, *PASJ*, **27**, 333 (1975).
- Turner E.L., Aarseth S.J., Gott J.R., Blanchard N.T., Mathieu R.D. N -body simulations of galaxy clustering, II. Groups of galaxies, *Ap. J.*, **228**, 648 (1979).
- White S.D.M. The hierarchy of correlation functions and its relation to other methods of galaxy clustering, *MNRAS*, **186**, 145 (1979).

ГЛАВА 28

- Saslaw W.C., Aarseth S.J. The velocity evolution of galaxy clustering, *Ap. J.*, **253**, 470 (1982).

ГЛАВА 29

- Buchdal H. *Concepts of Classical Thermodynamics* (Cambridge UP), 1966.
- Callen H.B. *Thermodynamics* (New York: Wiley), 1960.
- Callen H.B. Thermodynamic fluctuations, in *Non-Equilibrium Thermodynamics, Variational Techniques, and Stability*, R.J. Donnelly et al. (eds.) (Chicago: Chicago UP), 1966, p. 227.
- Fowler R.H. *Statistical Mechanics* (Cambridge UP), 1936.
- Landsberg P.T. *Thermodynamics with Quantum Statistical Illustrations* (New York: Wiley Interscience), 1961.
- Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. *Статистическая физика*. — М.: Наука, 1978.
- Tolman R.C. *The Principles of Statistical Mechanics* (Oxford UP), 1936.

ГЛАВА 30

- de Groot S.R., Mazur P. *Non-Equilibrium Thermodynamics* (Amsterdam: North-Holland), 1962.
- Hertel P., Narnhofer H., Thirring W. Thermodynamic functions for fermions with gravostatic and electrostatic interactions, *Commun. Math. Phys.*, **28**, 159 (1972).

- Levy-Leblond J.-M.* Nonsaturation of gravitational forces, *J. Math. Phys.*, 10, 806 (1969).
Salzberg A.M. Exact statistical thermodynamics of gravitational interactions in one and two dimensions, *J. Math. Phys.*, 6, 158 (1965).

ГЛАВА 31

- Saslaw W.C.* Gravithermodynamics, III Phenomenological non-equilibrium theory and finite-time fluctuations, *MNRAS*, 147, 253 (1970).
Simon R. Fluctuations and galaxy formation in the Einstein universe, *Astron. and Astrophys.*, 6, 151 (1970).

ГЛАВА 32

- Saslaw W.C.* Galaxy clustering and thermodynamics, *Ap. J.*, 235, 299 (1980).

ГЛАВА 33

- Saslaw W.C.* The efficiency of galaxy formation and gravitational clustering, *Ap. J.*, 229, 461 (1979).

ГЛАВА 34

- Crane P., Saslaw W.C.* How relaxed is the distribution of galaxies, *Ap. J.*, 301, 1 (1986).
Saslaw W.C., Hamilton A.J.S. Thermodynamics and galaxy clustering: nonlinear theory of high order correlations, *Ap. J.*, 276, 13 (1984).
Saslaw W.C. Galaxy clustering and thermodynamics: quasi-static evolution of $b(t)$, *Ap. J.*, 304, 11 (1986).

КОНЕЧНЫЕ СФЕРИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ: СКОПЛЕНИЯ ГАЛАКТИК, ГАЛАКТИЧЕСКИЕ ЯДРА И ШАРОВЫЕ ЗВЕЗДНЫЕ СКОПЛЕНИЯ

Наш мир — лишь часть в необозримом Целом,
Но связанная с ним одним уделом;
Разрушится он, запаянный в мирах,
И Целое обречено на крах.

Александр Поуп

По мере сжатия групп гравитирующих объектов они все больше отделяются от окружающего их вещества. Рост неоднородностей приводит ко все более сильному нарушению локальных трансляционной и ротационной симметрий. Наконец, системы становятся изолированными, т.е. более не подверженными существенному влиянию распределения окружающих их галактик или звезд.

В части III мы рассмотрим, как системы становятся изолированными и какие свойства в результате этого они приобретают. Такие системы являются сферически-симметричными, поэтому они сохраняют максимум локальной симметрии. Их изучение помогает понять основные физические процессы, происходящие в ограниченных скоплениях. Трудности, возникающие в связи с вращением и общей асимметрией, будут рассмотрены в части IV.

К числу астрономических систем, которые можно приближенно представить сферическим скоплением, относятся объекты различных масштабов, начиная с шаровых звездных скоплений и ядер галактик с характерными размерами порядка нескольких парсек и кончая скоплениями галактик с характерными размерами порядка мегапарсек. После того как будет установлена общетеоретическая основа для описания этих систем, мы сделаем краткий обзор некоторых из их наблюдаемых динамических свойств, а затем перейдем к более строгому рассмотрению их внутренних взаимодействий и эволюции.

37. ОБОСОБЛЕНИЕ

И во Вселенной были вселенные — так уж устроен мир.
Уоллес Стивенс

В гл. 21 мы смогли получить аналитическое описание роста линейных возмущений. В последующих главах посредством комбинации методов, включающих дискретную модель, энергетические принципы, численное моделирование и термодинамику, были исследованы нелинейные свойства сгущивания. В настоящей главе мы распространим общий подход гл. 21 на нелинейный режим. Мы ставим своей задачей определить время, необходимое для начала сжатия возмущения и обособления его от расширяющегося вещества окружающей Вселенной.

Если механически распространить точный метод гл. 21 на нелинейный режим, это приведет к таким сложностям, которые сделают невозможным ясное понимание вопроса. Вместо эйлерова подхода проще использовать подход Лагранжа, как это было сделано при обсуждении «блинов» в гл. 35.

В лагранжевом подходе прослеживается движение отдельного объекта или ряда объектов, входящих в возмущение. (В противоположность этому в эйлеровом подходе описание дается в виде функции пространственных координат.) Простой неоднородностью, рост которой с точностью до порядка величины типичен для многих более сложных неоднородностей, является сферическая область с постоянной плотностью в однородно расширяющейся Вселенной. Чтобы неоднородность сжималась, а не просто расширялась медленнее окружающей Вселенной, ее плотность должна быть больше критической плотности ρ_c , необходимой для того, чтобы Вселенная была закрытой. Эта критическая плотность дается соотношением (21.31) при $\Lambda = k = a = 0$, так что в любой момент времени

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}. \quad (37.1)$$

Поэтому обозначим полную плотность неоднородности в виде суммы

$$\rho_c + \Delta. \quad (37.2)$$

(В принципе величина Δ могла бы быть и отрицательной, чтобы дать представление о расширении полости. Однако численное моделирование, описанное в гл. 27, показывает, что полостям свойственна значительно большая нерегулярность, чем скоплениям. Причина состоит главным образом в том, что полости включают границы нескольких скоплений, и, следовательно, характерная для одного скопления согласованность здесь отсутствует. Таким образом, приближение сферической симметрии пригодно скорее для изучения динамики скопления, чем полости.) В начальный момент времени, обозначенный индексом «i», средняя плотность в области радиуса r_i берется равной

$$\begin{aligned} \rho_i &= \rho_{ci} + \Delta && \text{при } r_i \leq R_i, \\ &= \rho_{ci} + (\rho_{ci} + \Delta - \rho_{ei})R_i^3/r_i^3 \end{aligned} \quad (37.3)$$

где R_i — начальный радиус неоднородности, а ρ_{ei} — плотность вещества во Вселенной за пределами начальной неоднородности (внешняя плотность). Такое распределение означает плавное уменьшение плотности сгустка до фоновое значение. Радиус R неоднородности всегда много меньше радиуса кривизны Вселенной, поэтому рост возмущений можно описать в рамках ньютоновой динамики.

Сделаем предположение о нулевом давлении вещества неоднородности, поскольку такое предположение выражается просто и служит хорошим приближением для сгущивания галактик (если не для их образования). Окружающую Вселенную можно также представить в простом виде, выбрав стандартную изотропную Фридмановскую модель с $\Lambda = 0$, заполненную «пылью» нулевого давления. Для таких моделей начальное значение отношения Хаббла связано с его значением в настоящее время (величины без индекса) выражением *

$$H_i^2 = H^2[2q(1+z_i)^3 + (1-2q)(1+z_i)^2], \quad (37.4)$$

а внешняя плотность в начальный момент связана с критической плотностью соотношением

$$\rho_{ei} = \rho_{ci} \frac{2q(1+z_i)}{(1-2q) + 2q(1+z_i)}. \quad (37.5)$$

(Эти соотношения можно найти во многих работах по космологии; см., в частности, Sandage, 1963.) Параметр $q = 4\pi G\rho/3H^2$, как обычно, определяет отношение действительной плотности к критической плотности, $q = \frac{1}{2}\Omega$. Его можно рассматривать и как меру замедления расширения Вселенной, $q = -\ddot{a}a/\dot{a}^2 = -\ddot{a}/aH^2$, а также ее кривизны $kc^2/a^2 = H^2(2q-1)$, где c — скорость света и a — радиус кривизны Вселенной [см. формулу (21.31)]. Таким образом, существуют различные интерпретации параметра q .

Если развитие неоднородности начинается при достаточно большой величине красного смещения, так что

$$\frac{1-2q}{2q(1+z_i)} \ll 1, \quad (37.6)$$

то выражения (37.4) и (37.5) можно разложить в ряд по этому отношению до членов первого порядка. В результате получим

$$\frac{\rho_{ci} - \rho_{ei}}{\rho_{ci}} = \frac{1-2q}{2q(1+z_i)}, \quad (37.7)$$

$$H_i^2 = 2qH^2(1+z_i)^3. \quad (37.8)$$

Эти приближения достаточно разумны в случае, например, сгущивания галактик.

Сделав эти предварительные замечания, мы можем проследить движение сферических оболочек галактик внутри и вне неоднородности. Пусть начальный радиус произвольной оболочки равен r_i , а закон его изменения может

быть записан в виде

$$r(r_i, t) = r_i a(r_i, t). \quad (37.9)$$

Если бы неоднородности отсутствовали, величина $a(r_i, t)$ была бы всюду одинакова и равна в точности радиусу кривизны Вселенной $a(t)$. Тогда соотношение (37.9) описывало бы расширение оболочки, связанное с расширением Вселенной. Действительно, в пределе при $r_i \gg R$ должно быть $a(r_i, t) \rightarrow a(t)$, так как доля неоднородности в полной массе сферы быстро падает. Поэтому при малых r_i множитель $a(r_i, t)$ определяет отклонение от однородного хаббловского расширения $\mathbf{v} = H\mathbf{r}$.

Сила, действующая на сферическую оболочку с начальным радиусом r_i , сообщает ей ускорение

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{4\pi G \bar{\rho}_i r_i^3}{3r^2}. \quad (37.10)$$

Если с ростом r_i средняя плотность $\bar{\rho}_i$ не увеличивается, то оболочки с разными начальными радиусами r_i по мере сжатия неоднородности пересекаться не будут. В этом случае нетрудно получить первый интеграл уравнения (37.10), подставив в него соотношение (37.9) и умножив обе части на $\dot{a}$. Константу интегрирования получим, потребовав выполнения равенства (37.1) при начальном условии $\bar{\rho}_i = \rho_{ci}$ и $a_i = 1$. Итак,

$$\left(\frac{da}{dt}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3a} \bar{\rho}_i + \frac{8\pi G}{3} (\rho_{ci} - \bar{\rho}_i). \quad (37.11)$$

Заметим, что полученный результат — это частный случай космологического уравнения (21.31), и напомним, что для пыли $\rho \propto a^{-3}$ (не следует путать две разные величины, одинаково обозначенные символом a). Таким образом, следует ожидать, что неоднородность ведет себя подобно Вселенной в целом, но с иным характерным временем, обусловленным другим значением средней плотности. Это подобие лежит в основе близкого сходства ньютоновой и общерелятивистской космологических моделей и рассматривается в некоторых работах по космологии.

Каждая оболочка расширяется до некоторого максимального радиуса, который можно определить, положив в уравнении (37.11) $a = 0$:

$$a_{\max} = \frac{\bar{\rho}_i}{\bar{\rho}_i - \rho_{ci}} \equiv \frac{1}{E}. \quad (37.12)$$

Это выражение определяет относительное превышение плотности неоднородности над критической плотностью. Из уравнений (37.3), (37.9) и (37.12) видно, что максимальный радиус всех оболочек, расположенных внутри неоднородности, пропорционален их начальному радиусу с одной и той же константой пропорциональности $\approx \bar{\rho}_i / \Delta$. Оболочки, расположенные за пределами неоднородности, также достигнут максимального радиуса и возвратятся назад на неоднородность, если их начальный радиус меньше критической величины, определяемой из условия $\bar{\rho}_i = \rho_{ci}$. Таким образом, неоднородность по мере

сжатия будет аккрецировать добавочную массу. Этот результат может быть получен как в представлении Эйлера (*Roxburgh and Saffman*, 1965), так и в применяемом здесь представлении Лагранжа (*Gunn and Gott*, 1972).

Небольшие преобразования уравнения (37.11) позволяют точно решить его. Введем сначала динамический масштаб, благодаря которому можно определить безразмерное время

$$\tau = \left(\frac{8\pi G \bar{\rho}_i}{3} \right)^{1/2} t, \quad (37.13)$$

и подставим его вместе с величиной E из (37.12) в уравнение (37.11), которое принимает вид

$$a \left(\frac{da}{d\tau} \right)^2 = 1 - aE. \quad (37.14)$$

Заметим далее, что при подстановке

$$a = \frac{1}{E} \sin^2 u \quad (37.15)$$

уравнение (37.14) превращается в следующее:

$$\frac{da}{d\tau} = E^{1/2} \operatorname{ctg} u. \quad (37.16)$$

Переменную u можно теперь рассматривать как параметр, связывающий a и τ . Следовательно,

$$\begin{aligned} \tau &= \int \frac{da/du}{da/d\tau} du = 2E^{-3/2} \int \sin^2 u du \\ &= E^{-3/2} (u - \sin u \cos u) - E^{-3/2} [\sin^{-1} E^{1/2} - E^{1/2} (1 - E)^{1/2}]. \end{aligned} \quad (37.17)$$

Константа интегрирования была выбрана так, что когда $\tau_i = 0$, $a_i = 1$, или, другими словами, $u_i = \arcsin E^{1/2}$. Для выполнения этого равенства нужно, чтобы начальная неоднородность либо имела большую, но конечную амплитуду, либо представляла собой малое возмущение, для которого $u_i \approx E^{1/2}$. Таким образом, данное описание по природе своей нелинейно.

Максимальное расширение достигается при $u = \pi/2$ и $a_{\max} = E^{-1}$. Соответствующее значение динамического времени

$$\tau_{\max} \approx \frac{\pi}{2} E^{-3/2} \quad (37.18)$$

при условии малости начальных возмущений, когда постоянным членом порядка единицы в выражении (37.17) можно пренебречь.

После максимального расширения неоднородность начинает сжиматься и обособливаться от окружающего ее вещества. В данном идеализированном случае коллапс заканчивается при $u = \pi$ и $a = 0$. Пренебрегая, как и выше, постоянным членом в выражении (37.17), получаем время завершения кол-

лапса

$$\tau_c \approx \pi E^{-3/2} = 2\tau_{\max}. \quad (37.19)$$

Таким образом, если начальное возмущение мало, фаза расширения равна по длительности фазе коллапса, как это и следует из обратимости движения. Этот результат воспроизведем на рис. 39.

Время коллапса можно выразить и через величины, более привязанные к наблюдениям. Используя равенства (37.3), (37.8), (37.12) и (37.13), обозначая $\delta\rho \equiv \bar{\rho}_i - \rho_{ci}$ и вспоминая, что $\Omega = 2q$, получаем время коллапса

$$t_c = \frac{\pi}{\Omega^{1/2}(1+z_i)^{3/2}} \left(\frac{\bar{\rho}_i}{\delta\rho} \right)^{3/2} H^{-1} \quad (37.20)$$

в единицах современного хаббловского времени H^{-1} . Чтобы сколлапсировать к настоящему времени, относительное возмущение должно образоваться при красном смещении, приблизительно равном $1+z_i = (\pi^2/\Omega)^{1/3}(\rho/\delta\rho)$.

Эволюция реальных неоднородностей протекает не так гладко, даже если вначале они сферически-симметричны. Гравитационная фрагментация нарушает фазы орбит галактик и приводит к росту отклонений от регулярного распределения внутри скопления. Скопление деформируется и под действием внешних приливных сил. Более того, для большинства неоднородностей с самого начала характерно неправильное распределение плотности. Это видно из результатов численного моделирования неоднородности даже в том случае,

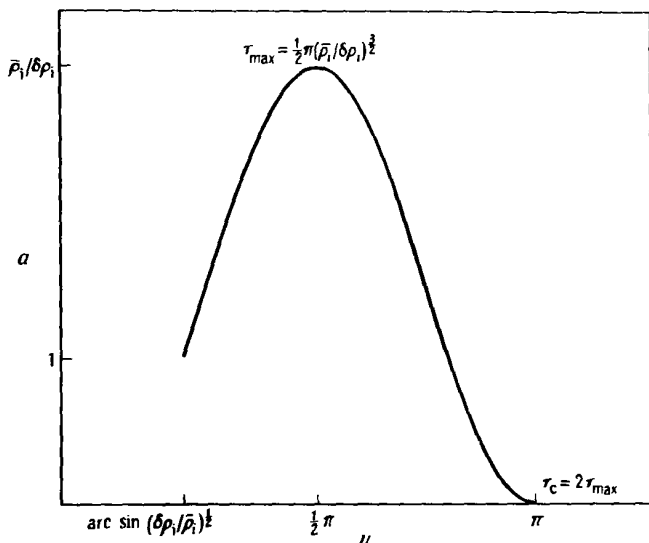


Рис. 39. Рост и коллапс неоднородности плотности в расширяющейся Вселенной.

когда начальное распределение однородно. При нерегулярном распределении плотности над коллапсом могут преобладать другие процессы, к рассмотрению которых мы сейчас и переходим.

38. БУРНАЯ РЕЛАКСАЦИЯ

он... вскочил на коня и бешено помчался во всех направлениях.

Стивен Ликок

38.1. ВВЕДЕНИЕ И ОСНОВНЫЕ ФИЗИЧЕСКИЕ ПОНЯТИЯ

Является ли парадоксальным существование прорелаксировавших галактик и скоплений галактик, имеющих форму, близкую к сферической? Цвикки (Zwicky, 1960) считал, что это действительно парадокс и объявил его главной проблемой внегалактической астрономии. Трудность обусловлена тем обстоятельством, что в таких системах время парной релаксации τ_R , определяемое уравнением (2.11), на несколько порядков величины превосходит хаббловское время жизни Вселенной. Если скопления галактик не были близки к равновесию при своем образовании, парная релаксация не смогла бы привести их к современному состоянию. Однако считать их конечное состояние не отличающимся от начального было бы, конечно, большой натяжкой; так Афина вышла из головы Зевса.

Эта трудность будет разрешена, если мы учтем существование других механизмов релаксации. Действительно, чем больше отличается начальное состояние от равновесного, тем быстрее идет процесс релаксации. Кинг (King, 1962) качественно показал возможность такого процесса, а Хенон (Hénon, 1964) подтвердил ее с помощью численного моделирования для частного случая сферических систем. Приоритет объяснения на количественном уровне принадлежит Линден-Беллу (Lynden-Bell, 1967), позже Шу (Shu, 1978) дал дополнительное объяснение некоторых аспектов проблемы.

В основе идеи бурной релаксации лежит представление о том, что начальное состояние очень далеко от равновесия, и поэтому эволюцию системы определяют крупномасштабные коллективные моды. Поскольку начальное распределение масс и скоростей отличается значительной нерегулярностью, отдельные объекты (звезды и галактики) рассеиваются преимущественно на группах объектов, а не на других отдельных объектах. Сами эти группы постоянно распадаются и образуются вновь. Ни одна отдельная группа не может существовать длительное время при бурной релаксации, но статистическое распределение групп не меняется сравнительно долго. Тот или иной объект может принадлежать сначала одной группе, потом — другой, и в конце концов ни одной из групп, или, что то же самое, принадлежать всей прорелаксировавшей системе.

Такая ситуация сильно отличается от относительно простого случая, который мы обсуждали в ч. I, где действующее на объект полное гравитационное поле могло быть разделено на медленно меняющееся в пространстве среднее

поле и быстро флуктуирующее поле ближайших соседей. Теперь все флуктуации — быстрые, и амплитуды их велики. Каждый объект движется в среднем поле, быстро меняющемся как во времени, так и в пространстве. Отсутствует сохранение энергии вдоль траектории объектов. Постоянной остается лишь полная энергия всей системы, а также другие относящиеся к системе как к целому инварианты. Это дает возможность не придавать значения частным особенностям структурного характера при поисках результата бурной релаксации.

Нетрудно оценить время такой коллективной релаксации. Рассмотрим систему, состоящую из нескольких крупных неправильных скоплений, которые движутся под действием взаимного гравитационного притяжения. Характерное время столкновения этих скоплений составляет приблизительно $(G\rho_0)^{-1/2}$, где ρ_0 — начальная средняя плотность всей системы. После столкновения система осциллирует в течение нескольких динамических периодов $(G\rho_1)^{-1/2}$, причем $\rho_1 \geq \rho_0$, а затем приходит в состояние покоя, поскольку затухание Ландау и фазовое перемешивание разрушают коллективные моды. Длительность всего этого процесса в несколько раз превышает начальное характерное динамическое время $(G\rho_0)^{-1/2}$. Она меньше времени парной релаксации τ_R на множитель порядка $(\lg N)/N$, где N — число объектов в системе. В скоплении галактик с $N \approx 10^3$ или в галактике с $N \approx 10^{10}$ звезд этот множитель очень мал. Таким образом, коллективная релаксация представляется «бурной» только по сравнению с временем τ_R .

Главный результат бурной релаксации можно также объяснить следующим простым образом. Объект достигает конечной скорости, которая не зависит от его массы. Существует равнораспределение энергии из расчета на единицу массы, но не самой энергии. Причина состоит в том, что скорость изменения энергии действующего на звезду среднего поля, — $m d\Psi/dt$, равна скорости изменения полной энергии звезды, $m d(1/2 v^2 - \Psi)/dt$, где $\Psi(\mathbf{r}, t)$ — гравитационный потенциал звездной системы. С другой стороны, ускорение в точности равно градиенту потенциала; поскольку масса рассеивающих групп значительно превосходит массу рассеиваемого объекта, массой отдельных объектов можно пренебречь. Это приводит, в частности, к тому, что в результате релаксации такого типа не происходит сегрегации масс (т.е. оседания более массивных звезд в центре системы).

Каким же будет распределение этих скоростей? Нам известно теперь, что оно не зависит от массы, но можно ли утверждать о нем что-нибудь еще? Предположим, что ограничения (за исключением требований сохранения полной массы, энергии и импульса) отсутствуют, и каждая быстро меняющаяся мода создает силу, совершенно не коррелированную с силами предшествующими, последующими и одновременными с данной. Тогда каждый бурно релаксирующий объект претерпевает ряд случайных изменений скорости. В гл. 3 и 4 было показано, что связанные с такими изменениями блуждающие силы приводят к распределению скоростей Максвелла — Больцмана. Действительно, в идеализированном случае такой результат следует непосредственно из центральной предельной теоремы теории вероятностей. В полезном и прос-

том варианте этой теоремы утверждается, что если $x_1, x_2, \dots, x_n$ — взаимно независимые случайные величины с одинаковым распределением, математическое ожидание которых равно нулю, а дисперсия равна σ^2 , то при $n \rightarrow \infty$ распределение нормированных сумм $S_n = (x_1 + \dots + x_n)/\sqrt{n}$ стремится к нормальному с плотностью вероятности $f(x) = (2\pi)^{-1/2} \exp(-x^2/\sigma^2)$. Таким образом, если x_i — приращение одномерной скорости, то вероятность найти объект с конечной скоростью $x = x_1 + \dots + x_n$ определяется распределением Максвелла — Больцмана. Теорема остается справедливой и при более общих условиях — для многомерных случайных величин с различным распределением. Главным дополнительным ограничителем в этом случае является требование малости дисперсии каждой из случайных величин по сравнению с суммой всех дисперсий.

И бурная релаксация, и более медленная парная релаксация приводят к распределению Максвелла — Больцмана, поскольку и та, и другая основаны на большом числе независимых случайных изменений скорости. В обоих случаях описание является достаточно идеализированным. В ч. I было показано, каким образом с помощью теории возмущений можно описать отклонения от идеализированной парной релаксации. Бурная релаксация по самой своей сути нелинейна и поэтому исключает использование теории возмущений. До сих пор не существует аналитического описания отклонений от идеализированного случая, хотя некоторые численные эксперименты и могут принести помощь в таких исследованиях. После более подробного изучения идеализированного случая мы покажем, каким образом можно его модифицировать для приближения к реальной модели.

38.2 БЕССТОЛКНОВИТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Перейдем теперь к более точному выводу функции распределения, к которой стремится система при бурной релаксации. Релаксация реальных систем, возможно, является недостаточно бурной и долгой для того, чтобы такое распределение было достигнуто в действительности, но тенденция к нему существует. По причинам, о которых сказано выше, в отсутствие каких-либо ограничений, кроме сохранения полных энергии и импульса, следует ожидать, что это будет независимое от массы объектов распределение Максвелла — Больцмана. Тем не менее для полного описания системы могут потребоваться дополнительные ограничения, которые приведут к изменению функции распределения. Наиболее важным из таких ограничений является «столкновительность» системы.

Столкновительность — это степень изменения траекторий вследствие взаимодействия с ближайшими соседями (но не со средним полем). Разумеется, наиболее простой является бесстолкновительная система, в которой существенно лишь среднее поле. Роль столкновений может настолько возрасти, что в (неравновесной) системе появится много объектов, движущихся в соседстве друг с другом с приблизительно одинаковой скоростью. Обычно это соседство недолговечно, поскольку все такие объекты испытывают сильное взаим-

ное отклонение. Иногда два таких объекта могут оказаться связанными в результате взаимодействия с третьим объектом или благодаря флуктуации среднего поля. Возможно образование подсистем и с числом объектов, большим двух; эти подсистемы тоже, как правило, недолговечны. Чем большую роль играют такие подсистемы, тем выше столкновительность системы.

В данном разделе мы ограничимся рассмотрением бесстолкновительных бурно релаксирующих систем, а к более общему случаю вернемся в разд. 38.5. Математическое выражение условия бесстолкновительности заключается в том, что шестимерная функция распределения $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ должна удовлетворять бесстолкновительному уравнению Больцмана (7.2). Здесь нет ничего удивительного. Поскольку динамика бурно релаксирующего объекта зависит от его массы не более, чем от цвета, целесообразно рассматривать функцию распределения по скоростям, а не по импульсам. Выразив среднее гравитационное поле через функцию f , получим бесстолкновительное уравнение Больцмана в следующем виде:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left\{ G \int \frac{f' d^3 v'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 r' \right\} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = 0. \quad (38.1)$$

Из этого уравнения явным образом следует, что функция распределения не зависит от массы.

Поскольку записанная с учетом движения в фазовом пространстве полная производная по времени $df/dt = 0$, начальная средняя плотность в произвольной фазовой области не может изменяться в ходе эволюции этой области. Такое поведение в шестимерном фазовом пространстве совершенно аналогично поведению в $6N$ -мерном фазовом пространстве, соответствующему теореме Лиувилля, которая рассматривалась в гл. 10. В бесстолкновительной системе два объекта никогда не будут иметь одинаковые координаты и скорости, если эти характеристики не совпадали с самого начала. Это обстоятельство накладывает дополнительное ограничение на функцию распределения: элементы облака точек в фазовом пространстве, которые не пересекались в начальный момент, не могут пересечься в впредь.

Если релаксация проходит настолько бурно, что априорная вероятность найти фазовую точку в любой точке фазового пространства одинакова, то для расчета наиболее вероятного распределения точек в фазовом пространстве при заданном наборе ограничений можно применить методы статистической механики. Это равносильно вычислению функции распределения. Обычно статистический анализ применяется непосредственно к физическим частицам, но его можно применить и к представляющим точкам в фазовом пространстве. Оба подхода приводят к верным результатам (при правильной интерпретации), и обычно используется тот из них, который более удобен для решения данной конкретной задачи.

Отправным пунктом статистического анализа является разделение шестимерного фазового пространства на большое число микроячеек очень малого

фиксированного объема $\Delta^3 v \Delta^3 r$. Они представляют собой наименьшие фазовые области, разрешимые методами статистической механики. Справедливость статистического описания бесстолкновительных систем зависит от правильного выбора размера микроячейки. Если микроячейки слишком велики, то они содержат так много фазовых точек, что соответствующие этим точкам звезды с большой вероятностью испытывают сильные парные отклонения. Начинаясь дискретный выброс фазовых точек из микроячеек. Если же последние слишком малы, каждая ячейка будет содержать либо одну фазовую точку, либо ни одной. В этом случае микроячейки могут быть так близки друг к другу, что произойдет сильное взаимодействие звезд из двух соседних занятых микроячеек, а это снова приведет к столкновительному выбросу. Правильный выбор можно осуществить двумя способами. Во-первых, можно использовать промежуточный диапазон размеров, в котором каждая микроячейка содержит не более одной фазовой точки и в то же время достаточно велика для того, чтобы вероятность тесного сближения фазовых точек, принадлежащих соседним микроячейкам, была незначительной. Во-вторых, микроячейки могут быть по-прежнему малы, но заняты лишь немногие из них, так что вероятность существования двух соседних занятых микроячеек, достаточно близких для сильного взаимодействия, оказывается пренебрежимо малой. Обе описанные картины относятся к бесстолкновительным системам, поэтому мы предполагаем применимость хотя бы одной из них. Обе они допустимы в рамках статистического подхода. Итак, если в начальный момент каждая микроячейка содержит одну фазовую точку либо не содержит ни одной, то такая ситуация будет сохраняться и далее. Микроячейки соответствуют тонкоструктурному уровню описания в статистической механике.

Тонкоструктурное описание настолько близко к подходу, основанному на бесстолкновительных, обратимых во времени уравнениях движения, что никакой эволюции в рамках этого описания не происходит. Микроскоп, с помощью которого наблюдают путь отдельной микроячейки в фазовом пространстве так, чтобы постоянно держать ее в поле зрения, не зафиксирует никаких изменений. Однако с уменьшением степени увеличения микроскопа в поле зрения попадает много микроячеек. Их пути в фазовом пространстве различны, и слежение за всеми одновременно невозможно. Одни ячейки попадают в поле зрения микроскопа, другие покидают его. Число видимых одновременно занятых микроячеек все время меняется. В таком масштабе распределение претерпевает видимые изменения. Если уменьшить теперь увеличение микроскопа до такой степени, что различимы будут лишь средние характеристики увеличенного поля зрения, то получим крупноструктурное, огрубленное описание системы. Когда в рамках такого описания система не претерпевает каких-либо изменений, можно сказать, что она достигла равновесия. Ее конфигурация в фазовом пространстве в этом случае наиболее вероятна; это — одно из основных предположений статистической механики.

Для количественного крупноструктурного описания микроячейки должны быть объединены в макроячейки. Хотя каждая макроячейка содержит очень большое число микроячеек, она по-прежнему занимает лишь незначительный

объем фазового пространства, занимаемого всей физической системой. Какая же конфигурация ячеек в фазовом пространстве является наиболее вероятной?

Наиболее вероятным макроскопическим состоянием является то, которому соответствует наибольшее число микросостояний. Таким образом, мы должны найти число микросостояний для любой конфигурации в фазовом пространстве. Предположим, что полное число микроячеек, содержащихся в i -й макроячейке, равно w_i , а каждая микроячейка содержит r фазовых точек, $r = 0$ или 1 . Обозначим число микроячеек, содержащихся в i -й макроячейке и имеющих r фазовых точек, через $n_i^{(r)}$. Рассмотрим одну макроячейку. Поскольку фазовые точки являются различными объектами (подробнее об этом см. разд. 38.5), число способов размещения в микроячейках первой фазовой точки равно w_i , второй $w_i - 1$ и т.д. Всего в макроячейке имеется

$$n_i = \sum_r r n_i^{(r)} \quad (38.2)$$

фазовых точек. Поэтому число способов размещения в микроячейках всех n_i фазовых точек составляет

$$\frac{w_i!}{(w_i - n_i)!}. \quad (38.3)$$

Та или иная конфигурация в фазовом пространстве охватывает все макроячейки. При заданном распределении точек между макроячейками число возможных конфигураций равно числу возможных конфигураций в первой ячейке, умноженному на то же число во второй и т.д., т.е.

$$\prod_i \frac{w_i!}{(w_i - n_i)!}. \quad (38.4)$$

Вся система содержит

$$N = \sum_i n_i \quad (38.5)$$

фазовых точек. Эти N точек могут быть распределены между n_i макроячейками

$$\frac{N!}{\prod_i n_i!} \quad (38.6)$$

различными способами. Таким образом, для конфигурации, которую обозначим как набор $\{n_i\}$, число возможных микросостояний составит

$$W = \frac{N!}{\prod_i (n_i)!} \times \prod_i \frac{w_i!}{(w_i - n_i)!}. \quad (38.7)$$

Эту формулу можно без потери общности слегка упростить, предположив, что число микроячеек в каждой макроячейке одинаково; w_i тогда уступит место w .

Найдем теперь максимум W по n_i с учетом ограничений, налагаемых на n_i , это даст наиболее вероятную крупноструктурную конфигурацию. Поскольку $\ln W$ является монотонной функцией W , вместо максимума W можно искать максимум $\ln W$. Стандартные операции с логарифмом проще, ибо здесь можно воспользоваться формулой Стирлинга $\ln(n!) \approx n(\ln n - 1)$ для $n \gg 1$. В результате получим величину

$$\ln W = N(\ln N - 1) - \sum_i \{n_i(\ln n_i - 1) + (w - n_i)[\ln(w - n_i) - 1] - w(\ln w - 1)\}, \quad (38.8)$$

пропорциональную энтропии. Ограничения степеней свободы изолированной системы вытекают из сохранения полных массы и энергии. Если масса всех объектов одинакова, эти ограничения могут быть записаны в виде

$$\sum_i m n_i = N m, \quad (38.9)$$

$$\sum_i m n_i (\frac{1}{2} v_i^2 + \Phi_i) = E, \quad (38.10)$$

где

$$\Phi_i \equiv \Phi(\mathbf{x}_i, t) \equiv -\frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{G m n_i}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|}, \quad (38.11)$$

$\mathbf{x}_i, \mathbf{v}_i$ — центр i -й макроячейки. Дополнительное ограничение, вытекающее из сохранения полного импульса, привело бы лишь к замене одной инерциальной системы координат на другую и не затронуло бы внутренней динамики системы. Если бы эта последняя вращалась, чего в нашем случае не происходит, то сохранение полного момента импульса представляло бы еще одно ограничение, налагаемое на систему. Существуют и другие постоянные интегралы движения бесстолкновительных систем (см. гл. 39), но вопросов статистической механики они не затрагивают.

Вводя множители Лагранжа α и β для ограничений, налагаемых сохранением массы и энергии, и варьируя энтропию (38.8) относительно n_i около точки максимума, получаем

$$\begin{aligned} \delta \ln W = 0 = \sum_i [-\ln n_i + \ln(w - n_i) - \alpha] \delta n_i \\ - \beta m \sum_i [(\frac{1}{2} v_i^2 + \Phi_i) \delta n_i + n_i \delta \Phi_i] \end{aligned} \quad (38.12)$$

С помощью уравнения (38.11) можно найти вариацию гравитационной энергии и легко показать, что она удовлетворяет равенству

$$\sum_i m n_i \delta \Phi_i = \sum_i m \Phi_i \delta n_i. \quad (38.13)$$

Комбинируя два последних уравнения и замечая, что вариации δn_i независимы, имеем

$$\frac{n_i}{w - n_i} = e^{-\alpha m - \beta m \varepsilon_i}, \quad (38.14)$$

где

$$\varepsilon_i = \frac{1}{2} v_i^2 + 2\Phi_i \quad (38.15)$$

представляет собой энергию на единицу массы в i -й макроячейке. Обозначив химический потенциал на единицу массы через $\mu \equiv -\alpha/\beta$, выразим n_i из (38.14):

$$n_i = \frac{w}{1 + e^{\beta m(\varepsilon_i - \mu)}}. \quad (38.16)$$

Число фазовых точек в i -й макроячейке связано с крупноструктурной (огрубленной) функцией распределения простой операцией усреднения n_i по объему макроячейки

$$\bar{f}_i = \bar{f}(\mathbf{r}_i, \mathbf{v}_i) = \frac{m n_i}{w}. \quad (38.17)$$

Вывод функции распределения, таким образом, завершен.

Это распределение имеет несколько важных особенностей. Когда занята лишь небольшая часть микроячеек, принадлежащих одной макроячейке, т.е. $n_i \ll w$, уравнение (38.14) прямо показывает, что функция распределения имеет тот же характер, что и распределение Максвелла — Больцмана. Последнее является, таким образом, тем невырожденным пределом, к которому релаксируют бесстолкновительные системы. К этому же пределу придет система и в случае $\beta m(\varepsilon_i - \mu) \gg 1$. Сказанное относится к объектам с большой энергией, чьи фазовые точки можно поместить в микроячейки больших размеров, о чем речь шла выше.

В какой-то степени вырождение может проявляться в тех системах, где для многих объектов величина $\beta m(\varepsilon_i - \mu)$ имеет порядок единицы. В этом случае функция $\bar{f}_i$ напоминает вырожденное распределение Ферми — Дирака, но имеет другую нормировку, что объясняется различимостью фазовых точек. Вырождение наступает, очевидно, при достижении предела бесстолкновительной релаксации непосредственно перед тем, как станут существенными парные сближения. Несмотря на то что наступление вырождения до какой-то степени следует и из численных экспериментов (см. ссылки в обзоре *Aarseth and Lecar, 1975*), его природа до сих пор остается не совсем ясной. В экспериментах с одно- и двумерными системами, например, исчезают многие моды, которые должны существовать в более реальном трехмерном случае.

При выводе распределения (38.16) — (38.17) внимательный читатель мог заметить, что масса объекта действительно несущественна. Ограничения (38.9), (38.10) с тем же успехом можно было бы выразить через постоянное число объектов и постоянную энергию на единицу массы соответственно. Тогда в выражении для $f(\mathbf{r}_i, \mathbf{v}_i)$ масса m отсутствовала бы, а множитель Лагранжа β был бы величиной, обратной дисперсии скоростей. Этот результат окон-

чательно оформляется подстановкой $\beta' \equiv m\beta$ в соотношение (38.16). Итак, дисперсия скоростей не зависит от массы. Связь дисперсии с температурой через соотношение $m \langle v^2 \rangle = 3kT$ показывает, что температура как будто сама пропорциональна массе. В конечных системах такое соотношение не может быть строгим с термодинамической точки зрения, поскольку среднее гравитационное поле меняется в пространстве, и температура, т.е. дисперсия скоростей, не является постоянной для всей системы. Тем не менее такое построение имеет большое эвристическое значение, особенно в случае медленных изменений температуры. Например, если при таких изменениях температура пропорциональна массе, то в бурно релаксирующих системах с объектами разной массы существенной сегрегации масс происходить не должно. Так обычно и бывает (разд. 38.4 содержит соответствующий пример). Эта особенность объясняется, конечно, природой релаксации, которая обусловлена средним полем системы. Это видно из обобщения предыдущего вывода на случай систем с объектами разной массы (Shu, 1978).

38.3. КРИТЕРИИ БУРНОЙ РЕЛАКСАЦИИ

Как узнать, достаточно ли удалено начальное состояние системы от равновесия для того, чтобы бурная релаксация могла стать существенной? Ответить на этот вопрос оказывается возможным лишь в принципе, но применение какого-либо практического критерия затруднительно. Численное моделирование позволяет, конечно, наблюдать эволюцию системы, но как следует понимать эту эволюцию?

Отправным пунктом нашего анализа будет уже знакомое уравнение Лиувилля (10.14)

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\} = 0 \quad (38.18)$$

для $6N$ -мерной функции распределения $f = f^{(N)}$. Скобка Пуассона (10.15) на этот раз запишется в виде

$$\{f, H\} = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}_i} \cdot \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}_i} - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}_i} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}_i} \right). \quad (38.19)$$

Если система бесстолкновительная, то каждый объект массы m взаимодействует только со средним гравитационным потенциалом $U(\mathbf{r}, t)$, так что полный гамильтониан запишется в виде

$$H = \sum_{i=1}^N \left[\frac{\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_i}{2m} - mU(\mathbf{r}, t) \right]. \quad (38.20)$$

Чтобы превратить эти уравнения в замкнутую систему, следует, исходя из уравнения Пуассона, вычислить потенциал самосогласованным образом как функционал, зависящий от функции f :

$$U[f] = U(\mathbf{r}, t) = \frac{Gm}{V^{6N-3}} \int \frac{\int f(\mathbf{r}'_1, \dots, \mathbf{p}'_N, t) d^N \mathbf{p}' d^{N-1} \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_x|} d\mathbf{r}_x, \quad (38.21)$$

где $\mathbf{r}_\alpha$ — единственная координата, по которой функция f не интегрируется, а V — нормировочный множитель f в фазовом пространстве.

Непосредственно из уравнений (38.18) — (38.21) видно, что полное уравнение Лиувилля имеет нелинейный интегро-дифференциальный характер. Обычный метод состоит в том, чтобы ввести малые отклонения функции f от равновесного состояния и исследовать получающиеся при этом линейные уравнения. Однако он не подходит в случае бурной релаксации, где преобладают флуктуации; необходим, следовательно, иной подход.

Новый метод должен состоять в том, чтобы линейризовать уравнение Лиувилля в стохастическом смысле. Тонкоструктурная функция распределения быстро флуктуирует во времени и в пространстве. Предположим, что релаксация идет достаточно бурно для того, чтобы функцию f можно было рассматривать как стохастическую функцию с высокой (необязательно бесконечной) степенью случайности. Внутренний интеграл в уравнении (38.21) превращается, таким образом, в стохастический интеграл от функции f . Этот стохастический интеграл будет совпадать с интегралом от произвольной функции от f (т.е. с интегралом Римана — Стильеса) в том случае, если среднеквадратичное значение f непрерывно, что справедливо для любой функции f , представляющей физический интерес.

Для любого типичного объекта системы основной вклад в среднее поле определяется большим числом удаленных объектов. Большинство коллективных мод этих объектов локализовано в областях с плотностью выше средней, объем которых мал по сравнению с объемом всей системы. Поэтому функция распределения этих объектов флуктуирует с характерным временем, которое меньше времени глобальной релаксации $\sim (G\rho)^{-1/2}$. В этом случае типичный релаксирующий объект реагирует на усредненное по времени среднее поле

$$\langle U \rangle \equiv \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} U(\mathbf{r}, t) dt = \frac{Gm}{V^{6N-3}} \int \frac{\langle f \rangle d^N \mathbf{p}' d^{N-1} \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_x|} d\mathbf{r}_x, \quad (38.22)$$

Заметим, что интегралы по фазовому пространству и по времени коммутируют. В общем случае величина $\langle U \rangle$ будет зависеть от $\mathbf{r}$, t и от интервала усреднения τ . Предположим, как это принято в статистической механике, что существует такой интервал усреднения τ , что поведение $\langle U \rangle$ на временных интервалах порядка τ является стационарным и марковским. При таком выборе τ величина $\langle U \rangle$ будет зависеть только от $\mathbf{r}$. В гл. 10 обсуждался пространственный аналог такого огрубленного (крупномасштабного) усреднения.

Если в гамильтониане заменить U на $\langle U \rangle$, то уравнение Лиувилля примет

вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \{f, \langle H \rangle\} = 0, \quad (38.23)$$

став, таким образом, линейным по f . Конечно, действительные значения $\langle U \rangle$ и $\langle H \rangle$ нам неизвестны, поскольку функция f не была вычислена. Однако нам будет достаточно знать, что $\langle H \rangle$ имеет некоторое не зависящее от времени (на интервалах порядка τ) значение и может рассматриваться как неизвестный линейный оператор.

Усредняя по времени уравнение (38.23), получаем

$$\frac{\partial \langle f \rangle}{\partial t} + \{\langle f \rangle, \langle H \rangle\} = 0. \quad (38.24)$$

Здесь $\langle f \rangle$ зависит от времени, поскольку то значение τ , которое обеспечивает стационарное марковское поведение функционала $\langle U[f] \rangle$, не обеспечивает такого же поведения функции $\langle f \rangle$. Ничто в принципе не мешает нам сделать новое усреднение уравнения (38.24) с другим значением τ таким образом, чтобы $\langle f \rangle$ и $\langle \dot{f} \rangle$ обратились в нуль, но это означало бы потерю большей части информации о системе. Отыскание оптимальной величины интервала усреднения может оказаться непростым делом, но в статистической механике требуется лишь принципиальная возможность найти такой интервал. Поскольку уравнение (38.23) линейно, ему удовлетворяет функция распределения, усредненная как по малому, так и по большому интервалу времени. В общем случае, однако, дело обстоит совсем не так.

Альтернативный метод получения стохастически линеаризованного уравнения Лиувилля (38.24) состоит в усреднении по большому интервалу времени уравнения (38.18) непосредственно. В этом случае, для того чтобы получить линейное уравнение вида (38.24), легко найдем

$$\left\langle \frac{\partial U[f]}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} \right\rangle = \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{\partial \langle f \rangle}{\partial \mathbf{p}} + \text{пренебрежимо малые корреляционные члены.} \quad (38.25)$$

С физической точки зрения это соотношение означает, что для данного объекта наибольший вклад в потенциал $U[f]$ определяется удаленными массами, флуктуации среднего поля которых не коррелируют с изменениями функции f вблизи данного объекта. Более того, хотя траектории объектов в системе сильно коррелированы на коротких интервалах времени, они существенно не коррелированы на интервалах, превышающих время крупномасштабного усреднения функции распределения. Коллективные моды, на которых рассеивается объект, быстро изменяются во времени, так что объект не принадлежит никакой определенной моде в течение сколько-нибудь долгого времени. В качестве простого наглядного примера рассмотрим распределение масс

$$\rho(r, t) \propto \frac{S_1(t)}{r + \varepsilon} + r S_2(t), \quad (38.26)$$

где ϵ мало, S_1 и S_2 — некоррелированные случайные функции времени, а максимальное значение S_1 существенно меньше максимального значения S_2 . При малых значениях r локальные флуктуации плотности определяются функцией $S_1(t)$, тогда как средний потенциал и его градиенты определяются удаленными объектами, которым соответствует функция $S_2(t)$.

В близкой к равновесию системе уравнение (38.25) не будет удовлетворяться, поскольку любые остающиеся флуктуации становятся коррелированными в масштабах всей системы. Эти корреляции растут во времени и препятствуют бурной релаксации. Уравнение (38.25) удовлетворяется в разной степени в различных частях системы, и степень эта также меняется по мере эволюции системы.

Возможность стохастической линеаризации уравнения Лиувилля путем замены в гамильтониане потенциала U на $\langle U \rangle$ оказывается достаточным признаком бурной релаксации (Saslaw, 1970). Обобщая методы, описанные в гл. 12 и 14, можно получить решение уравнения (38.24) в случае одночастичной функции распределения. Этим решением оказывается распределение (38.16), усредненное по большому интервалу времени. Если релаксация идет достаточно бурно, то должна быть справедлива эргодическая гипотеза, в силу которой усреднение распределения по времени эквивалентно усреднению его по пространству, однако применимость этой гипотезы пока не доказана. Неизвестно также, является ли уравнение (38.25) не только достаточным, но и необходимым критерием бурной релаксации.

Для проверки этого уравнения могут быть использованы численные эксперименты. Объектом такого эксперимента служит ансамбль систем, каждая из которых пребывает в состоянии видимого беспорядка. Сначала методом проб и ошибок определим, существует ли (в данный момент времени) такой интервал усреднения по времени, чтобы средние $\langle U[\mathbf{f}] \rangle$ и $\langle \mathbf{f} \rangle$ удовлетворяли уравнению (38.25) в точке $(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ фазового пространства. Существование такого интервала означает, что орбита частицы в данной точке бурно релаксирует. Изучение достаточного числа точек дает представление о том, какая часть системы релаксирует в данный момент. Этот метод можно распространить и на последующую эволюцию системы с тем, чтобы оценить продолжительность бурной релаксации. Наконец, характер конечной функции распределения можно сравнить со степенью достигнутой бурной релаксации. Это может быть особенно полезно для понимания систем, релаксация которых проходит вследствие приливного искажения. В случае бесстолкновительных систем N -частичная функция распределения в уравнении (38.25) может быть заменена на одночастичную. При этом необходимость изучения ансамбля систем отпадает.

Аналогичный достаточный признак бурной релаксации должен существовать и в том случае, когда усреднение проводится по большому объему пространства, а не интервалу времени. Кадомицев и Погуц (Kadomtsev and Pogutse, 1970) изучили бесстолкновительную релаксацию в случае малых возмущений функции распределения, применив описанные в гл. 15 и 16 методы к шестимерному бесстолкновительному уравнению Больцмана. Они предположи-

ли, что неволновые флуктуации ($k > \omega_g/v_{\text{тепл}}$) образуют макрочастицы, т.е. пространственные области размера A с сильными корреляциями траекторий. Тогда огрубленная по пространству невозмущенная шестимерная функция распределения будет изменяться согласно соотношению

$$\frac{\partial \langle f_0 \rangle}{\partial t} \propto AF [\langle f_0 \rangle]. \quad (38.27)$$

Здесь $F[\langle f_0 \rangle]$ — интегральный функционал, зависящий от $\langle f_0 \rangle$; он обращается в нуль в том случае, когда справедлив бесстолкновительный принцип запрета и функция $\langle f_0 \rangle$ принимает вид (38.16). Таким образом, при достижении равновесного распределения бурная релаксация прекращается. Невозможна она и при $A = 0$, т.е. в случае отсутствия пространственно-коррелированных областей. В реальных системах величины A и F уменьшаются со временем (что еще не объяснено теоретически), и релаксация в этих системах затухает. Во многих неравновесных астрономических ситуациях уравнения (38.25) и (38.27) не имеют удовлетворительного решения, и бурная релаксация может оказаться гораздо менее эффективной, чем позволяет предположить кажущийся беспорядок.

38.4. ЗАТУХАНИЕ И ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Эффективность бурной релаксации быстро уменьшается со временем. Имеются три важнейших механизма, действие которых стремится разрушить благоприятствующие этой релаксации условия, причем характерное время соответствующих процессов приблизительно равно тому времени, которое необходимо для образования распределения типа Линден-Белла для бесстолкновительных систем. Это, во-первых, затухание Ландау (гл. 16), в ходе которого происходит обмен энергией между отдельными объектами и коллективными модами, разрушающий крупномасштабную структуру. Во-вторых, существует фазовое перемешивание. Этот процесс не зависит непосредственно от гравитационного взаимодействия. Он обусловлен тем простым фактом, что почти все орбиты в системе несоизмеримы, и увеличивающееся разупорядочение их фаз стремится разрушить коллективные моды. В-третьих, наконец, объекты с большой полной энергией (чуть меньшей нуля) выбрасываются из центральных областей на вытянутые орбиты и принимают в релаксации лишь ограниченное участие.

Таким образом, хотя метод статистической механики дает очень полезное описание релаксационного процесса, точное его применение возможно лишь к сильно идеализированным системам. В системах с быстро колеблющимися неоднородными гравитационными полями важную, а иногда и решающую роль будут играть общие принципы бурной релаксации.

Объектом численного моделирования, с которого в конце 1960-х гг. началось изучение бурной релаксации, стали одномерные системы (Aarseth and Lecar, 1975). Более реальные системы не рассматривались по причине малой мощности вычислительных машин.

Эти первые эксперименты дали противоречивые результаты. Несмотря на то что теория обеспечивала хорошее качественное описание вырождения при низких температурах, полученные путем простого статистического анализа значения температуры и химического потенциала плохо согласовывались с полученным в ходе эксперимента распределением. Значительные группы звезд, имеющих большую скорость, выбрасывались из системы до завершения релаксации к предсказанному теорией распределению. Более того, было не вполне ясно, в какой степени эти эксперименты удовлетворяют критериям бурной релаксации.

Позже Аарсет и Саслау (*Aarseth and Saslaw, 1972*) исследовали эволюцию системы из 500 тел в поисках признаков бурной релаксации. В модели принималось распределение объектов по массам вида $N(m) \propto m^{-2}$ при соотношении масс 32:1. Начальное положение объектов внутри сферы имело случайный характер, распределение скоростей было максвелловским, а полная энергия системы составляла половину от равновесного значения. Быстрый коллапс на ранней стадии останавливался через время, в два-три раза превышающее время пересечения. Если преобладает бурная релаксация, то скорость не зависит от масс и именно такая ситуация возникала к указанному моменту. Существовала, впрочем, и противоположная тенденция: более массивные объекты обнаруживали сильное стремление к центру системы, что согласуется с действием парной релаксации. Очевидно, в более реальных системах оба типа релаксации играют определенную роль, и даже бесстолкновительный характер этих систем вызывает сомнение.

За этой и другими ранними попытками моделирования бурной релаксации последовало сравнительно немного экспериментов с системой N тел, целью которых было детальное объяснение этого процесса. Сегодня, с появлением последнего поколения мощных вычислительных машин, очевидно, наступило время для новой серии исследований.

38.5. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ В СТОЛКНОВИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ

Когда система или часть системы не является полностью бесстолкновительной, представляющие точки могут собираться в микроячейках фазового пространства. Последние соответствуют группам объектов, необязательно связанных друг с другом, которые движутся вместе с небольшими относительными скоростями. Такие объединения объектов часто бывают недолговечны, и, поскольку тесные гравитационные сближения могут сильно отклонять орбиты, возможен переброс фазовых точек из одних ячеек в другие. Если движение достаточно хаотично, возможно установление статистического равновесия, при котором приход и уход фазовых точек в ячейках взаимно уравновешены. При этом усредненные по большим интервалам функции распределения становятся стационарными. И хотя такое описание также является идеализацией, результаты, к которым оно приводит, представляют определенный интерес, как и связь этого описания с бесстолкновительным случаем. Информация, которую дает такое описание, в какой-то степени заменяет разработку

значительно более сложной кинетической теории, лежащей в основе такого рода явлений.

Число фазовых точек, приходящихся на одну микроячейку, обычно меняется, и максимальное их число будет зависеть от относительной значимости близких и далеких столкновений. Кроме того, пределы различимости микроячеек в самом общем случае также меняются.

Различимость представляет собой в известном смысле деликатную проблему. Она зависит от того, влияет ли априори состояние одного объекта на состояние другого. А это в свою очередь связано с вопросом о локализуемости объектов. Существуют два общепринятых критерия различимости объектов. Если эти объекты представляют собой какую-то физическую систему или являются ее частью и их поменять местами (произвести перестановку, если число объектов больше двух), то в случае сохранения полного гамильтониана системы объекты следует признать неразличимыми. В соответствии со вторым методом возможность локализовать отдельный объект, выделить его единственным способом и следить за непрерывной траекторией его движения означает различимость этого объекта. В качестве простого примера можно привести частицы в классической физике, которые неразличимы по первому критерию и различимы по второму; квантовые частицы неразличимы по обоим критериям.

У классической гравитационной системы фазовые точки различимы по второму критерию. Легко видеть, что это справедливо в случае бесстолкновительных систем, но, быть может, это не так очевидно для систем столкновительных, где траектории фазовых точек переходят из одной ячейки в другую. Однако даже в столкновительных системах две частицы (например) по-прежнему описываются двумя шестимерными одночастичными функциями состояния, а не одной двухчастичной функцией состояния (как в случае квантовых частиц), имеющей 12 измерений. В первом случае одна частица априори не влияет на состояние другой, во втором случае это влияние осуществляется посредством симметрии и других ограничений, налагаемых на совместную функцию состояния.

Вывод статистики распределения мы проведем с достаточной степенью общности, при которой различимость и запрет будут выступать как дополнительные параметры. Такой подход имеет несколько преимуществ. С его помощью легко обнаружить взаимосвязи между общей статистикой и специальными видами распределения, применяемыми к гравитирующим системам. Далее, он позволяет понять, что флуктуации и корреляции в гравитирующих системах практически не зависят от различимости микроячеек. Кроме того, общность вывода может быть использована для описания таких статистических систем, в которых необходимо применение совместных функций состояния. Наконец, нужно упомянуть и о том, что эта общность достигается ценой совсем небольших дополнительных затрат по сравнению с частным выводом — применением одного остроумного хода.

Для вывода основной общей функции распределения предположим, что в любой микроячейке может оказаться не более p фазовых точек одновременно.

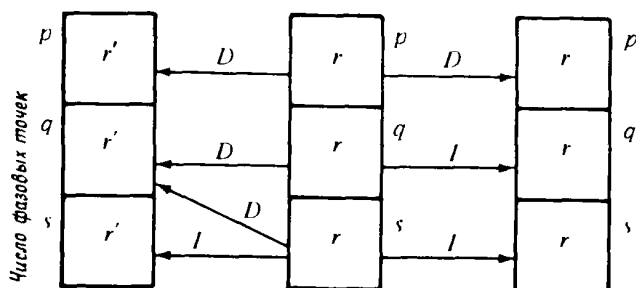


Рис. 40. Схематическая иллюстрация различимости микроячеек в фазовом пространстве. Через D обозначена различимая, через I — неразличимая пара микроячеек.

Принятое значение p определяет столкновительность системы: при $p = 1$ система бесстолкновительна, и справедливо бесстолкновительное уравнение Больцмана. При $p = \infty$ столкновительность достигает максимального значения. Число фазовых точек, действительно находящихся в микроячейке, равно r . Предположим, что степень различимости каждой отдельной микроячейки можно разделить на три категории. Эти категории схематически представлены на рис. 40.

При $0 \leq r \leq s$ микроячейка, содержащая r точек, неотличима от других микроячеек с r точками и от микроячеек с r' точками, где $0 \leq r' \leq s$, $r' \neq r$. Однако она отличима от микроячеек с $r' > s$ точками. Итак, все микроячейки с $0 \leq r \leq s$ точками одинаковы.

Далее, пусть при $s < r \leq q$ микроячейка с r точками будет отличима от микроячейки с r' точками, где $s < r' \leq q$ и $r' \neq r$, но пусть она будет неотличима от других микроячеек с r точками. Эти микроячейки можно назвать полуразличимыми. Именно к такому роду объектов относятся обычные квантовомеханические состояния.

Наконец, при $q < r \leq p$ микроячейки с r точками отличаются как от других микроячеек с числом точек r , так и от микроячеек с $r' \neq r$. Это означает полную различимость, и мы назовем эти ячейки просто различимыми. Далее можно сделать обобщение, введя в рассмотрение неотличимые друг от друга микроячейки с $r \leq s$ и $r' > s$.

Действительные значения p , q и s зависят от разрешающей силы наблюдателя фазового пространства и от рассматриваемой системы. Существует несколько интересных частных случаев:

статистика Линден — Белла	$s = 0$	$q = 0$	$p = 1$,
статистика Ферми — Дирака	$s = 0$	$q = 1$	$p = 1$,
статистика Бозе — Эйнштейна	$s = 0$	$q = \infty$	$p = \infty$,
статистика Максвелла — Больцмана	предел малой плотности.		

Хорошее приближение статистики Бозе—Эйнштейна получается также при значениях p и q , равных полному числу объектов в системе.

Для получения наиболее вероятного распределения найдем, как и прежде, максимальное число микросостояний, соответствующих данному макросостоянию. Решение задачи комбинаторики для этих видов статистики далеко не тривиально из-за смешанного типа ограничений, налагаемых на запрет и различимость. Общепринятый в статистике метод, состоящий в рассмотрении распределения точек по заданному числу ячеек, был бы в нашем случае слишком сложным. Вместо этого мы рассмотрим распределение фиксированного числа микроячеек, содержащих заданное число точек r .

Микроячейки, как и прежде, будут сгруппированы в макроячейки. При этом i -я макроячейка включает w_i микроячеек, а каждая микроячейка содержит r фазовых точек. Число микроячеек, содержащих r фазовых точек и входящих в i -ю макроячейку, обозначим через $n_i^{(r)}$. Число различных перестановок w_i микроячеек составит, следовательно,

$$\left(\sum_{r=0}^s n_i^{(r)} \right)! \prod_{r=s+1}^q (n_i^{(r)})! \quad (38.29)$$

Чтобы найти полное число микросостояний, соответствующих данной макроячейке, умножим выражение (38.29) на число способов распределения $N_{\text{разл}}$ различных микроячеек по макроячейкам

$$\frac{N_{\text{разл}}!}{\prod_{r=q+1}^p n_i^{(r)}!} \quad (38.30)$$

и возьмем сумму произведений всех сомножителей такого вида. Используя для вычислений этой суммы приближение наибольшего члена, получаем число микросостояний

$$\Omega = \prod_i \left(\sum_{r=0}^s n_i^{(r)} \right)! \frac{w_i! N_{\text{разл}}!}{\prod_{r=s+1}^p n_i^{(r)}!} \quad (38.31)$$

Заметим, что q в выражении (38.31) отсутствует. Вид этого выражения напоминает вид соответствующих уравнений в статистике на этой стадии вывода, но смысл входящих в него величин существенно иной: в его основе лежит число микросостояний, которым соответствует заданное число частиц, а не число частиц в заданном микросостоянии.

Ограничения и условия, налагаемые на макроскопическое состояние, имеют вид, несколько отличающийся от обычного. Полное число точек предполагается известным и постоянным:

$$N = \sum_i \sum_{r=0} r n_i^{(r)}, \quad (38.32)$$

так же как и энергия:

$$E = \sum_i \sum_{r=0} \varepsilon_i r n_i^{(r)}, \quad (38.33)$$

где ε_i — энергия i -й макроячейки. Хотя каждая макроячейка содержит много микроячеек, она по-прежнему занимает настолько малый объем фазового пространства, что энергия макроячеек фактически постоянна по всему фазовому пространству. Кроме того, имеется условие, в соответствии с которым число микроячеек в i -й макроячейке составляет

$$w_i = \sum_{r=0}^p n_i^{(r)}, \quad (38.34)$$

а полное число различных микроячеек

$$N_{\text{разл}} = \sum_i \sum_{r=q+1}^p n_i^{(r)}. \quad (38.35)$$

Чтобы получить функцию распределения, следует сначала найти максимум $\ln \Omega$ и, следовательно, максимум Ω путем введения множителей Лагранжа, что позволит учесть ограничения (38.32) — (38.35):

$$\begin{aligned} \ln \Omega = & \sum_i \left\{ \ln(w_i!) + \ln(N_{\text{разл}}!) - \ln \left[\left(\sum_{r=0}^s n_i^{(r)} \right)! \right] - \sum_{r=s+1}^p \ln(n_i^{(r)}) \right. \\ & \left. - (\alpha + \beta \varepsilon_i) \sum_{r=0}^p r n_i^{(r)} + \gamma_i \sum_{r=0}^p n_i^{(r)} + \delta \sum_{r=q+1}^p n_i^{(r)} \right\}. \end{aligned} \quad (38.36)$$

Максимум (38.36) получим, варьируя переменные $n_i^{(r)}$ независимо друг от друга при $r > s$. При $r \leq s$ возможна вариация лишь полного числа неразличимых ячеек, которые обозначим

$$n_i^s = \sum_{r=0}^s n_i^{(r)} \quad (38.37)$$

и которые содержат

$$N_i^s = \sum_{r=0}^s r n_i^{(r)} \quad (38.38)$$

фазовых точек. В том случае, когда полная энергия макроячейки пропорциональна массе, а масса постоянна, эквивалентный способ состоит в отыскании максимума полной массы $n_i^{(r)}$ микроячеек в i -й макроячейке. Из этого непосредственно видно, что функция распределения зависит от энергии на единицу массы, а не от полной энергии. Хотя при нашем подходе удобнее искать максимальное значение полного числа микроячеек в макроячейке, выводы должны

быть те же, что и при вычислении множителей Лагранжа α , β , γ_i и δ из полного самосогласованного решения. Используя формулу Стирлинга и варьируя, получаем

$$n_i^s = e^{\gamma_i - A\zeta_i}, \quad r \leq s, \quad (38.39)$$

$$n_i^{(r)} = e^{\gamma_i - \zeta_i r}, \quad s < r \leq q, \quad (38.40)$$

$$n_i^{(r)} = e^{\delta + \gamma_i - \zeta_i r}, \quad q < r \leq p. \quad (38.41)$$

где

$$\zeta_i = \alpha + \beta \varepsilon_i, \quad (38.42)$$

$$A = \frac{\delta N_i^s}{\partial n_i^s} \quad (38.43)$$

и

$$0 \leq A \leq s. \quad (38.44)$$

При $r > s$ полное число фазовых точек во всех микроячейках, содержащих r фазовых точек и находящихся в i -й макроячейке, составит

$$N_i^{(r)} = - \frac{\partial n_i^{(r)}}{\partial \zeta_i}. \quad (38.45)$$

Число микроячеек в i -й макроячейке

$$w_i = e^{\gamma_i} \left[e^{-A\zeta_i} + \sum_{r=s+1}^q e^{-\zeta_i r} + \sum_{r=q+1}^p e^{\delta - \zeta_i r} \right], \quad (38.46)$$

так что число фазовых точек в различных и полуразличимых микроячейках, содержащихся в i -й макроячейке, составляет

$$N_i - N_i^s = e^{\gamma_i} \left[\sum_{r=s+1}^q r e^{-\zeta_i r} + e^{\delta} \sum_{r=q+1}^p r e^{-\zeta_i r} \right]. \quad (38.47)$$

Из этих результатов с помощью некоторых алгебраических преобразований получим крупноструктурную функцию распределения:

$$\bar{f} - \bar{f}^s = \frac{N - N^s}{w} = \frac{e^{-\zeta}(D_2 - D_1) - D_2}{(e^{-\zeta} - 1)[D_1 + e^{-A\zeta}(e^{-\zeta} - 1)]}. \quad (38.48)$$

Здесь индекс i опущен, а

$$D_1 \equiv [(e^{-(q+1)\zeta} - e^{-(s+1)\zeta}) + e^{\delta}(e^{-(p+1)\zeta} - e^{-(q+1)\zeta})], \quad (38.49)$$

$$D_{n+1} = (-1)^n \frac{\partial^n D_1}{\partial \zeta^n}. \quad (38.50)$$

Крупноструктурная фазовая плотность $\bar{f}$ равна полиому числу фазовых точек в макроячейке, деленному на фазовый объем этой макроячейки. Средний объем микроячейки нормирован на единицу, но возможны и другие условия нор-

мировки. Величины α , β , γ и δ получаются подстановкой соотношений (38.39) — (38.41) в (38.32) — (38.35) или путем замены сумм интегралами и использования непрерывной функции распределения (38.48).

Уравнение (38.49) для D_1 показывает существование любопытной симметрии между статистикой Ферми — Дирака и статистикой бесстолкновительных гравитирующих систем. В случае статистики Ферми — Дирака $s = 0$, $q = p = 1$, поэтому $A = 0$ и в выражении (38.49) остается только левая скобка. В бесстолкновительной системе $s = 0$, $q = 0$, $p = 1$, поэтому $\delta = 0$, $A = 0$ и остается только правая скобка. Аналогичные результаты справедливы и для D_2 и других величин D_s высших порядков. Однако, несмотря на то что в каждом из этих случаев в выражении (38.49) остаются разные члены, величины D_1 и D_2 оказываются одинаковыми. Поэтому обе статистики характеризуются одной и той же функцией распределения, как и было показано ранее.

В двух частных случаях $s = q = \delta = 0$, или $s = 0$ и $q = p$ (первый случай относится к гравитирующим системам) функция распределения принимает намного более простой вид

$$\bar{f} = \frac{1}{e^s - 1} - \frac{p + 1}{e^{(p+1)s} - 1}. \quad (38.51)$$

Нетрудно видеть, что в случае статистик Ферми — Дирака, Бозе — Эйнштейна и Максвелла — Больцмана функция $\bar{f}$ получается как частный случай этого соотношения. Читатель может исследовать и другие интересные случаи уравнения (38.48).

Получив функцию распределения, можно сразу же вычислить энтропию, подставив наиболее вероятные значения $n_i^{(r)}$ в формулу $s = k \ln \Omega$, где Ω определяется выражением (38.31). Из энтропии же выводится все термодинамическое описание системы, включая флуктуации и корреляции идеализированных быстро прорелаксировавших столкновительных систем. Когда столкновения и корреляции становятся значительными, выражение для энтропии приобретает намного более сложный вид, чем простое соотношение $S = -k \int f \ln f d^3 r d^3 v$ для распределения Максвелла — Больцмана. В отличие от бесстолкновительного случая кинетическая теория, лежащая в основе этого более общего релаксационного процесса, еще не разработана. Призвав на помощь статистическую механику, мы попытались обойти затруднения, связанные с отсутствием такой теории. Условия, при которых соответствующие функции распределения могут применяться к реальным системам, еще предстоит исследовать.

39. СИММЕТРИЯ И ТЕОРЕМА ДЖИНСА

Из уравнения Лиувилля в форме (10.16) видно, что полная производная по времени $6N$ -мерной функции распределения, учитывающая движение точек в фазовом пространстве, равна нулю, т.е. $df^{(N)}/dt = 0$. Поэтому и сама функ-

ция $f^{(N)}$ является константой движения. То же можно сказать и о любой функции от $f^{(N)}$, а это предполагает наличие бесконечного числа констант движения. Естественно возникает вопрос: почему все эти константы не налагают дополнительных ограничений на статистику системы?

Прежде всего, поскольку функция $f^{(N)}(\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(N)}, \mathbf{v}^{(1)}, \dots, \mathbf{v}^{(N)}, t)$ представляет собой константу движения, она должна зависеть только от таких сочетаний переменных $\mathbf{x}$ и $\mathbf{v}$, которые сами являются константами движения. Далее, $f^{(N)}$ должна удовлетворять физическому требованию аддитивности ее логарифма: функция распределения двух независимых систем является произведением двух отдельных функций распределения, $f^{(N)}_{12} = f^{(N)}_1 f^{(N)}_2$. Поэтому логарифм функции распределения является аддитивной величиной

$$\ln f^{(N)}_{12} = \ln f^{(N)}_1 + \ln f^{(N)}_2 \quad (39.1)$$

и может зависеть только от аддитивных интегралов движения. Как известно из теоретической механики, этими аддитивными интегралами являются энергия, импульс и момент импульса. Таким образом, логарифм функции распределения независимой системы должен быть линейной комбинацией этих сохраняющихся аддитивных величин:

$$\ln f^{(N)} = A + B\mathbf{E}(\mathbf{x}, \mathbf{v}) + \mathbf{C} \cdot \mathbf{P}(\mathbf{x}, \mathbf{v}) + \mathbf{D} \cdot \mathbf{L}(\mathbf{x}, \mathbf{v}), \quad (39.2)$$

где A — постоянная нормировки, а B , $\mathbf{C}$ и $\mathbf{D}$ — постоянные скалярные и векторные коэффициенты.

Таким образом, видно, что не все константы движения эквивалентны: некоторые из них аддитивны, другие нет. Второе важное различие заключается в том, что одни интегралы являются «изолирующими», а другие — неизолирующими. Изолирующие интегралы однозначны. Неизолирующие интегралы неоднозначны обычно по той причине, что зависят от фазового множителя. Необходимое физическое условие однозначной определенности функции $f^{(N)}$ заключается в ее зависимости только от изолирующих интегралов.

Прямое исследование этих вопросов в случае бесстолкновительных систем приводит нас к теореме Джинса. В гл. 7 было показано, что общим решением бесстолкновительного уравнения Больцмана является произвольная функция независимых интегралов его характеристических кривых (7.15). Интегрирование уравнений (7.15) дает шесть независимых констант движения. Поскольку $df/dt = 0$ вдоль траекторий движения в фазовом пространстве (здесь f — шестимерная функция распределения), величина f является функцией этих шести констант движения. Можно поступить и по-другому, поменяв функцию и аргумент местами. Для этого координаты и скорости каждой звезды надо выразить в зависимости от начальных координат, определить шесть констант как функции этих начальных значений и, наконец, вновь выразить текущие координаты и скорости через шесть констант. Результат, конечно, не зависит от выбора системы координат.

В том и другом случае приходим к теореме Джинса: в бесстолкновительной системе фазовая плотность является интегралом движения, который зави-

сит только от других постоянных интегралов движения. Чтобы сделать следующий шаг, заметим, что, поскольку фазовая плотность должна быть однозначной, она может зависеть только от изолирующих интегралов. Эти последние суть упомянутые выше аддитивные интегралы. Это, однако, не означает, что фазовая плотность должна зависеть от всех возможных аддитивных или изолирующих интегралов.

На число интегралов, от которых зависит функция f , влияют также ограничения симметрии. Если система пребывает в стационарном состоянии много времени спустя после окончания бурной релаксации, то $df/dt = 0$ и содержащий dt член исчезает из уравнений (7.15). Остается только пять независимых интегралов. Рассмотрим три примера стационарных систем в порядке возрастающей пространственной симметрии.

Во-первых, предположим, что стационарное распределение масс произвольно и ограничения, налагаемые на гравитационный потенциал ϕ , отсутствуют. Подставляя градиент потенциала вместо ускорения в характеристические уравнения (7.15), получаем уравнение вида

$$v_x dv_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx \quad (39.3)$$

для каждой из трех координат. Сложение и интегрирование этих трех уравнений дают интеграл энергии

$$v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 - 2\phi = v^2 - 2\phi = 2E = \text{const.} \quad (39.4)$$

При произвольном распределении не существует других изолирующих интегралов, так что $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = f(E)$. Заметим, что минимуму симметрии в конфигурационном пространстве сопутствует максимум симметрии в пространстве скоростей, где функция f характеризуется полной сферической симметрией.

Во-вторых, предположим, что распределение масс имеет вращательную симметрию. Пусть ось z будет осью симметрии, тогда в цилиндрических координатах $\phi = \phi(r, z)$, где $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$. В этом случае получаем дополнительное ограничение

$$x \frac{\partial \phi}{\partial y} = y \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (39.5)$$

и характеристические уравнения дают

$$y dr_x = x dt_y, \quad (39.6)$$

Учитывая, что $dx = v_x dt$ и $dy = v_y dt$, получаем

$$d(yr_x - xr_y) = 0 \quad (39.7)$$

и, проинтегрировав,

$$yv_x - xv_y = L_z = \text{const.} \quad (39.8)$$

Таким образом, в случае вращательной симметрии $f = f(E, L_z)$.

Выражая все переменные в цилиндрических координатах, получаем $f = f(v_r^2 + v_\theta^2 + v_z^2 - 2\phi, rv_\theta)$. В пространстве скоростей симметрия существует только между составляющими v_r и v_z , т.е. произошло понижение степени по сравнению с первым случаем. Распределение в этом пространстве симметрично относительно оси v_θ . В конфигурационном пространстве оно зависит только от переменных r и z и симметрично относительно θ .

В-третьих, рассмотрим случай максимальной пространственной симметрии, а именно сферически-симметричного потенциала $\phi = \phi(r)$, где $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$. В качестве упражнения читатель может показать, что $f = f(E, \mathbf{L})$. Поскольку более высокой пространственной симметрии не существует, пятый интеграл должен быть в общем случае неизоллирующим. (Исключение представляют очень простые вырожденные случаи, такие, как кеплеровское движение и простой трехмерный гармонический осциллятор.) Заметим, что f не зависит от составляющих импульса, так как они соответствуют переносу системы как целого и не затрагивают внутреннее распределение.

Чтобы записать зависимость $f(E, \mathbf{L})$ от скорости в сферических координатах, заметим, что момент импульса может зависеть только от r , поскольку потенциал $\phi(r)$ обладает сферической симметрией. Поэтому необходимо найти такую функцию составляющих момента импульса L_x, L_y и L_z , которая зависела бы только от одной пространственной переменной r . При вращении осей координат, от которых зависит $\mathbf{L}$, единственным однозначным инвариантом будет величина $\mathbf{L}^2 = (\mathbf{r} \times \mathbf{v})^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$. (Ее квадратный корень определен двузачно.) Используя векторное тождество $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 = a^2 b^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2$, получаем

$$L^2 = r^2 v^2 - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})^2 = r^2(v_r^2 + v_\theta^2 + v_z^2) - r^2 v_r^2 = r^2(v_\theta^2 + v_z^2). \quad (39.9)$$

Таким образом, фазовая плотность может быть записана в виде

$$f(E, L^2) = f(v_r^2 + v_\theta^2 + v_z^2 - 2\phi(r), r^2(v_\theta^2 + v_z^2)). \quad (39.10)$$

Она симметрична относительно перестановки v_θ и v_z и имеет вращательную симметрию относительно оси, параллельной радиус-вектору в данной точке фазового пространства.

Теорема Джинса позволяет сделать вывод о том, что в системе с произвольным распределением масс результирующее внутреннее движение невозможно, ибо в такой системе

$$\bar{v}_x = \int \int_{-\infty}^{\infty} \int f(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 - 2\phi, t) v_x dv_x dv_y dv_z = 0, \quad (39.11)$$

поскольку f является четной функцией v_x , и аналогично для v_y и v_z . Таким образом, сферическое распределение скоростей остается сферическим, то же можно сказать и о сферическом распределении плотности в пространстве. Эти распределения могут, однако, расширяться и сжиматься, поскольку $\bar{v}_x^2$ и $\bar{x}^2$ в общем случае отличны от нуля.

Существуют два способа применения бесстолкновительного уравнения Больцмана. Пусть задан потенциал ϕ , который может быть известен, например, из пространственного распределения плотности, и нужно найти функцию f . Такую постановку условий иногда называют задачей Джинса. Если же по заданной функции f требуется отыскать потенциал ϕ , то перед нами обратная задача Джинса. Общих решений здесь не существует, однако были исследованы некоторые частные случаи, особенно в связи со структурой галактик. В следующей главе мы займемся простыми сферическими моделями, основанными на бесстолкновительном приближении и приближении Фоккера — Планка.

40. КВАЗИРАВНОВЕСНЫЕ МОДЕЛИ

40.1. ПОЛИТРОПЫ И ИЗОТЕРМИЧЕСКИЕ СФЕРЫ

После окончания начальной бурной релаксации (а если она завершена, то функция распределения изотропна) гравитирующие системы, которые не обладают результирующим вращением, принимают сферическую форму. Последующая динамическая эволюция идет намного медленнее, и изолированные системы остаются на длительное время в квазиравновесном состоянии. В гл. 43 мы исследуем устойчивость и эволюцию этого состояния, но сначала рассмотрим несколько его полезных стационарных моделей.

Идеализированные стационарные сферические модели характеризуются независимостью от времени и изотропным давлением. Полная производная средней скорости звезд в этих моделях (записанная в сопутствующей системе координат) равна нулю, $dv/dt = 0$. Это означает, что в каждой точке системы распределение скоростей сферически-симметрично. Если бы это было не так и некоторые звезды имели бы избыточную скорость в выделенном направлении, то релаксация привела бы к изменению во времени распределения объектов или изменению структуры системы. Поэтому структура таких систем описывается последними двумя членами уравнения (8.20)

$$\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr} = - \frac{d\phi}{dr}. \quad (40.1)$$

Это равенство представляет собой уравнение гидростатического равновесия. Более строго оно выводится из условия зависимости функции распределения только от момента импульса на единицу массы и полной энергии на единицу массы. Уравнение Пуассона, записанное здесь в интегральной форме, даёт выражение для гравитационной силы

$$\frac{d\phi}{dr} = - \frac{GM(r)}{r^2} = - \frac{4\pi G}{r^2} \int_0^r \rho(r') r'^2 dr'. \quad (40.2)$$

Комбинируя эти два уравнения и производя дифференцирование, избавимся от интеграла:

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{\rho} \frac{dP}{dr} \right) = - 4\pi G \rho r^2. \quad (40.3)$$

Для решения уравнения (40.3) требуется еще одно соотношение между величинами P и ρ . Известно, что функция $P(\rho)$ существует, поскольку в условиях сферической симметрии как P , так и ρ зависят от r однозначным образом. Подобная задача первоначально была решена применительно к внутреннему строению газобраной звезды Эмденом более 80 лет назад. Он предложил использовать степенную зависимость

$$P = K \rho^{1 + 1/n}, \quad (40.4)$$

где K и n — постоянные. Такое соотношение приводит к различным моделям звезд, называемым политропами. Оно представляет собой «эффективное уравнение состояния», а n носит название показателя политропы. Если это соотношение объединить с уравнением идеального газа, то полученное политропное уравнение состояния определит зависимость температуры от радиуса. Случай $n = \infty$, соответствующий постоянной температуре, известен как случай изотермической сферы.

Политропам уделялось большое внимание в рамках изучения внутреннего строения звезд, особенно до 1960-х гг., когда с помощью вычислительных машин оказалось возможным получение полного самосогласованного численного решения. Нельзя, конечно, утверждать, что политропы описывают строение реальных звезд или звездных систем (хотя иногда более сложные модели с переменным значением n служат неплохой аппроксимацией). Однако эти модели имеют ряд преимуществ. Они просты для понимания, и в них легко вводятся возмущения. Более того, они имеют достаточно многообразную структуру для того, чтобы значительно улучшить понимание свойств реальных звезд. Некоторые астрономы считают, что истинного понимания основных свойств реальных звезд невозможно достигнуть, если они не представлены с помощью политроп!

Исключая давление из уравнения (40.3) и вводя безразмерные переменные

$$\rho \equiv \lambda \theta^n, \quad (40.5)$$

$$r \equiv x \xi \equiv \left[\frac{(n+1)}{4\pi G} K \lambda^{(1-n)/n} \right]^{1/2} \xi, \quad (40.6)$$

получаем уравнение Эмдена (называемое также уравнением Лейна — Эмдена):

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) + \theta^n = 0. \quad (40.7)$$

Для его решения необходимо иметь два граничных условия. Коэффициент λ можно определить как плотность в центре системы, тогда

$$\xi = 0, \quad \theta = 1. \quad (40.8)$$

Кроме того, сила в центре должна обращаться в нуль, т. е. $d\phi/dr = 0$ при

$\theta = 1$, и из уравнений (40.1) и (40.4) следует, что при

$$\xi = 0, \quad \frac{d\theta}{d\xi} = 0 \quad (40.9)$$

для любого конечного значения плотности в центре. Это и есть два граничных условия. Один из доводов в пользу выбора граничных условий в центре системы, а не на ее поверхности состоит в том, что требование изотропности скоростей на поверхности выполняется хуже.

Для значений $n=0, 1$ и 5 решения уравнения Эмдена известны в явном виде. При $n=0$ уравнение (40.7) может быть легко проинтегрировано. С учетом граничных условий получим

$$\theta_{n=0} \equiv \theta_0 = 1 - \frac{1}{6}\xi^2. \quad (40.10)$$

Внешняя граница, на которой $\theta_0=0$, соответствует значению $\xi = \sqrt{6}$. Система представляет собой несжимаемую сферу постоянной плотности.

При $n=1$ подстановка $\theta = u/\xi$ преобразует (40.7) в уравнение гармонического осциллятора относительно $u(\xi)$, и мы приходим к решению Риттера

$$\theta_1 = \frac{\sin \xi}{\xi}. \quad (40.11)$$

Теперь внешняя граница соответствует первому нулю θ_1 , т.е. $\xi = \pi$, а $\rho \propto \theta_1$.

При $n=5$ подстановки $\xi = e^{-u(z)}$ и $\theta_5 = z e^{u/2}/\sqrt{2}$, а также некоторые несложные преобразования (упражнение для читателя) приводят к решению Шустера

$$\rho_5 = \theta_5^5 = (1 + \frac{1}{3}\xi^2)^{-5/2}. \quad (40.12)$$

При больших радиусах $\rho_5 \propto r^{-5}$. Поэтому, несмотря на то что радиус бесконечен, масса остается конечной. Это модель Пламмера (см. разд. 18.2).

Чтобы найти массу внутри сферы радиуса ξ , воспользуемся непосредственно уравнением Эмдена (40.7):

$$M(\xi) = 4\pi\chi^3\lambda \int_0^\xi \xi'^2 \theta^n d\xi' = -4\pi\chi^3\lambda \int_0^\xi \frac{d}{d\xi'} \left(\xi'^2 \frac{d\theta}{d\xi'} \right) d\xi' = -4\pi\alpha^3 \lambda \xi^2 \frac{d\theta}{d\xi}. \quad (40.13)$$

Масса всей политропы составляет

$$M_n = -4\pi \left[\frac{(n+1)K}{4\pi G} \right]^{3/2} \lambda^{1/3} \xi^{2n} \left[\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right]_{\theta_n=0} \quad (40.14)$$

Здесь использовано соотношение (40.6) и взято значение ξ , соответствующее наименьшему корню $\theta_n=0$. При $n=5$ конечной границы не существует, но, поскольку

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \xi^2 \frac{d\theta_5}{d\xi} = -\sqrt{3} \quad (40.15)$$

полная масса остается конечной. При $n>5$ полная масса бесконечна.

Вывод потенциальной энергии политропы предлагается в качестве простого упражнения в разд. 54.1. Изотермическая сфера с $n = \infty$ особенно полезна как модель гравитирующих систем. Очень часто она использовалась в качестве первого приближения в описании сферических галактик и скоплений галактик. Уравнением $P = K\rho$ характеризуются как бурно прорелаксировавшие системы, так и системы, получившиеся в результате парной релаксации. В обоих этих случаях при использовании уравнения состояния идеального газа константа K имела бы другое значение (в той самой степени, в которой дисперсия скоростей зависела бы от массы), но конечный результат был бы тем же самым. Тем же способом, что и раньше, получим новое соотношение для перехода к безразмерной величине

$$r \equiv \alpha \tilde{\zeta} = \left[\frac{K}{4\pi G \lambda} \right]^{1/2} \tilde{\zeta}. \quad (40.16)$$

Вместо плотности подставим

$$\rho = \lambda e^{-\psi}. \quad (40.17)$$

Уравнение Эмдена теперь приобретает вид

$$\frac{1}{\tilde{\zeta}^2} \frac{d}{d\tilde{\zeta}} \left(\tilde{\zeta}^2 \frac{d\psi}{d\tilde{\zeta}} \right) = e^{-\psi}. \quad (40.18)$$

а граничные условия аналогичны прежним:

$$\Psi = \frac{d\psi}{d\tilde{\zeta}} = 0 \text{ при } \tilde{\zeta} = 0. \quad (40.19)$$

Все известные решения изотермического уравнения в явном виде являются сингулярными, поэтому, несмотря на то что многие общие свойства этого уравнения были изучены (см., например, *Chandrasekhar, 1939*), его следует интегрировать численно. При $\xi < 1$ хорошее представление о зависимости $\psi(\xi)$ можно получить, разложив ψ в степенной ряд по ξ , подставив это разложение в (40.18) и определив коэффициенты обычным способом, приравнявая члены с одинаковыми степенями ξ . В результате для $\xi < 1$ получим

$$\psi = \frac{1}{6} \tilde{\zeta}^2 - \frac{1}{120} \tilde{\zeta}^4 + \frac{1}{1890} \tilde{\zeta}^6 + \dots \quad (40.20)$$

При $\xi \gg 1$ дело обстоит сложнее. Проверка показывает, что $\psi = 2 \ln \xi - \ln 2$ или

$$\rho = \lambda \frac{2}{\xi^2} \quad (40.21)$$

является решением уравнения (40.18), но не удовлетворяет граничным условиям. Точный анализ (см., например, *Chandrasekhar, 1939*) показывает, что это единственное решение является в действительности асимптотическим решением уравнения изотермической сферы при $\xi \gg 1$.

Распределение массы изотермической сферы найдено тем же способом, что и в предыдущем случае, и имеет вид

$$\begin{aligned} M(\xi) &= 4\pi\alpha^3 \lambda \xi^2 \frac{d\psi}{d\xi} \\ &= 4\pi\rho_c \left(\frac{r^2}{12\pi G \rho_c} \right)^{3/2} \xi^2 \frac{d\psi}{d\xi}. \end{aligned} \quad (40.22)$$

В последнем выражении вместо α мы подставили (40.16), используя при этом соотношение $K = v^2/3$ для изотропной дисперсии скоростей v^2 . Коэффициент λ также заменен на плотность в центре сферы ρ_c . Поскольку $d\psi/d\xi = 2/\xi$ при больших ξ , масса увеличивается пропорционально радиусу и полная масса бесконечна. В действительности размер может быть ограничен приливным влиянием и отклонениями от равновесия.

Ясно, что свойства изотермической сферы полностью определяются плотностью в ее центре и характерной гравитационной длиной α . Это означает, что все изотермические сферы гомологичны. Их характерная длина тесно связана с длиной Джинса, как это и должно следовать из соображений размерности. Но величина α несколько меньше длины Джинса λ_J , поскольку прорежавшие системы должны быть неоднородными. Кроме того, α характеризует все длины волн, необходимые для описания распределения плотности, тогда как λ_J представляет длину только одной волны.

Сравнение плотности скоплений с результатами наблюдений требует введения спроецированной на линию наблюдения плотности $\eta(x)$. С пространственной плотностью ρ она связана простым соотношением

$$\eta(x) = \int_{-\infty}^x \rho(S) dS, \quad (40.23)$$

где x — расстояние от центра скопления, а S — расстояние вдоль линии наблюдения. Помещая начало отсчета S в ближайшую к центру скопления точку, получаем $S^2 + x^2 = r^2$, так что (40.23) принимает вид

$$\eta(x) = 2 \int_x^x \frac{r}{(r^2 - x^2)^{1/2}} \rho(r) dr. \quad (40.24)$$

Подставляя в это соотношение $\rho(r)$ для политропы или изотермической сферы (либо любое другое нужное распределение), получаем поверхностную плотность. Часто оказывается полезным интегрирование по частям, если только величину $d\rho/dr$ легче определить, чем ρ :

$$\eta(x) = -2 \int_x^\infty (r^2 - x^2)^{1/2} \frac{d\rho}{dr} dr. \quad (40.25)$$

В случае богатых симметричных скоплений галактик, таких, например, как

скопление в Волосах Вероники, модель изотермических сфер находится в хорошем согласии с наблюдаемой проекции распределения числа галактик. Хуже согласие с наблюдаемым распределением излучения в сферических галактиках и шаровых звездных скоплениях. Причины этого могут быть различны, например пространственные изменения отношения массы к светимости, несферичность галактики, кажущейся в проекции сферичной, или приливные взаимодействия. Кроме того, в случае галактик более существенная причина может состоять в том, что галактика неполюстью прорелаксировала.

40.2. УТЯЖЕЛЕННЫЕ ПОЛИТРОПЫ

Политропами описываются не только системы с гладким распределением массы, они могут выступать и в качестве первого приближения систем, содержащих сингулярность или же имеющих очень компактное ядро. Это ядро может представлять собой массивный объект, газовое облако или же плотное звездное скопление, которое может считаться до известной степени изолированным от остальной части системы. Например, в центре скопления галактик может находиться очень массивная галактика; ядро галактики может содержать массивную черную дыру. Идеализированно такое компактное ядро можно рассматривать как сингулярность в гравитационном поле. Под ее воздействием меняется распределение окружающих объектов. В результате возникает утяжеленная политропа или утяжеленная изотермическая сфера.

Если массу центрального объекта обозначить M_0 , уравнение гидростатического равновесия примет вид

$$\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr} = -\frac{GM_0}{r^2} - \frac{GM_s(r)}{r^2}, \quad (40.26)$$

где M_s — масса звезд (или других объектов), находящихся внутри сферы радиуса r . Здесь возникает дополнительное затруднение. Центральный объект взаимодействует с соседними звездами. Гравитационное взаимодействие может сделать орбиты в центральной области более близкими к кеплеровским и менее хаотическими, вследствие чего в окрестности центра точность приближения изотропного давления уменьшится. Кроме того, черная дыра или сверхмассивная звезда может поглощать другие звезды, если те подходят слишком близко, а плотное газовое облако может замедлять их движение. Отсюда ясно, что должна образоваться центральная область, в которой обычное скалярное давление политропы неприменимо. Такой эффект можно учесть, если рассматривать эту область как часть центрального объекта, а не распределения звезд в системе. Следовательно, масса звезд выразится как

$$M_s(r) = \int_{r_{\min}}^r 4\pi r'^2 \rho(r') dr', \quad (40.27)$$

где $r_{\min}$ — внутренний радиус области изотропного распределения звезд. В

принципе значение $r_{\min}$ можно было бы найти из самосогласованного решения уравнения Больцмана с анизотропным распределением скоростей. Однако этот путь представляет немалые трудности, и продвижение по нему оказывается медленным. Пока нам придется рассматривать $r_{\min}$ как один из параметров модели и оценить его значение.

Объединяя два последних уравнения с соотношениями (40.4) — (40.6), как это было сделано выше, получаем основное уравнение для утяжеленной политропы

$$\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} = -\beta - \int_{\xi_0}^{\xi} \theta^n \xi^2 d\xi, \quad (40.28)$$

где

$$\beta \equiv \frac{M_0}{4\pi\lambda\alpha^3}, \quad (40.29)$$

$$\xi_0 \equiv r_{\min}\alpha^{-1}. \quad (40.30)$$

При $\beta=0$ и $\xi_0=0$ уравнение (40.28) описывает нормальные политропы; его производная — это уравнение Лейна — Эмдена (40.7). Здесь, однако, удобнее использовать интегро-дифференциальную форму уравнения, которая позволяет обойтись без δ -функций, соответствующих центральной сингулярности.

Определим граничные условия в точке ξ_0 так, чтобы $\rho(\xi_0)=\lambda$; это означает, что

$$\theta(\xi=\xi_0)=1 \quad (40.31)$$

а также, очевидно, что

$$\left. \frac{d\theta}{d\xi} \right|_{\xi_0} = -\frac{\beta}{\xi_0^2}. \quad (40.32)$$

Уже отсюда видно важное отличие от нормальных политроп с $(d\theta/d\xi)_{\xi=0}=0$: наличие массивного объекта в центре приводит к появлению здесь пика в распределении плотности.

В изотермическом случае основное уравнение аналогично соотношению (40.28) с той разницей, что θ здесь заменяется на ψ , θ^n — на $-e^{-\psi}$, β — на $-\beta$, а α принимает вид (40.16). Именно этого следовало ожидать, исходя из аналогии с нормальными политропами. Плотность дается формулой (40.17), а граничные условия запишутся в виде

$$\psi(\xi_0)=0, \quad (40.33)$$

$$\left. \frac{d\psi}{d\xi} \right|_{\xi_0} = \frac{\beta}{\xi_0^2}. \quad (40.34)$$

Найдем сначала распределение плотности. В центральной области, где ξ ненамного больше ξ_0 , первый член в правой части (40.28) превосходит второй

по величине. Простое интегрирование приводит к выражению для плотности в центральной области

$$\rho_{\text{пик}} = \lambda \left[1 - \frac{\beta(\xi - \xi_0)}{\xi \xi_0} \right]^n. \quad (40.35)$$

Таким образом, в этой области имеется крутой пик плотности. За пиком плотность уменьшается гораздо медленнее. Поскольку масса звездной составляющей в формулу (40.35) не входит, эта формула относится именно к области пика плотности. Аналогично в случае изотермической сферы пик плотности описывается формулой

$$\rho_{\text{пик}} = \lambda \exp \left[- \frac{\beta(\xi - \xi_0)}{\xi \xi_0} \right], \quad (40.36)$$

где связанные соотношением (40.29) α и β имеют вид, соответствующий изотермическому случаю. Внешняя граница области пика плотности определяется приблизительно тем радиусом, при котором масса находящихся вне ξ_0 звезд начинает превосходить массу M_0 .

Как и в случае нормальных политропов, аналитическое решение основного уравнения для утяжеленных политропов существует при $n=0, 1$ и 5 . При $n=5$ решения выражаются через довольно сложные эллиптические интегралы. Однако при $n=0$ и $n=1$ решение имеет относительно простой вид. При $n=0$

$$\theta_0 = 1 - \frac{1}{6}(\xi^2 - \xi_0^2) + \left(\frac{\xi_0^2}{3} - \frac{\beta}{\xi_0} \right) \left(\frac{\xi - \xi_0}{\xi} \right), \quad (40.37)$$

Радиус определяется наименьшим корнем уравнения $\theta_0(\xi)=0$, который при условии $\xi(\theta_0=0) \gg \xi_0$ имеет величину

$$\xi(\theta_0=0) = 6^{1/2} \left[1 + \frac{\xi_0^2}{3} - \frac{\beta}{\xi_0} \right]^{1/2} \quad (40.38)$$

отличающуюся от результата для нормальных политропов с $n=0$ множителем в скобках. Здесь система также несжимаема и поэтому служит скорее образцом для сравнения, чем реальной моделью. Аналогично при $n=1$

$$\begin{aligned} \theta_1 = & \left(\xi_0 \sin \xi_0 - \frac{\beta \cos \xi_0}{\xi_0} + \cos \xi_0 \right) \frac{\sin \xi}{\xi} \\ & + \left(\xi_0 \cos \xi_0 + \frac{\beta \sin \xi_0}{\xi_0} - \sin \xi_0 \right) \frac{\cos \xi}{\xi}, \end{aligned} \quad (40.39)$$

$$\operatorname{tg} \xi(\theta_1=0) = \frac{\sin \xi_0 - \xi_0 \cos \xi_0 - (\beta \sin \xi_0)/\xi_0}{\cos \xi_0 + \xi_0 \sin \xi_0 - (\beta \cos \xi_0)/\xi_0} \xrightarrow{\xi_0 \rightarrow 0} \frac{\beta \xi_0}{\beta - \xi_0}. \quad (40.40)$$

Как и следовало ожидать, утяжеление политропы с показателем $n=1$

уменьшает ее радиус. При $\beta > \xi_0$ радиус $\xi_1(\theta=0)$ становится менее $\pi/2$, если же $\beta < \xi_0$, его значение располагается между $\pi/2$ и π .

В отличие от обыкновенных политроп, имеющих лишь одну характерную длину α , утяжеленные политропы имеют три таких длин l . Во-первых, в области радиуса ξ_0 содержится точечный источник вместе с теми звездами, скорость которых отличается высокой анизотропией. Во-вторых, в области радиуса

$$r_{\text{пик}} \approx \left(\frac{3 M_0}{4 \pi \rho_{\text{звезд}}} \right)^{1/3} \quad (40.41)$$

существует пик плотности, в котором масса M_0 центрального источника и его анизотропно движущихся соседей доминирует в создании гравитационного по-

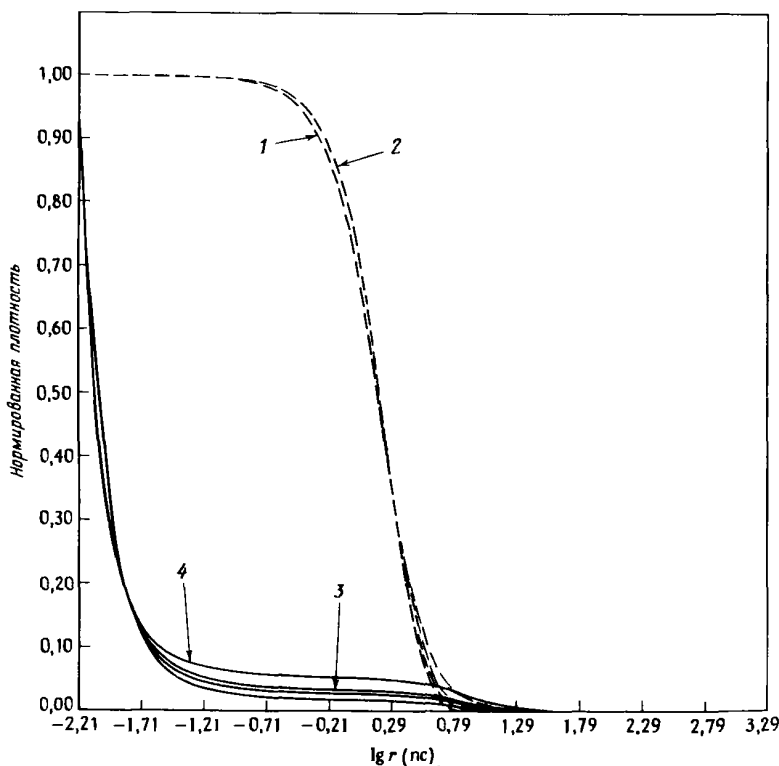


Рис. 41. Сравнение нормированного распределения плотности описанных в тексте утяжеленной и нормальной политроп. Нижняя кривая соответствует политропе с показателем $n = 3$ (1 — изотермическая сфера, 2 — политропа, $n = 3 - 5$; 3 — утяжеленная политропа, $n = 3 - 5$; 4 — утяжеленная изотермическая сфера) (Huntley and Saslaw, 1975).

тенциала. В-третьих, существует глобальная характерная длина α , которая определяет величину протяженного участка постоянной плотности.

На рис. 41 изображено распределение плотности в случае утяжеленных и обыкновенных политропов и изотермических сфер. Утяжеленные политропы представляют ядра галактик и имеют массу центральной области $10^8 M_{\odot}$, плотность центральной области $10^9 M_{\odot} \text{ пс}^{-3}$, радиус центральной области $r_{\text{min}} \approx 6,3 \cdot 10^{-3} \text{ пс}$ и полную массу около $10^{11} M_{\odot}$. Внутри каждой из двух групп — утяжеленной и нормальной — зависимость от показателя политропы не очень заметна. Обе группы систем отнормированы на плотность центральной области с тем, чтобы сделать эффект пика плотности более наглядным. Если бы нормировка кривых была выполнена таким образом, чтобы участки постоянной плотности имели одинаковую высоту, то кривые выглядели бы одинаково за исключением острого высокого пика в центральной области на кривой утяжеленных политропов. Для этих же примеров на рис. 42 изображена

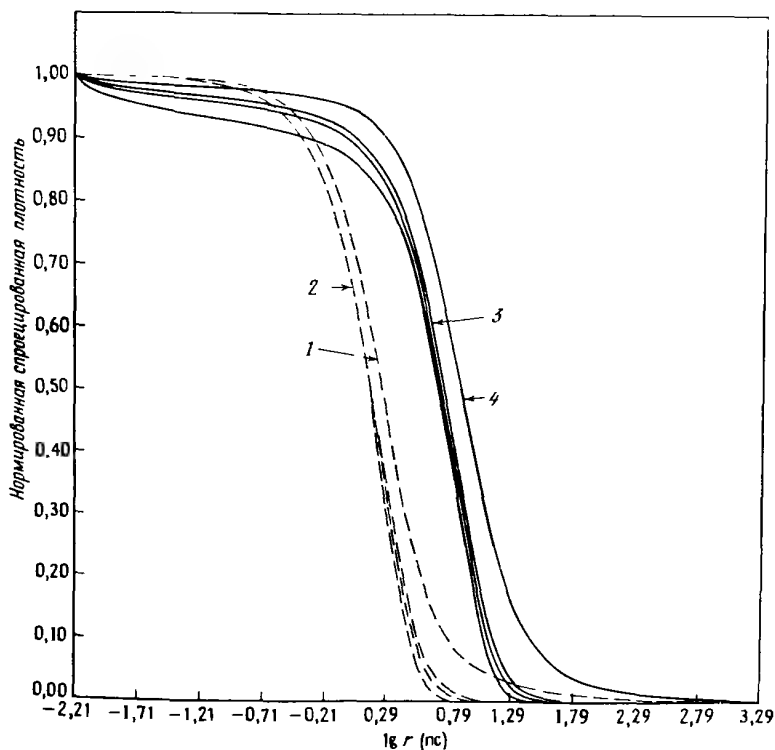


Рис. 42. Сравнение нормированной спроецированной плотности систем, изображенных на рис. 41. (Huntley and Saslaw, 1975.)

спроецированная плотность, вычисленная по формуле (40.24). У утяжеленных систем относительные размеры спроецированного центрального пика в три-четыре раза больше (в зависимости от способа его определения), что отражает большую протяженность участка постоянной плотности в таких системах.

Пользуясь тем же способом, что и в случае нормальных политроп, получаем полную массу звезд в утяжеленной политропе

$$M_s(R) = -4\pi\lambda\alpha^3 \left[\xi^2(\theta=0) \frac{d\theta}{d\xi} \Big|_{\xi(\theta=0)} - \xi_0^2 \frac{d\theta}{d\xi} \Big|_{\xi_0} \right]. \quad (40.42)$$

В табл. 4 (Huntley and Saslaw, 1975) приведены значения соответствующих внешней границе членов для ряда утяжеленных и нормальных политроп, в которых полная масса звезд намного превосходит массу M_0 . Среднее этих значений составляет примерно 2,54 для утяжеленных политроп и 1,90 для нормальных.

Таблица 4. Сравнение граничных значений в случае утяжеленных и нормальных политроп

n	Утяжеленные	Нормальные
	$-\xi^2 d\theta/d\xi \Big _{\xi(\theta=0)}$	$-\xi^2 d\theta/d\xi \Big _{\xi(\theta=0)}$
2,5	1,331	2,187
3,0	2,010	2,018
3,5	2,481	1,891
4,0	2,836	1,797
4,5	3,135	1,738
5,0	3,468	1,732

Ни в случае утяжеленных, ни в случае нормальных политроп не учитывается медленное испарение объектов из конечных систем. Это испарение приводит к анизотропии скоростей, которая изменяет профиль плотности, особенно во внешних частях политропы. Учет этого эффекта требует обращения к более точным моделям.

40.3. МОДЕЛИ ФОККЕРА — ПЛАНКА

Основной недостаток изотермических сфер состоит в том, что они бесконечны. Если бы не этот недостаток, то как простые модели они могли бы очень хорошо представлять реальные системы. Основным их достоинством является максвелловское по всей системе распределение скоростей, поскольку именно такое распределение характеризует прорелаксировавшие системы. Ка-

кие же простейшие изменения следует ввести в изотермическую сферу, чтобы сделать ее конечной?

Можно было бы потребовать обращения плотности в нуль при некотором конечном радиусе. Но такое требование противоречило бы условию изотермичности, поскольку градиент давления звезд на этой заданной границе просто привел бы к ее выталкиванию от центра. Именно по этой причине изотермическая сфера не имеет пределов. Очевидно, необходимо изменить распределение скоростей на границе. Можно было бы, например, рассмотреть такую модель, в которой скорости на границе отличаются сильной анизотропией. В предельном варианте такой модели радиальные составляющие всех скоростей на границе обращаются в нуль или отрицательны (т. е. направлены внутрь сферы). Можно также окружить систему отражающей стенкой — искусственное ограничение, слишком надуманное для реальных систем, но полезное для некоторых интересных мысленных экспериментов (см. гл. 43). Любые не столь экстремальные варианты анизотропии по-прежнему приводили бы к таким решениям уравнения Больцмана, которые слишком сложны на этом этапе рассмотрения.

С другой стороны, можно было бы сохранить изотропное распределение скоростей, введя свойственную конечным системам скорость убегания. Скорость убегания на границе изолированной системы зависит только от ее полной массы и радиуса. Если же у системы есть соседи, то на скорость убегания влияют и приливные силы. Внутри системы локальная скорость убегания, т. е. скорость, необходимая для того, чтобы находящийся в некоторой внутренней точке r объект мог покинуть скопление, будет зависеть от локального значения гравитационного потенциала. Те звезды, скорости которых превышают эту величину, редко остаются в пределах скопления в течение времени, которое превышало бы время пересечения. Поэтому в области значений $v > v_{\text{убег}}$ функция распределения скоростей $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ очень близка к нулю. Этот эффект является наиболее важным; анизотропия, как правило, менее существенна.

При этих условиях мы можем сделать эвристическое предположение о характере распределения скоростей, а затем уже предпринять более строгую его проверку. Усеченная функция распределения Максвелла имеет вид (5.8)

$$f(v) = A(e^{-\beta^2 v^2} - B), \quad (40.43)$$

где A и B — константы. С физической точки зрения $f(v) = 0$ при $e^{-\beta^2 v^2} \leq B$, и для того чтобы это условие выполнялось, необходимо, чтобы $B = e^{-\beta^2 v_{\text{убег}}^2}$. Производя нормировку таким образом, чтобы $f(v) = 1$ при наиболее вероятном значении скорости $v=0$, получим константу A . В результате имеем

$$f(v) = \frac{e^{-\beta^2 v^2} - e^{-\beta^2 v_{\text{убег}}^2}}{1 - e^{-\beta^2 v_{\text{убег}}^2}} \quad (40.44)$$

Чтобы получить этот результат более строго (King, 1965), воспользуемся уравнением Фоккера — Планка (5.1). В сферической гравитирующей системе оно принимает вид (Spitzer and Harm, 1958)

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} \left[x(x) \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{2m}{m_0} x f \right) \right]. \quad (40.45)$$

Здесь

$$x \equiv \frac{r}{2^{1/2} r_0} \quad (40.46)$$

а v_0^2 — одномерная среднеквадратичная скорость звезд массы m_0 — средней массы звезды скопления. Звезды массы m взаимодействуют со звездами фона массы m_0 , которым свойственно максвелловское распределение. Безразмерное время будет иметь вид

$$t = \frac{3}{2^{11/2}} \frac{t}{\tau_R}. \quad (40.47)$$

где τ_R определяется соотношением (2.9), в котором $m = m_0$ и $n = n_0$. Наконец, функция

$$x(x) = \frac{4}{\pi^{1/2} \lambda} \int_0^x e^{-v^2} v^2 dv \quad (40.48)$$

описывает динамическое трение.

Максвелловское распределение является стационарным решением бесстолкновительного уравнения Больцмана. Это наводит на мысль рассматривать не зависящую от времени функцию (40.44) как стационарное решение уравнения Фоккера — Планка. Предположим, что убегание звезд из скопления происходит таким образом, что вид функции распределения скоростей остается неизменным, т. е. темп относительного уменьшения числа звезд с определенной скоростью одинаков для любых значений этой скорости. Следует помнить, что такое предположение — не более чем идеализация, принятая с целью упрощения задачи. Итак, можно написать соотношение

$$f(x, t) = e^{-\lambda t} g(x), \quad (40.49)$$

которое превращает уравнение (40.45) в задачу на собственные значения

$$\frac{d}{dx} \left[x(x) \left(\frac{dg}{dx} + 2 \frac{m}{m_0} x g \right) \right] + \lambda x^2 g = 0. \quad (40.50)$$

Собственное значение

$$\lambda = - \frac{1}{n} \frac{dn}{dt} \quad (40.51)$$

представляет собой относительную скорость потери звезд скоплением и имеет непрерывный спектр. Величина λ обычно мала, поэтому решение можно разложить по ее степеням:

$$g(x) = g_0(x) + \lambda g_1(x) + \lambda^2 g_2(x) + \dots \quad (40.52)$$

Из физических соображений граничными условиями будут $g=1$ и $dg/dx=0$ при $x=0$ и $g=0$ при $x=x_{\text{убег}}$.

Подставляя разложение (40.52) в уравнение (40.50) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях λ , получаем последовательные приближения решения $g(x)$. Чтобы упростить задачу, можно при $m \neq m_0$ заменить функцию $\alpha(x)$ на ее предел при $x \rightarrow \infty$, пропорциональный x^{-1} , поскольку преобладающий вклад в $g(x)$ при $m \approx m_0$ мало зависит от такого приближения, а при значениях m , сильно отличающихся от m_0 , функция $g(x)$ определяется в основном большими значениями x . Такая замена должна быть сделана уже после решения дифференциальных уравнений. Читатель может проделать эти вычисления в качестве упражнения и показать, что в первом приближении

$$g(x) = \frac{e^{mx^2/m_0} - e^{mx_{\text{убег}}^2/m_0}}{1 - e^{mx_{\text{убег}}^2/m_0}} \quad (40.53)$$

$$\lambda = 8\pi^{1/2} \left(\frac{m}{m_0} \right)^{5/2} \frac{e^{mx_{\text{убег}}^2/m_0}}{1 - e^{mx_{\text{убег}}^2/m_0}} \quad (40.54)$$

Как и ожидалось, результат для $g(x)$ имеет тот же вид, что и (40.44). Попутно мы получили выражение для скорости испарения звезд, которое рассмотрим в гл. 46.

С помощью распределения скоростей (40.53) можно рассчитать распределение плотности в скоплении (King, 1966). Его вид не меняется со временем, несмотря на то что звезды постоянно покидают скопление. Однако сначала применим теорему Джинса, чтобы получить один очень интересный результат.

Звезда покинет пределы скопления, если ее скорость превзойдет значение $v_{\text{убег}}$, которое зависит от положения в скоплении. Эта зависимость от радиуса войдет и в функцию распределения $f(r, v)$. Энергия отдельной звезды

$$E = \frac{1}{2}v^2 + \phi(r). \quad (40.55)$$

Теперь оказывается более удобным положить потенциал $\phi(r)$ равным нулю на поверхности скопления, а не на бесконечности. При таком определении звезда с нулевой полной энергией может едва достичь этой поверхности (или приливного радиуса). Таким образом, скорость убегания определяется равенством

$$v_{\text{убег}}^2 = -2\phi(r). \quad (40.56)$$

Теорема Джинса гласит, что зависимость функции распределения от энергии E (или, в более общем случае, от E и L) должна быть одинаковой в любой точке системы. Можно предположить, что в центре системы, где орбиты пролётасировали в наибольшей степени, соотношение (40.53) справедливо для $g(r=0, v)$. Затем, подставляя выражения (40.46) и (40.55) в (40.53), получаем $g(0, x)$ как функцию $E(r=0)$. Наконец, заменив $E(r=0)$ на $E(r)$ из (40.55), полу-

чим функцию распределения при любом радиусе:

$$f(r, v) = e^{[\phi(r) - \phi(0)] v^2} f(0, v), \quad (40.57)$$

где $v_{\text{убет}}$, входящая в функцию $f(0, v)$, связана с r зависимостью (40.56). Таким образом, распределение скоростей (40.53) имеет один и тот же вид в любой точке стационарного скопления.

Интегрируя функцию $f(r, v)$ по скоростям, получаем плотность

$$\rho = \int_0^{v_{\text{убет}}} f(r, v) 4\pi v^2 dv \quad (40.58)$$

как функцию потенциала $\phi(r)$. Чтобы получить $\rho(r)$ самосогласованным образом, воспользуемся уравнением Пуассона

$$\frac{d^2 \phi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\phi}{dr} = 4\pi G \rho(\phi). \quad (40.59)$$

В работе Кинга (*King, 1966*) подробно описано построение численных моделей поверхностного и пространственного распределения плотности. Зная потенциал $\phi(r)$, можно с помощью соотношения (40.57) найти пространственное изменение распределения скоростей внутри скопления.

Найденное таким образом распределение плотности в окрестности ядра системы близко к изотермическому, а в более удаленных областях плотность резко падает и достигает нуля при (приливном) радиусе скопления. Чем больше отношение полного радиуса к радиусу ядра, тем лучше сходство модели с изотермической сферой. Сравнения с наблюдениями показывают, что такие модели хорошо согласуются с наблюдаемой поверхностной плотностью шаровых звездных скоплений, сферических галактик и скопления галактик в созвездии Волосы Вероники (*King, 1966; Bailey and MacDonald, 1981; Kent and Gunn, 1982*). Для лучшего описания поверхностной плотности могут быть предложены и другие, более сложные модели, но представление поля скоростей в этих моделях не всегда удовлетворительно. Поле скоростей часто может служить очень мощным критерием отсева этих моделей.

41. ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ВИРИАЛА

Теория без практики — что дерево без плода.

Саади

Масса — одна из важнейших характеристик звездных и галактических систем, поэтому естественно, что астрономы разработали несколько методов ее определения из наблюдений. К сожалению, результаты, полученные различными методами, часто расходятся. Наиболее широко известными примерами такого расхождения являются оценки массы скоплений галактик. Обсуждению

этого вопроса посвящена обширная, если не сказать «массивная» литература. С одной стороны, массу можно оценить путем независимого определения отношения массы к светимости в ближайших галактиках разного морфологического типа — спиральных, эллиптических и неправильных. Подсчитывая в удаленном скоплении число галактик каждого типа и измеряя их светимости, получаем полную массу галактик в скоплении. С другой стороны, массу скопления можно оценить, измеряя расстояния между галактиками и их скорости и применяя теорему вириала. Эта динамическая масса обычно оказывается больше светящейся — часто примерно в 10, а иногда и в 100 раз.

Это расхождение может быть вызвано несколькими возможными причинами. Так, отношение массы к светимости в ближайших галактиках может существенно отличаться от того, которое присуще более удаленным группам. В этих группах первоначально похожие галактики могли претерпеть существенные изменения вследствие таких процессов, как, например, аккреция, приливное взаимодействие или потеря газа. Отношение массы к светимости ближайших галактик может быть недооценено, особенно если вокруг них имеются протяженные гало, состоящие из темной материи — газа, пыли, звезд малой светимости, черных дыр, массивных нейтрино (или других -ино), мелких камней и другого вещества. Корреляция между отношением M/L и морфологическим типом, найденная по ближайшим галактикам, может оказаться непригодной для галактик в группах, где более подходящими могут быть другие морфологические классификации. В скоплениях и группах галактик может содержаться межгалактическое темное вещество — газ, пыль и т. д. Скопления и группы могут не удовлетворять динамическим условиям, необходимым для применения теоремы вириала.

Детальные оценки этих возможностей менялись со временем, но их описание не входит в рамки данной книги. Здесь же мы только рассмотрим, как нужно видоизменить идеализированную теорему вириала для применения ее на практике и как это повлияет на окончательную оценку массы.

Применение скалярной теоремы вириала (9.30) к астрономическим скоплениям затруднено по трем основным причинам. В качестве основного примера рассмотрим группы галактик, хотя с шаровыми и рассеянными звездными скоплениями и отдельными галактиками также будем иметь дело. Во-первых, за нашу короткую в астрономических масштабах жизнь невозможно пронаблюдать усреднение по времени кинетической и потенциальной энергий системы. Нам известны только их мгновенные значения. Чтобы понять, насколько характерно мгновенное значение, нужно обратиться к статистике флуктуаций около среднего значения. Во-вторых, наблюдаются только проекции пространственного положения на небе и радиальные составляющие скоростей вдоль луча зрения. Поэтому теряется информация об одном пространственном измерении и двух измерениях скоростей. Каким образом эта потеря влияет на нашу оценку вириальной массы? В-третьих, поскольку время измерений на телескопе ограничено, наблюдается только выборка галактик из каждого скопления. В отличие от первых двух ограничений, которые являются следствием случайного неполного отбора, эта селекция вносит необъективность. Ча-

сто измеряют лишь изображения наиболее ярких галактик в скоплении. Они, как правило, являются более массивными, хотя иногда в действительности такие изображения могут возникать в результате случайного наложения различных объектов, которые считают за одну галактику. Критерий принадлежности скоплению вносит другую необъективность. Если лучевая скорость галактики существенно отличается от средней скорости соседей, то эта галактика находится ближе, чем скопление, или дальше? Или она является членом скопления, претерпевшим необычное динамическое взаимодействие? Как разграничить эти случаи? В любом ответе уже заранее содержится предположение о релаксации и устойчивости скоплений, т. е. те результаты, которые хотелось бы получить.

Наиболее эффективным способом исследования этих проблем является прямое численное моделирование скопления как системы N тел. В этом случае число предположений минимально и они точно заданы. Кроме того, при анализе групп и скоплений галактик можно легко регулировать число включаемых в эксперимент объектов. Чтобы отчетливо увидеть, где появляются трудности, перепишем теорему вириала (9.30), используя мгновенные значения параметров, в виде

$$M = \frac{2R\bar{v}^2}{G}, \quad (41.1)$$

полагая

$$R = \frac{\left(\sum_i m_i\right)^2}{\sum_i \sum_j \frac{m_i m_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}}, \quad (41.2)$$

$$\bar{v}^2 = \frac{\sum_i m_i v_i^2}{\sum_i m_i} \quad (41.3)$$

Координаты $\mathbf{r}_i$ и скорости $\mathbf{v}_i$ отдельных объектов берутся относительно центра масс. Суммирование проводится по всем объектам и парам (множитель двойка, появляющийся вследствие подсчета каждой пары дважды, находится в выражении для M , а не для R). В числителе (41.2) для числа возможных пар использовано приближение $N(N-1) \approx N^2$; при малом N из числителя следует вычесть $\sum m_i^2$.

При таком подходе вириальная масса оказывается зависящей от средних взвешенных по массе среднеквадратичной скорости и гармонического радиуса. Взвешивание по массе отчетливо показывает, как несколько больших, близко расположенных галактик могут вносить основной вклад в величину массы M и как их отсутствие в наблюдаемой выборке меняет результат. Может показаться более вероятным, что большие галактики будут заведомо включены в

наблюдаемую выборку, но это приведет к другой трудности: их мгновенное отклонение от усредненных по времени значений имеет также большой вес. Таким образом, успех в определении M вовсе не определяется включением в выборку массивных галактик.

Эффект проекции одинаков для всех галактик. Пусть скорости галактик, направленные вдоль луча зрения, проецируются на ось z и дают v_z^2 , а расстояния, перпендикулярные лучу зрения, дают $R_{\perp}^2$. Вириальная масса, определенная в этих координатах проекции, запишется в виде, аналогичном (41.1):

$$M_v = \gamma R_{\perp}^2 V_z^2 / G. \quad (41.4)$$

Коэффициент перехода α зависит от особенностей строения каждого скопления. Поскольку их строение нам неизвестно, можно рассматривать α только как нормировочную константу. Априори проще всего было бы нормировать на средний результат, получаемый для скоплений сферической формы с изотропным распределением скоростей. В этом случае нет корреляции между массой объектов и их пространственными положениями и скоростями и систему можно просцировать под любым углом. Пусть θ_i — угол между осью z , направленной вдоль луча зрения, и пространственной скоростью v_i , тогда

$$\left(\sum_i m_i \right) V_z^2 = \sum_i m_i v_{iz}^2 = \sum_i m_i v_i^2 \cos^2 \theta_i. \quad (41.5)$$

Усредняя $\cos^2 \theta_i$, не коррелирующий с m_i или v_i , по сфере, получаем

$$\langle \cos^2 \theta_i \rangle = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \cos^2 \theta_i \sin \theta_i d\theta_i d\phi}{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \theta_i d\theta_i d\phi} = \frac{1}{3}. \quad (41.6)$$

Таким образом, пространственное усреднение (41.5) в сочетании с (41.3) дает соотношение

$$\langle V_z^2 \rangle = \frac{1}{3} \langle V^2 \rangle. \quad (41.7)$$

Это соотношение описывает просто равномерное распределение кинетической энергии между ее тремя пространственными компонентами в изотропной системе.

Во множителе, соответствующем потенциальной энергии, запишем пространственное расстояние в виде $|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j| = r_{ij}$. Проекция расстояния равна $r'_{ij} = r_{ij} \sin \theta_{ij}$, где θ_{ij} — угол между вектором $\mathbf{r}_{ij}$ и лучом зрения наблюдателя на i -ю галактику. Усредняя по сферическому распределению θ_{ij} , не коррелирующему, как и в случае (41.6), с m_i , получаем

$$\left\langle \frac{1}{\sin \theta_{ij}} \right\rangle = \frac{\pi}{2}. \quad (41.8)$$

(Отметим, что дисперсия R^{-1} , включающая члены с $\langle 1/\sin^2 \theta_{ij} \rangle$, формально

является бесконечной. Однако это не приводит к практически существенным последствиям, поскольку две галактики, находящиеся приблизительно в одном и том же месте, будут считаться как одна. Кроме того, распределение в реальных скоплениях обычно является анизотропным.) Таким образом, из формулы (41.2) получим

$$\left(\sum_i m_i\right)^{-2} \langle R_{xy} \rangle \equiv \frac{1}{\left\langle \sum_i \sum_j \frac{m_i m_j}{r_{ij} \sin \theta_{ij}} \right\rangle} \equiv \frac{2}{\pi} \left(\sum_i m_i\right)^{-2} \langle R \rangle. \quad (41.9)$$

Подставляя соотношения (41.7) и (41.9) в (41.4), получаем

$$\langle M_z' \rangle = \frac{2x}{3\pi G} \langle R \rangle \langle V^2 \rangle. \quad (41.10)$$

Сравнивая с выражением (41.1), видим, что средний коэффициент перехода при получении истинной массы из наблюдений проекции изотропной системы равен

$$x = 3\pi. \quad (41.11)$$

Таким образом, поправка на проекцию составляет приблизительно порядок величины.

В случае неполной выборки также требуется поправка, поскольку центр масс скоростей выборки отличается от центра масс скоростей всей системы. Вводя в равенство (41.4) эту поправку $\dot{z}_c(n)$, зависящую от выборки $n \leq N$, получим наилучшую оценку M в зависимости от наблюдаемых лучевых скоростей $\dot{z}_i$ и положения на небе:

$$M = M_z' = \left(\sum_{i=1}^n m_i\right) \frac{3\pi \sum_{i=1}^n m_i [\dot{z}_i^2 - \dot{z}_c^2(n)]}{G \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{m_i m_j}{[(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2]^{1/2}}}, \quad \text{где } i \neq j. \quad (41.12)$$

Ожидаемое значение дроби для изотропных равновесных конфигураций в пределе при $n = N$ равно единице, поскольку $\dot{z}_c(N) = 0$. При уменьшении n эта дробь должна возрасти и превысить единицу, чтобы компенсировать уменьшение массы выборки, если M_z' по-прежнему остается точной оценкой.

На первый взгляд кажется, что при применении теоремы вириала к наблюдениям неизбежно появляется так много трудностей, что нет надежды получить хорошее значение M . В самом деле, представляется, что в выражении (41.12) заранее необходимо знать все массы галактик, чтобы придать правильный вес наблюдаемым величинам, а также тангенциальные скорости, чтобы полностью откорректировать центр масс скоростей. К счастью, однако, численное моделирование скоплений показывает, что если пренебречь всеми этими факторами, то неопределенность в окончательном результате для M будет выражаться множителем, составляющим всего лишь около двух. Причина со-

стоит в том, что неопределенности, появляющиеся в числителе выражения (41.12), имеют сильную тенденцию сокращаться с неопределенностями знаменателя. С точки зрения теории, это замечательное свойство обусловлено тем, что в теорему вириала входят моменты, в которых проводится усреднение по всей системе.

Рассмотрим далее некоторые примеры таких удачных сокращений, а также примеры отклонения от усредненных по времени значений. Эти примеры основаны на трех ансамблях скоплений, которые рассчитывались путем интегрирования системы N тел (*Larseth and Saslaw, 1972*). Каждое скопление характеризовалось сглаженным распределением галактик по массам с непрерывным спектром $n(m) \propto m^{-2}$, причем крайние значения масс различались в 10 раз. Два ансамбля, содержащие по 40 различных скоплений, интегрировались в течение десяти начальных времен пересечения. Один ансамбль состоял из групп по 8 галактик, другой — по 16 галактик в каждой группе. Третий ансамбль, содержащий 20 скоплений по 32 члена в каждом, исследовался в течение половины этого времени. Вначале группы имели статистически однородное сферическое распределение, затем они быстро (за одно-два начальных времени пересечения) релаксировали. Каждая группа испытывалась на предварительно выбранном интервале $0,5 t_{cr}$, и подходящие рассчитывались при трех уровнях полноты: $n=8, 4, 2$ для групп с $N=8$ и $n=16, 8, 4$ для двух больших систем. При $n < N$ включались в рассмотрение только наиболее массивные члены. Эта простая процедура вводит приемлемый эффект селекции, если предположить, что для всех членов системы имеется монотонно возрастающее соотношение $M(L)$. Однако здесь не делается попытки ввести отличие между эллиптическими и спиральными галактиками.

Отклонение мгновенных значений величины M от ее усредненного по времени значения, т. е. от истинного значения, имеет среднюю относительную дисперсию (для полных выборок)

$$\sigma(M) = \begin{matrix} N=8 & N=16 & N=32 \\ \left\{ \begin{array}{ccc} 0,24 & 0,17 & 0,12, \\ 0,27 & 0,24 & 0,18. \end{array} \right. \end{matrix} \quad (41.13)$$

Здесь верхний набор чисел относится к первой половине времени эволюции, а нижний — ко второй для трех ансамблей. Возрастание N приводит к уменьшению отклонений приблизительно на множитель порядка $\sqrt{N}$. Наблюдается также медленное возрастание $\sigma(M)$ со временем по мере того, как скопление становится все более неоднородным и начинают образовываться двойные системы с большим эксцентриситетом.

Оба эффекта — и мгновенное отклонение от равновесия и эффект проекции для полных выборок — показаны в виде двойных гистограмм на рис. 43. Они построены для ансамбля с $M \equiv N=16$. Эти гистограммы можно прочесть по вертикали и получить распределение полной и спроецированной вириальной массы в любой заданный момент времени. Их также можно прочесть по горизонтали и получить изменение со временем отклонений от истинного значения

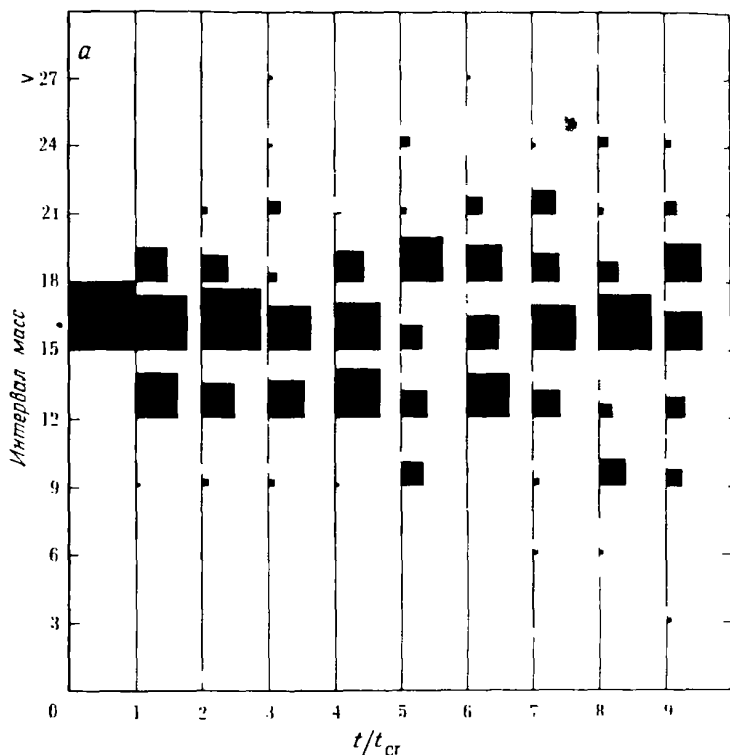
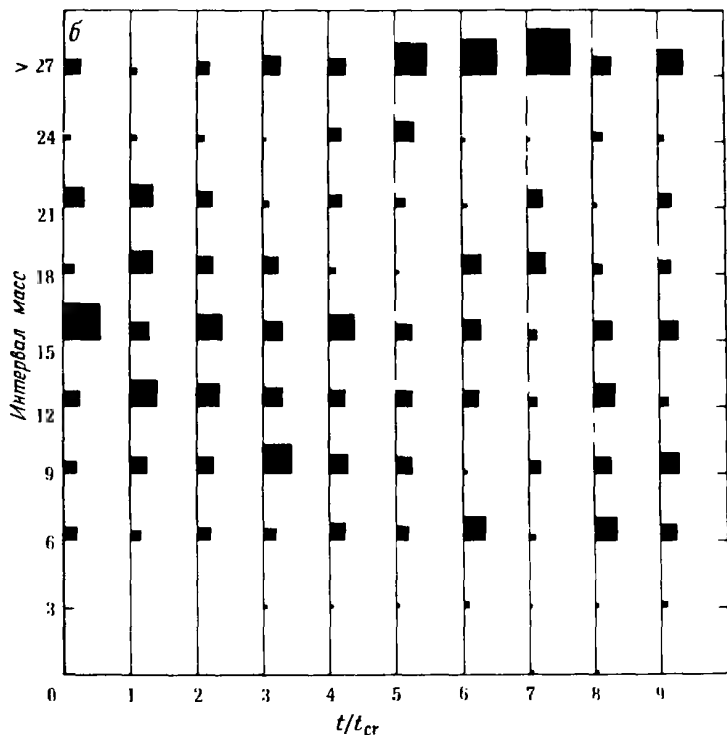


Рис. 43. Эволюционные двойные гистограммы массы, рассчитанной с помощью теоремы вириала, для полных выборок с $M \equiv N = 16$. *a* — вириальная масса M , полученная из полной трехмерной информации; *b* — спроецированная вириальная масса M'_z . Распределение числа галактик в каждом интервале масс пропорционально ширине квадратов, за исключением момента $t = 0$ на рис. 43, *a*, когда все 40 скопления имеют одинаковое значение массы. Показано распределение при всех других интервалах времени. (Aarseth and Saslaw, 1972.)

$M = 16$. Уже указанная выше систематическая тенденция возрастания величины $\sigma(M)$ со временем проявляется даже тогда, когда для M имеется полная информация. Однако эта тенденция заметно сильнее проявляется при определении спроецированной массы M'_z . Естественно ожидать, что использование меньшей информации приводит к увеличению дисперсии и это подтверждается результатами. Совместное действие эффектов проекции и мгновенного измерения обычно приводит к отклонению вычисленной вириальной массы от истинной, характеризуемому множителем ≤ 2 , что не так плохо.

Эффект неполноты выборки проиллюстрирован на рис. 44 вновь для ан-



самблей с $M \equiv N = 16$. Эти гистограммы, характеризующие распределение отдельных оценок спроецированной и трехмерной вириальной массы, основаны на 20 последовательных выборках, дающих 800 квазинезависимых оценок. Эти выборки, полученные отбором через каждую половину времени пересечения, являются квазинезависимыми в том смысле, что между последовательными конфигурациями имеются сильные различия, аналогичные различиям между измерениями, выполненными через одно время пересечения. Проекция вдоль различных осей были по существу сходными в пределах статистических флуктуаций. Уширение M , вызванное мгновенными отклонениями, при полной выборке $n = 16$ является довольно симметричным. Исключительно низкие значения спроецированной массы на всех уровнях полноты могут быть обусловлены наличием приблизительно совпадающих на луче зрения пар, которые вносят доминирующий вклад в выражение для потенциальной энергии. В дополнение к этому наличие тесных двойных систем, вектор момента импульса которых направлен приблизительно на наблюдателя, будет приводить к недооценке кинетической энергии и малости характерного масштаба проекции.

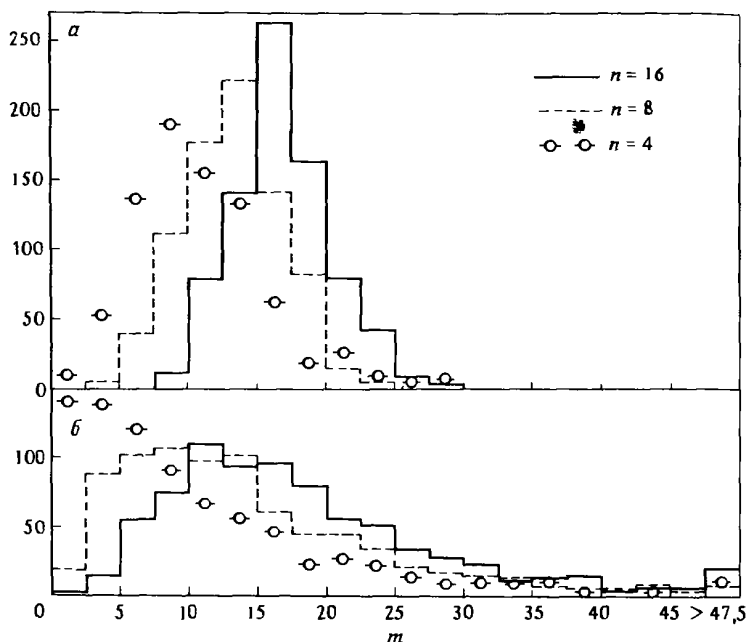


Рис. 44. Гистограммы массы, рассчитанной с помощью теоремы вириала, для $N = 16$ и $n = 16, 8$ и 4 . a — M (из трехмерной информации); b — M_z (из спроецированной информации). Последний столбец включает те случаи, когда m превосходит предельное значение. (Aarseth and Saslaw, 1972.)

В случае неполных выборок наблюдается систематическая тенденция к недооценке массы по сравнению с той, которая могла бы быть получена в результате применения теоремы вириала ко всем членам системы. Эта тенденция обусловлена поправкой скоростей и наличием связанных подсистем, которые в малых выборках часто являются доминирующими; оба этих эффекта приводят к уменьшению получаемой массы [см. уравнение (41.12)]. Большие значения массы, которые получаются значительно реже, обычно вызваны наличием избыточных скоростей в одном направлении в сочетании с временным отклонением от равновесия. Малые выборки особенно подвержены значительным флуктуациям компонент скорости. В малых группах, например с $N=8$, часто образуются массивные двойные, и это предотвращает сильно противоречивые оценки массы.

Поскольку многие внегалактические величины известны только с точностью до ~ 2 , интересно знать, какова вероятность правильного определения массы группы с помощью теоремы вириала с точностью до этой неопределенности. В табл. 5 приведены результаты соответствующего численного моде-

Таблица 5. Вероятность того, что вириальная масса заключена в интервале $0,5 N - 2 N$.

N	Средняя спроецированная вириальная масса			Трехмерная вириальная масса		
	n_1	n_2	n_3	n_1	n_2	n_3
8...	65	48	29	98	84	61
16...	78	63	43	99	92	70
32...	81	59	43	99	92	70

Примечание: $n_1 = 8$, $n_2 = 4$, $n_3 = 2$ для групп с $N = 8$, но $n_1 = 16$, $n_2 = 8$, $n_3 = 4$ для $N = 16$ и $N = 32$. Значения даны в процентах, а результаты по трем ортогональным проекциям объединены.

лирования. Оказалось, что вероятность правильного, с точностью до двойки, определения трехмерной вириальной массы высока даже для малых выборок. Однако вероятность попадания в этот интервал спроецированной массы оказалась приблизительно равной только 50%. Таким образом, следует, как правило, ожидать, что неопределенность в вычислении вириальной массы малых групп по данным наблюдений будет выражаться по крайней мере множителем порядка двойки.

Аналогичные результаты получаются и для богатых скоплений, включающих сотни и тысячи членов. Численные эксперименты со скоплением, содержащим $M = N = 500$ галактик, дали $\langle R_{xy}/R \rangle = 0,66 \pm 0,08$, что хорошо согласуется со значением $2/\pi$, фигурирующим в соотношении (41.9). Значения спроецированной вириальной массы для выборок с $n = 250$, 50 и 10 составили $\langle M'_2 \rangle = 434$, 266 и 116 соответственно. Реальная масса, содержащаяся в этих выборках, была в среднем равна 405, 204 и 65. И опять в случае малых выборок имеется тенденция к недооценке истинной массы ($M = 500$) всего скопления. Это происходит даже тогда, когда выборки составляются не по массе, а по проектируемому положению в концентрических кольцах вокруг центра скопления.

Имеется несколько методов отбора данных (Aarseth and Saslaw, 1972), которые помогают свести к минимуму отклонения при определении вириальной массы. Как правило, эти методы трудно применять на практике, поскольку для них требуется большая информация, чем та, которая легко доступна. Если эти методы не применяются, то конечный результат будет состоять в том, что полная масса скопления, получаемая с помощью формулы (41.12), при включении в выборку преимущественно массивных (ярких) членов, является систематически заниженной. В реальной ситуации недооценка массы зависит как от контраста плотности в скоплении, так и от сегрегации масс и населения выборки и может без труда достигать значения ~ 2 . Противоположный метод составления выборок из колец, расположенных во внутренней области скопления, даст качественно похожие результаты. Для получения надежных оценок массы

нужно включить в выборки как по координатам, так и по скоростям много членов гало. Если же эти поправки не учтены, то хорошим практическим правилом определения истинной массы является удвоение наблюдательной оценки.

На этом этапе рассмотрения естественно задать вопрос: можно ли с помощью других методов получить лучшую оценку массы, чем с помощью теоремы вириала? Было предложено несколько методов определения массы, особенно для случаев, когда наряду с наблюдаемыми точечными объектами имеется фон невидимого вещества (см. дальнейшее обсуждение этого вопроса в гл. 51). Общая особенность этих методов состоит в том, что в них предусматривается зависимость некоторой модели от предполагаемого распределения плотности и скорости в скоплении. Параметры этих моделей можно задавать таким образом, чтобы они принимали наиболее вероятные значения. Из этого требования определяется соотношение между, например, полной массой и положениями и скоростями галактик, а также структурными индексами скопления, которые задаются моделью (*Smith, 1982*). Эта дополнительная информация часто (но не всегда) улучшает согласие с результатами моделирования задачи N тел. Однако этот метод довольно сильно зависит от выбора модели и, в отличие от теоремы вириала, имеет меньшее отношение к основам физики скоплений. Наиболее эффективен он тогда, когда уже имеются достаточно существенные сведения об исследуемом предмете. В любом случае эти методы по-прежнему дают результат только с точностью до ~ 2 .

Нередко наблюдаемые расхождения в один или два порядка величины между динамической и светящейся массами скоплений галактик вряд ли могут быть устранены при описании скоплений равновесными динамическими моделями. Поэтому нужно предположить, что либо внутри галактик или между ними доминирует темное невидимое вещество, либо скопления не являются связанными системами и теорема вириала неприменима. Построение моделей неравновесных скоплений (*Aarseth and Saslaw, 1972*) приводит к некоторым заключениям, позволяющим провести различие между этими двумя гипотезами:

1. В связанных группах по истечении интервала в несколько времен пересечения могут образоваться пары. В несвязанных расширяющихся группах пары если и образуются, то лишь в небольшом количестве (хотя не исключается их изначальное присутствие или временное формирование в процессе слияния галактик).

2. Связанные скопления с первоначально однородным распределением плотности стремятся стать неоднородными и образовывать за несколько времен пересечения структуру типа ядро — гало. Расширяющееся скопление имеет тенденцию оставаться приблизительно однородным.

3. Тесные сближения, которые способствуют равномерному распределению энергии, намного менее важны в расширяющихся системах, чем в связанных. Следовательно, если начальные условия одинаковы (существенное «если»!), в расширяющихся скоплениях должна наблюдаться меньшая сегрегация масс (светимостей).

4. Если в скоплениях имеется большое количество невидимого вещества, то его динамическое воздействие будет сказываться на распределении галак-

тик как в пространстве, так и по скоростям. Подробные модели могут показать наличие отклонений от точечного взаимодействия. Здесь имеется большой простор для исследования различных возможностей в деталях.

42. НАБЛЮДАЕМЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА СКОПЛЕНИЙ

Люблю реальность. Она — как хлеб.

Жан Ануй

Все действительно действительно только один раз и только в одном месте.

Т. Элиот

Цель этой главы — дать очень краткий обзор основных динамических свойств некоторых реальных астрономических систем. Она не охватывает результаты последних наблюдений, поскольку они меняются почти ежедневно, и для их правильного осмысления нередко требуется длительное время. Специальные астрономические наблюдения по понятным причинам повторяются редко. Зачастую это связано с жесткой нехваткой времени на больших телескопах и спутниках с астрономической аппаратурой. В результате в противоположность ситуации, сложившейся в лабораторном физическом эксперименте, реальные неопределенности, свойственные результатам наблюдений, с трудом поддаются измерению (в отличие от пределов формальных ошибок). Еще одна особенность астрономических наблюдений заключается в том, что сами эти наблюдения обычно требуют серьезного теоретического обеспечения. Наблюдаемые системы сложны, и их основные физические характеристики редко удается получить прямым путем. Интерпретация результатов становится фильтром, через который должны пройти данные измерений.

Постоянный прогресс в технике наблюдений означает, что наиболее интересные наблюдения всегда выполняются, как правило, на пределе возможностей существующих в данное время приборов. Эти наблюдения зачастую едва поднимаются над «уровнем шума», и астрономы говорят тогда об «эффекте двух-трех сигм» (сигма означает стандартную погрешность, вносимую шумом). Нетерпение наблюдателей и социологические аспекты современной науки подталкивают к использованию новой техники наблюдений, не дожидаясь ее окончательной доработки. Именно этим объясняется то, что новые результаты уже после их опубликования и интерпретации иногда не подтверждаются. Было бы интересно исследовать вопрос о том, каким образом опровергнутая впоследствии часть опубликованных результатов связана с другими аспектами развития науки.

Результаты, о которых идет речь в этой главе, можно считать достоверными, за исключением специально оговоренных случаев. Здесь будут описаны три основных вида приблизительно сферических систем: скопления галактик,

галактические ядра и шаровые звездные скопления. Ссылки не носят всеобъемлющего характера, но они могут быть использованы для поиска литературы (с помощью индекса цитирования).

42.1. СКОПЛЕНИЯ ГАЛАКТИК

Скопления галактик являются наиболее крупными из известных нам структур, не считая самой Вселенной. Иногда несколько скоплений, по-видимому, взаимодействуют друг с другом, образуя еще более крупные и более неправильные структуры. Эти структуры называются сверхскоплениями, но такое название скорее традиционно: это просто скопления в более крупном масштабе (и содержащие подскопления!). Простейшим полезным способом классификации скоплений является подсчет числа содержащихся в них галактик. Количественным критерием такой классификации является так называемое богатство — величина, предложенная Эйбеллом и часто используемая в астрономии. Она равна числу галактик, звездная величина которых лежит в интервале между звездной величиной m_3 — третьей по блеску галактики (на случай, если первая по блеску является пекулярной) и звездной величиной $m_3 + 3$ (см. в качестве общего обзора *Bahcall, 1977, 1980*). Число галактик в скоплениях может изменяться от нескольких — в этом случае скопления часто называются группами — до нескольких тысяч.

Радиус скоплений изменяется в пределах от нескольких сотен килопарсек до 2—3 Мпс. Обычно радиус ~ 1 Мпс типичен для богатого скопления. Размеры крупнейших скоплений, расположенных, например, в созвездиях Волосы Вероники и Северная Корона, остаются довольно неопределенными, поскольку до сих пор не известно, где кончается скопление и начинается фоновое поле галактик.

Средняя пекулярная лучевая скорость внутри скопления может изменяться от 200—300 км/с до приблизительно 1500 км/с. В скоплении в Волосах Вероники, например, она составляет $\sim 10^3$ км/с. Если скорости изотропны, то средняя скорость в пространстве будет в $\sqrt{3}$ раз больше. Малые группы обычно имеют пекулярную лучевую скорость около 200 км/с.

Оптическая светимость наиболее богатых скоплений с трудом поддается измерению, но наиболее типичные оценки заключены в пределах $L \approx (1 + 5)10^{12} L_{\odot}$. Следовательно, оценки полной массы таких скоплений, использующие теорему вириала, приводят к величине отношения M_{VT}/L между несколькими сотнями и тысячей. Это намного больше, чем отношение M/L для отдельных галактик, — так возникает проблема скрытой массы скоплений (см. превосходный обзор *Faber and Gallagher, 1979*).

С точки зрения динамики особенно интересны несколько более частных видов наблюдений. Первое — это точное распределение плотности внутри скопления. Результаты для наиболее богатых скоплений довольно хорошо согласуются с фоккер-планковской и усеченной изотермической моделями, как об этом упоминалось в гл. 40. Наиболее известный пример — это скопление в Волосах Вероники (см., например, *Quintana, 1979*), хотя скопление Южного

полушария CA 0340-538, масса которого примерно в два раза меньше, также детально изучено (*Quintana and Havlen, 1979*). В обоих этих случаях, очевидно, наблюдается сегрегация светимостей, которая, возможно, позволяет предполагать и сегрегацию масс (см. гл. 46). В скоплении CA 0340-538, например, радиус ядра зависит от предельной звездной величины галактик, по которым он определяется. При уменьшении этой величины от $m \approx 17$ до $m \approx 19,4$ радиус ядра увеличивается от 0,2 до 0,45 Мпс. В скоплении в Волосах Вероники подобная сегрегация наблюдается для галактик умеренной яркости. Однако яркий хвост распределения светимостей ведет себя по-другому (*Capelato et al., 1980*).

Распределение плотности в богатых скоплениях имеет одно любопытное свойство, которое, правда, еще не до конца подтверждено. В нескольких скоплениях, включая скопление в Волосах Вероники (*Dekel and Shaham, 1980*), на уровне 2σ наблюдается вторичный пик в проекции плотности числа галактик. Этот пик, по всей вероятности, приходится обычно приблизительно на половину характерного гравитационного радиуса $R_g = 2GM/3v_r^2$, где v_r — дисперсия лучевых скоростей. Если этот эффект действительно существует, он может быть следом тех условий, в которых происходило образование богатых скоплений.

Богатые скопления не всегда являются сферическими, а тем из них, которые имеют меньшую массу, свойственна тенденция к более неправильной форме (см., например, скопление в Павлине, изображенное на стр. 13 переводного издания). Некоторые из них имеют сплюснутую форму, но не вращаются как, например, скопление A2029 (*Dressler, 1981*). В этом скоплении с $v_r \approx 1500$ км/с и $M_{VT}/L \approx 500$ доминирующей является центральная cD-галактика, главная ось которой совпадает с главной осью скопления. Для появления такой сплюснутости потребовалось бы вращение со скоростью, приблизительно равной дисперсии лучевых скоростей, составляющей 1500 км/с, но такого вращения не наблюдается. Таким образом, сплюснутость может быть обусловлена анизотропией распределения скоростей и положений галактик, которая осталась со времени образования скопления то ли в более раннюю эпоху, то ли при более позднем процессе слияния.

Некоторые из богатых скоплений являются настолько неправильными, что их лучше представлять с двумя центрами. Эти центры часто выявляют при рентгеновских наблюдениях, а также на фотографиях в оптической области; таким образом, мы можем быть свидетелями процесса слияния двух скоплений. Примером является скопление A98 из каталога Эйбелла (*Beers et al, 1982*). Оно состоит из двух групп диаметром около 0,7 Мпс каждая и дисперсией лучевых скоростей ≈ 1500 км/с. Отношение M_{VT}/L приблизительно равно 600 для одной группы и 430 для другой (что сравнимо со значением, приблизительно равным 650, для скопления в Волосах Вероники). Эксперименты по численному моделированию способствуют пониманию таких ситуаций, даже если не дают единого результата.

Внутри богатых скоплений часто имеются малые подгруппы галактик. Иногда, как в случае скопления в Волосах Вероники, вокруг одной или двух

массивных галактик, находящихся вблизи центра, движется целый рой малых подсистем. В других скоплениях, по-видимому, значительно выше относительное содержание двойных галактик (*Struble and Rood*, 1981). Эти пары связаны перемычкой или общей светящейся оболочкой. Обычно такие скопления содержат порядка десяти пар, которые составляют приблизительно 10—20% всех галактик, принадлежащих скоплению.

Полную массу скопления, как уже было показано, можно оценить с помощью теоремы вириала, или используя светимости отдельных галактик. Существует также третий метод, который может быть применен к некоторым богатым скоплениям. Вокруг этих богатых скоплений движутся меньшие группы. Тот факт, что эти группы не были приливно разрушены, дает верхнее ограничение на массу богатого скопления, которое зависит от предположений относительно орбит этих групп. Например, малые группы, движущиеся вокруг скопления в Волосах Вероники (*Hartwick*, 1981), ограничивают его массу значением $M_{\text{Coma}} \leq 6 \cdot 10^{16} M_{\odot}$, если только приливное ограничение налагается при современном положении этих групп. Однако если группы движутся прочь от скопления, а приливное ограничение налагается при расстоянии ближайшего происхождения — на краю скопления, то масса уменьшается до $M_{\text{Coma}} \leq 5 \cdot 10^{15} M_{\odot}$. Это значение сравнимо с оценками 1,8; 2,4 и $5,4 \cdot 10^{15} M_{\odot}$, полученными другими астрономами (*Hartwick*, 1981). Интервал, в который попадают эти независимые оценки, возможно дает лучшее представление о характерной ошибке, чем формальная погрешность, выведенная в каждом отдельном случае.

Большое значение имеют и профили скоростей в богатых скоплениях, хотя наблюдать их труднее, чем профили плотности, и известно о них значительно меньше. Соответствующая профилю плотности теоретическая модель далеко не единственна, но распределение скоростей является достаточно хорошим критерием выбора между этими моделями. Во многих скоплениях имеется тенденция к уменьшению наблюдаемой дисперсии скоростей в направлении центра (*Struble*, 1979). Возможно, эта тенденция свидетельствует об анизотропном распределении скоростей в центре скопления, обусловленном влиянием одной-двух массивных галактик или же начальными условиями, если релаксация системы после образования была медленной.

Функция светимости богатых скоплений имеет также динамический смысл, не связанный с проблемой скрытой массы. Разброс абсолютной звездной величины ярчайших членов богатых скоплений отличается удивительно малой дисперсией, $\sigma \approx 0^m$, 4. Мы не знаем, означает ли это, что яркие скопления обладают сходными функциями светимости, или же это свидетельствует о сходстве физических процессов образования самых ярких галактик (*Godwin and Peach*, 1979). Разумно ли считать, что процессы образования, аккреции, слияния и т. д. галактик привели к одинаковой светимости ярчайших галактик скоплений? Разумно ли считать, что функция светимости для скоплений, отобранных нами как богатые, должна быть универсальной?

График зависимости кумулятивной логарифмической функции светимости $\lg N(m \leq V)$ от предельной звездной величины V имеет тенденцию к образова-

нию перегиба (*Bucknell et al.*, 1979). Такую зависимость можно простейшим образом представить с помощью двух прямых, пересекающихся при некотором значении V_0 . Соотношение между величиной V_0 и другими свойствами скоплений является важным и нерешенным вопросом.

Скопления различаются по относительной многочисленности различных типов входящих в них галактик; одни скопления богаты спиральными галактиками, другие содержат преимущественно эллиптические галактики. Интересными объектами являются cD-скопления; они отличаются высокой плотностью и преобладанием одной-двух гигантских эллиптических галактик. Тип галактики в скоплении может также зависеть от светимости. В скоплении в Волосах Вероники, например (*Thompson and Gregory*, 1980), наиболее яркие галактики являются эллиптическими, а галактики средней яркости обычно относятся к типу SO. Кроме того, в ядре этого скопления содержится мало слабых спиральных и неправильных галактик по сравнению с тем, что дает функция светимости для ближайших галактик. Одна из возможных причин этого дефицита заключается в том, что потеря газа центральными спиральными галактиками в результате их «обдирания» привела к уменьшению в них темпа звездообразования. Другая возможность состоит в том, что спиральные галактики, находящиеся в центре скопления, слились. Возможно, детальное исследование их структуры и звездного населения даст определенный ответ на этот вопрос.

В малых группах галактик наблюдаются некоторые из общих свойств богатых скоплений. Во многих группах также наблюдается большое расхождение между их вириальной и светящейся массой. Это расхождение, по-видимому, коррелирует с временем пересечения группы $T_c \equiv R/V$ (*Field and Saslaw*, 1971; *Klinkhamer*, 1980). Время пересечения меняется приблизительно от 10^9 до $5 \cdot 10^{10}$ лет, и у групп с $T_c \leq 2 \cdot 10^9$ лет расхождение наименьшее. У групп с малым T_c имеется также сильная тенденция к повышенному содержанию эллиптических галактик.

Очень малые компактные группы, содержащие лишь несколько галактик, могут иметь очень низкое отношение M/L . В двух группах, содержащих по четыре галактики, это отношение составляет соответственно 24 и 4 (*Rose and Graham*, 1979). Приведенные значения достаточно неопределенны, поскольку они зависят от поправок, связанных с наклоном галактик, поглощением внутри них, динамическими флуктуациями, погрешностями измерения скоростей (которые зависят от положения щели спектрографа на галактике) и т. д. Существуют также удивительно маленькие группы компактных голубых галактик. Например, в одной из них (*Воронцов-Вельяминов и др.*, 1980) содержится шесть голубых взаимодействующих галактик. Полная масса группы приблизительно равна $10^{10} M_\odot$, а отношение $M/L \approx 0,3$, откуда следует, что доминирующими являются молодые горячие звезды. Дисперсия лучевых скоростей в этой группе составляет приблизительно 44 км/с. Полный диаметр группы равен 15 кпс, что составляет лишь четверть размера нашего Млечного Пути.

42.2 ЯДРА ГАЛАКТИК

Мы все предполагаем и кружимся вокруг,
А тайна скрыта в центре и в знании, мой друг.

✱ Роберт Фрост

Ядро галактики — один из самых удивительных астрономических объектов. Из этих компактных областей, диаметр которых едва достигает нескольких парсек, излучается гигантская энергия во всех областях спектра. Ярче триллиона солнц, как маяки, светят они через Вселенную. Вместе с излучением выбрасываются при этом огромные облака газа, часто с релятивистскими скоростями.

Подобно Протею, активные ядра галактик принимают разные обличья. Множество интересных физических процессов в зависимости от преобладания того или иного из них приводят к появлению квазаров, объектов типа *BL Lac*, радиогалактик и галактик с эмиссионными линиями. Все эти, а также некоторые другие объекты, вероятно, представляют собой проявления ядер галактик на разных стадиях их активности.

Источником большей части наших сведений о ядрах галактик является излучение находящегося внутри них горячего газа. Полная светимость наиболее ярких галактик составляет $\sim 10^{46}$ эрг/с, причем наибольший вклад в нее вносят ядра этих галактик. Это эквивалентно массе покоя, равной примерно двум десяткам масс Солнца в год. Полная светимость квазаров может быть в 100 раз больше. Излучаемая энергия делится приблизительно поровну между инфракрасной, оптической, рентгеновской и γ -областями спектра; точное соотношение между ними зависит от конкретного объекта. Некоторые квазары, особенно те, что находятся сравнительно недалеко, окружены протяженными областями диффузного оптического излучения с малой поверхностной яркостью. Возможно, они находятся в галактиках. Каждая такая галактика, окружающая квазар, должна быть особенно интересной.

Пространственное распределение излучаемой ядрами галактик энергии имеет крупномасштабную структуру, которая может отражать внутреннюю структуру ядра. Это особенно заметно в радиоизлучении. Во многих активных галактиках, особенно гигантских эллиптических, оно исходит из двух областей, расположенных достаточно симметрично по обе стороны от ядра, но отстоящих от него на расстояние, во много раз превышающее диаметр галактики. Эти области, характерный размер которых — десятки килопарсек, имеют по краям пик излучения, называемый «горячим пятном». Горячие пятна могут быть разделены расстоянием в 2—3 Мпс и часто с точностью до нескольких градусов находятся на одной линии с центральным ядром. Через огромные расстояния это ядро каким-то образом накачивает в них энергию. Измерения с высокой разрешающей способностью, выполняемые с помощью радиоинтерферометров, элементы которых расположены на разных континентах, позволяют иногда видеть в ядре структуру с характерным размером, не

превышающим нескольких парсек, которая вытянута вдоль прямой, соединяющей оба внешних горячих пятна (*Jones et al.*, 1981). Иногда обнаруживаются радиоизлучающие перемычки, которые связывают ядро с удаленной структурой, причем такая перемычка часто бывает видна лишь на одной стороне ядра. Это может означать попеременную передачу энергии ядра протяженным областям радиоизлучения, но более глубокая причина существования такой асимметрии в структуре, которая в остальном достаточно симметрична, остается загадочной.

Оптическое излучение также характеризуется структурой, имеющей характерные размеры в десятки и сотни парсек. Сейфертовские и другие галактики с необычайно сильным ультрафиолетовым излучением часто имеют две или несколько областей интенсивного оптического излучения (*Петросян и др.*, 1979). Они могут напоминать относительно обычные области ионизованного газа, связанные с молодыми горячими звездами. Вопрос о том, было ли само образование этих звезд вызвано процессами внутри ядра, остается нерешенным. При наземных наблюдениях структура меньших масштабов обычно сглаживается эффектами атмосферной турбулентности (см., например, *Faber*, 1980). Получение некоторой информации, касающейся ярких ядер, становится возможным при использовании спекл-интерферометрии. Характерное время измерений, выполняемых таким методом, мало по сравнению с характерным временем атмосферной турбулентности, а измерения, сделанные в разные моменты времени, комбинируются между собой. Оптические наблюдения с высоким разрешением лучше всего выполняются с помощью космических телескопов.

Оптические спектры даже с низким пространственным разрешением несут в себе важную информацию о газе, находящемся в ядрах галактик. Относительное содержание в нем большинства химических элементов не очень отличается от того, которое имеется вблизи Солнца. Однако процессы ионизации и нагрева в ядрах оказываются существенно иными. Обычно спектры лучше всего согласуются со степенной зависимостью вида $\propto \nu^{-\alpha}$ для плотности потока ионизирующего излучения, а не с тепловым источником ионизации. В спектрах некоторых галактик с эмиссионными линиями, таких, как сейфертовские галактики типа 1, доминируют широкие бальмеровские и другие линии шириной в несколько тысяч километров в секунду. Имеются также узкие запрещенные линии. Кроме того, эти галактики являются мощными источниками рентгеновского излучения. Их светимость подвержена быстрым изменениям, иногда на $\sim 30\%$ от ночи к ночи (*Geller et al.*, 1979). Это означает, что активные области имеют характерный размер порядка светового дня ($\approx 10^{16}$ см $\approx 3 \cdot 10^{-3}$ пс). Спектры других активных галактик, таких как сейфертовские галактики типа 2, имеют более узкие (~ 500 — 1000 км/с) бальмеровские линии и более широкие запрещенные линии приблизительно той же ширины, что и разрешенные. Бальмеровские линии формируются в плотных облаках, находящихся вблизи ядра и имеющих плотность $\sim 10^7$ — 10^{11} см $^{-3}$, тогда как запрещенные линии формируются в гораздо более удаленных от ядра областях, где плотность газа обычно составляет $\sim 10^3$ см $^{-3}$. Таким образом, в сейфертовских галактиках типа 1 более заметно излучение внутренних областей ядра,

тогда как в сейфертовских галактиках типа 2 преобладает излучение внешних областей ядра. Детальная структура облаков и ветра в ядрах галактик гораздо более загадочна, чем погода на земле.

К сожалению, еще меньше известно о динамике звездной составляющей ядер галактик. Излучение этой составляющей обычно замыкается нетепловым излучением газа. В эллиптических и SO-галактиках линии поглощения звезд обычно уширены на величину дисперсии скоростей ~ 200 км/с (Tonry and Davis, 1981), но, поскольку картина смазана атмосферной турбулентностью, этот результат является средним по всей галактике. Он приводит к отношению массы к светимости в оптическом диапазоне, равному приблизительно 25 (при $H = 100$ км/(с·Мпс)), которое изменяется в пределах множителя ~ 2 в зависимости от конкретной галактики. Однако, как показывает излучение ядра галактики M31 — ближайшей к нам большой галактики (Tremaine and Ostriker, 1982), это отношение очень сильно зависит от модели. В ядре галактики M31 средняя дисперсия скоростей звезд на луче зрения равна около 180 км/с. Однако точность определения отношения массы к светимости составляет ~ 50 , поскольку это отношение зависит от степени анизотропии скоростей в центральной области.

При усреднении вдоль луча зрения, естественно, большой вес имеют многочисленные звезды с низкими скоростями, относительно удаленные от центра. Если плотность звезд при приближении к центру резко возрастает, то из теоремы вириала и простой политропной модели следует, что скорости звезд должны достигать многих сотен и даже тысяч километров в секунду. Некоторые ядра галактик имеют такой резкий центральный пик светимости, что по-видимому являются возможным более глубоким проникновением в глубь этих ядер. Радиогалактика M87 представляет собой один из наиболее изученных и характерных в этом отношении примеров. Эта гигантская эллиптическая галактика имеет в оптике цепочку расположенных на одной линии горячих пятен, выходящих из ее ядра подобно струйному выбросу. Само ядро (Dressler, 1980) представляет собой, по-видимому, звездное скопление, испускающее сравнительно немного ($\leq 20\%$) нетеплового излучения. Известна только верхняя граница радиуса ядра, но спекл-интерферометрия дает для него возможное значение ≤ 2 пс. Дисперсия скоростей звезд в центре составляет ≤ 600 км/с, но, возможно, ее значение ближе к 350 км/с. При $r \rightarrow 0$ она может сильно возрастать, в отличие от дисперсии скоростей в центре изотермической или простой фоккер-планковской модели (гл. 41). Если такое возрастание будет достоверно установлено, оно может указывать на присутствие внутри ядра массивного объекта или на сильную анизотропию скоростей в центре. В настоящее время имеющихся наблюдений недостаточно для выбора определенной модели; этот вопрос имеет первостепенное значение.

Ясно, что центральной проблемой исследования ядер галактик является вопрос об их основном источнике энергии. Таким источником могли бы быть плотные звездные системы, сверхмассивные звезды, аккреция на сверхмассивные черные дыры. Эти процессы не исключают друг друга, но в том порядке, в котором они перечислены, являются естественной эволюционной по-

следовательность. На каждой последовательной стадии внутренние части системы становятся более компактными и высвобождаемая энергия порождает явления, которые наблюдаются в различных ядрах галактик или, возможно, в одном и том же ядре по мере его эволюции. Более точные наблюдения, особенно с космических телескопов, должны обеспечить выбор среди большого числа моделей (Saslaw, 1974), предложенных для объяснения этих загадок.

42.3. ШАРОВЫЕ ЗВЕЗДНЫЕ СКОПЛЕНИЯ

Наименьшими гравитирующими системами, которые в первом приближении могут рассматриваться как изолированные и сферические, являются шаровые звездные скопления. Эти группы, состоящие из $\sim 10^5$ — 10^6 звезд, движущихся вместе внутри галактики. Шаровые скопления нашей Галактики достаточно близки для того, чтобы многие их свойства были доступны точному наблюдению. В прекрасном обзоре Хейнса и Мадора (Hanes and Madore, 1980) приводятся сведения о шаровых скоплениях, полученные к концу 1970-х гг. Здесь мы перечислим лишь некоторые из их важнейших динамических свойств.

В нашей Галактике наблюдается около 150 шаровых скоплений. Другие скопления, по-видимому, заслонены от нас либо пылью, либо областями с повышенной звездной плотностью. Размер шарового скопления сильно зависит от того, как его определить. Для большинства скоплений поверхностная плотность достаточно хорошо описывается простыми моделями с изотропным давлением; небольшие отклонения при этом могут быть вызваны анизотропией скоростей и сегрегацией масс (светимостей). Эти модели характеризуются тремя основными параметрами: радиусом ядра r_c , приливным радиусом r_t и масштабным множителем c ; распределение поверхностной плотности дается в виде

$$\sigma(r) = c \left\{ \left[1 + \left(\frac{r}{r_c} \right)^2 \right]^{-1/2} - \left[1 + \left(\frac{r_t}{r_c} \right)^2 \right]^{-1/2} \right\}^2 \quad (42.1)$$

Характерные значения радиуса ядра располагаются в пределах 2—15 пс, тогда как приливный радиус может быть в 10 раз больше. В действительности радиус ядра достаточно сильно зависит от конкретной модели, в то время как приливный радиус с трудом поддается точному определению. На его величину влияет неопределенность фоновой плотности звезд, неправильный характер гравитационного поля Галактики и сложность распознавания звезд, покидающих скопление. Таким образом, значение ~ 10 пс для характерного «размера» скопления следует считать лишь грубой оценкой, но такая оценка позволяет установить разумный масштаб явления.

Наблюдаемые оценки отношения массы к светимости изменяются для различных скоплений от 1 до 3. Это приводит к разбросу оценок полной массы скопления в диапазоне 10^5 — $10^6 M_\odot$. Характерное значение дисперсии скоростей звезд в скоплениях составляет от 7 до 20 км/с. Скорость, необходимая для убегания из центра таких скоплений, опять-таки зависит от распределения

плотности в данной модели, но значения от 10 до 30 км/с кажутся разумными. Основная особенность этих систем состоит в том, что по сравнению с ядрами и скоплениями галактик они очень слабо связаны.

Внутри различных скоплений время релаксации, обусловленное кумулятивными эффектами парных взаимодействий [уравнение (2.9)], изменяется от $\sim 5 \cdot 10^6$ до 10^{10} лет для центра скопления. Возраст скоплений, полученный из моделей эволюции звезд, составляет обычно 10^{10} лет. Неудивительно поэтому обнаружение прорелаксировавших скоплений, особенно если учесть, что ранняя бурная релаксация или последующая релаксация, вызванная неоднородностью гравитационного поля Галактики, могла оказать свое действие на более коротких характерных временах.

Из загадок, касающихся шаровых скоплений, одной из основных является загадка их происхождения. Образовались ли они под воздействием ударных волн и последующей фрагментации на ранней стадии коллапса газовых протогалактик? Или же они сформировались сразу после отделения вещества от излучения в ранней Вселенной при красном смещении $z \approx 10^3$, а затем объединились в более массивные структуры, образовав в конце концов галактики? Наблюдательную проверку этих гипотез можно осуществить, выяснив, не содержится ли большее число шаровых скоплений в более ярких галактиках по сравнению с более слабыми, а также в эллиптических галактиках по сравнению со спиральными (Hanes, 1977). Другие важные тесты могут быть найдены на основе наблюдения химического состава и эволюции шаровых скоплений.

Некоторые очень странные шаровые скопления наблюдаются на краях галактик, а возможно, и между галактиками. Шаровое скопление Palomar 5 (Sandage and Hartwick, 1977) с массой приблизительно $10^4 M_{\odot}$ связано так слабо, что оно, вероятно, никогда не подходило к центру Галактики ближе, чем на 15 кпс, по крайней мере в теперешней своей форме. Химический состав этого шарового скопления довольно специфичен и может дать ключ к пониманию его образования, а также эволюции внешних областей нашей Галактики. Шаровые скопления массой $\sim 10^4 M_{\odot}$ и диаметром ~ 80 пс обнаружены и еще дальше — на расстояниях ~ 100 кпс (Burbidge and Sandage, 1958). Другое скопление приблизительно сферической формы (Madore and Arp, 1979) находится, очевидно, на расстоянии около 300 кпс; если это так, то его диаметр должен составлять около 150 пс.

Все эти удаленные шаровые скопления характеризуются сравнительно малыми массами и большими диаметрами. Их поверхностная яркость мала и в отличие от случая близких скоплений слабо концентрируется к центру. Являются ли эти удаленные объекты слабо связанными остатками, преждевременно отрезанными от родительской галактики на ранних стадиях слияния и приливных взаимодействий? Или же это изолированные остатки ранней стадии гравитационного сгущивания, которые никогда не принадлежали галактикам полностью? В этом состоит основной вопрос.

Серьезные возможности ответа на этот вопрос могут быть связаны с другим классом объектов, свойства которых занимают промежуточное положение

ние между удаленными шаровыми скоплениями и обычными галактиками. Речь идет о карликовых эллиптических галактиках (Hodge, 1966). Многие из них найдены в Местной группе галактик, в пределах одного мегапарсека. Однако поиски их затруднены, и число установлено ненадежно. Малая поверхностная яркость делает их трудноотличимыми от расположенных на переднем плане звезд Галактики. Отношение большой и малой полуосей карликовых эллиптических галактик колеблется от 1 до 0,5, причем наиболее характерное значение равно 0,7. Расстояния до них составляют около 80—250 кпс. Значения их масс, полученные из отношения массы к светимости их звезд, составляют, по всей видимости, 10^5 — $10^7 M_{\odot}$, а центральные плотности — около 10^{-4} — $5 \cdot 10^{-3} M_{\odot}/\text{пс}^3$. Это очень мало для галактик. Приливный радиус карликовых галактик относительно гравитационного поля нашей Галактики изменяется от 0,5 до 7 кпс. Такие свойства соответствуют характерному времени медленной динамической релаксации вследствие далеких парных сближений около 10^{12} — 10^{14} лет, что намного больше возраста Вселенной. Это заставляет предположить наличие в рассматриваемом типе галактик эффектов бурной релаксации и приводит к необходимости исследовать их с этой точки зрения.

Исходя из приведенного краткого обзора размеров, формы, массы и распределения сферических гравитирующих систем, приступим к рассмотрению физических процессов, определяющих их внутреннюю эволюцию.

43. ГРАВИТЕРМИЧЕСКАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ

До сих пор в ч. III мы рассматривали свойства прорелаксировавших стационарных звездных систем. Известно, что такие системы не могут существовать в действительности, поскольку они неустойчивы. Наиболее очевидная неустойчивость этих систем — испарение звезд с высокой энергией. Этот процесс приводит к уменьшению полной энергии системы; остающиеся звезды уходят внутрь углубляющейся потенциальной ямы и сильнее связываются друг с другом.

Однако даже в отсутствие испарения предположение, что скопление может быть устойчивым, очевидно, несостоятельно. То обстоятельство, что в ньютоновой системе все больше кинетической энергии высвобождается вследствие постоянного гравитационного сжатия, заставляет предположить, что неустойчивость может иметь чисто внутренний характер и быть связана с перераспределением звезд внутри системы. В сферических системах центр должен становиться плотнее, теряя энергию посредством испускания звезд с высокой энергией и образуя все более глубокую потенциальную яму.

Простые физические соображения показывают, как получается эта неустойчивость. Системы, для которых справедлива теорема вириала (9.30), описываются уравнением $2T + W = 0$, и, поскольку полная энергия $E = T + W$, для них выполняется равенство $E = -T$. Хотя теорема вириала может быть и не вполне справедливой в отношении реальных систем или их частей, она достаточно правильно описывает физическую суть явлений, необходимых для

понимания гравитермической неустойчивости. Кинетическая энергия хаотического движения T пропорциональна температуре (неожиданно полезное совпадение обозначений?). Таким образом, уменьшение энергии гравитационно связанной системы означает повышение ее температуры. Такие системы обладают отрицательной удельной теплоемкостью. Поэтому не следует сильно удивляться, если поведение таких систем окажется довольно странным по сравнению с обычными газами.

Тепловая энергия стремится к распространению от более горячих областей к более холодным благодаря динамическому трению, которое увеличивает скорость медленных звезд за счет более быстрых. Таким образом, поток кинетической энергии направлен вдоль градиента температуры. В обычных газах наличие такого потока уменьшает градиент температуры и, следовательно, увеличивает устойчивость. В гравитирующих системах этот поток не приводит к возрастанию устойчивости. Те области, которые теряют тепло, становятся более горячими, поскольку имеют отрицательную теплоемкость. Градиент температуры увеличивается. Отток тепла от сжимающейся области еще более возрастает, а сама эта область становится еще более горячей. В результате отток тепла стремительно возрастает.

В сферическом скоплении тепловой поток направлен от горячего центра к холодным внешним областям. Для обращения этого потока необходим такой нагрев внешних областей, который обеспечил бы превышение их температуры над температурой ядра. В свободно эволюционирующем скоплении этому препятствуют два фактора. Первый связан с временем динамической релаксации $\tau_R \propto v^3/\rho$, определяемым из формулы (2.9). Поскольку отношение v^3/ρ возрастает с увеличением радиуса, τ_R во внешних областях будет больше, чем в ядре. Именно так обстоит дело, например, в случае изотермической сферы, где величина v^3 примерно постоянна, а $\rho \propto r^{-2}$ во внешних частях сферы, как это следует из соотношения (40.21). Поэтому при переходе во внешние области скопления звезды с высокой энергией становятся менее термализованными. Вместо того чтобы увеличивать температуру этих областей, они увеличивают анизотропию скоростей в них.

Второй фактор, который препятствует нагреву внешних частей скопления, связан с их высокой удельной теплоемкостью. Значительный обмен энергией приводит лишь к небольшому обмену температурой. Удельная теплоемкость непостоянна в пределах скопления, поскольку отдельные его части связаны сильнее других. О силе гравитационной связи сферической оболочки можно судить по ее вкладу в полную гравитационную энергию (даже если эта энергия не может быть локализована в определенной части скопления). Если сферическая оболочка массы $dM(r)$ принесена из бесконечности на массу $M(r)$, уже занимающую соответствующую область пространства радиуса r , то по отношению к бесконечности она приобретает потенциальную энергию $-GM(r)dM(r)/r$. Построив таким образом всю сферу, легко найти ее полную гравитационную энергию

$$W = -G \int_0^R \frac{M(r) dM(r)}{r}. \quad (43.1)$$

Если масса $M(r)$ увеличивается медленнее радиуса r , то при постоянстве массы оболочек dM вклад внешних оболочек в энергию связи относительно незначителен. Во внешних частях изотермической сферы $M(r) \propto r$, и такая зависимость является предельной. В реальных конечных системах плотность ρ должна уменьшаться быстрее, чем r^{-2} , и внешние части таких систем оказываются связанными слабее внутренних. Это в свою очередь приводит к тому, что приток определенного количества тепла вызывает более значительное расширение внешних частей, чем то, которое испытала бы та же масса внутри ядра. А более сильное расширение вызывает и более интенсивное адиабатическое охлаждение. В результате повышение температуры внешних оболочек вследствие притока определенного количества тепла оказывается меньше, чем в случае внутренних оболочек той же массы. Таким образом, внешние оболочки имеют более высокую удельную теплоемкость. Это приводит к росту градиента температуры и тем самым к усилению неустойчивости.

Гравитермическая неустойчивость вызывает перераспределение скопления как в конфигурационном пространстве, так и в пространстве скоростей. Происходит образование центрального ядра, которое по мере ухода энергии во внешние части скопления становится все плотнее и компактнее. Гало вокруг ядра увеличивается в размерах. Характерное время заметного перераспределения невозможно найти из одной только теории устойчивости; необходимо привлечь и кинетическую теорию. Тем не менее, поскольку этот процесс существенным образом зависит от диффузии, следует ожидать, что время релаксации τ_R играет здесь определяющую роль. Как показано в гл. 42, в случае шаровых скоплений это время может быть достаточно большим. Эволюция поэтому не имеет характера катастрофы (т. е. процесса, который определяется характерным динамическим временем пересечения), хотя иногда и встречается термин «гравитермическая катастрофа». В конце концов в ядре остается так мало звезд, что описание на основе диффузии перестает быть справедливым и должно уступить место описанию отдельных орбит.

Эти физические соображения, применимые к широкому кругу реальных скоплений, были исследованы в экспериментах по численному моделированию задачи N тел нескольких типов. В следующих двух главах дается более точное описание динамической эволюции. В оставшейся части данной главы обсуждается одна из моделей, рассмотренных в гл. 40, — изотермическая сфера. Эта модель широко изучалась, поскольку, как уже упоминалось, она достаточно хорошо подходит для описания ядер реальных систем. Анализ устойчивости изотермической сферы представляет поэтому интерес в качестве иллюстративного примера.

Идеальная изотермическая сфера простирается на бесконечность и имеет бесконечную массу, поэтому она оказывается непригодной для анализа на устойчивость. Чтобы сохранить физическое содержание проблемы и одновременно получить пригодную математическую модель, отбросим внешнюю часть скопления, окружив его сферической стенкой. Типы стенки могут быть различны. Один из типов — совершенно жесткая и непроницаемая стенка: все звезды отражаются на границе, ни одна не проходит ее насквозь. Этот тип соответствует изолированному скоплению с постоянной массой, энергией и объемом — элементу микроканонического ансамбля. Возможны и другие типы стенок, не приводящие к столь жестким ограничениям. Они могут обладать теплопроводностью, могут находиться в равновесии с тепловым резервуаром постоянной температуры. В этом случае происходит обмен энергией. Такие скопления образуют канонический ансамбль. Если же возможен обмен звездами с резервуаром, мы имеем большой канонический ансамбль. Еще одну возможность представляет собой упругая стенка, уравнивающая давление со стороны резервуара. Каждая из таких моделей описывает отличную от других физическую ситуацию, и свойства устойчивости этих моделей могут быть совершенно различны.

Рассмотрим в качестве первого примера устойчивость равновесия усеченной изотермической сферы. Пусть эта сфера окружена упругой стенкой, способной передавать давление остающегося извне вещества, если бы оно там действительно оставалось. Сфера эта находится также в температурном равновесии с тепловым резервуаром. Хотя такой пример подходит для иллюстрации скорее внутренней неустойчивости и фрагментации изотермического газового облака, из которого образуются звезды, чем изолированного шарового скопления, тем не менее он хорошо показывает существо проблемы. Это существо состоит в том, что устойчивость определяется глобальной термодинамикой (Bonnor, 1956, 1958).

Глобальная гравитационная термодинамика отличается от локальной, изученной в ч. II. Уравнение состояния, модифицированное с учетом гравитации, было там справедливо для локальных средних величин в бесконечной системе. Здесь же уравнение состояния «идеального газа»

$$P = \frac{kT\rho}{m} \quad (43.2)$$

предполагается локально справедливым для любой точки, находящейся в равновесии. Такое предположение разумно, ибо вблизи равновесия теорема вириала является хорошим приближением, и распределение скоростей близко к максвелловскому. Корреляции, которые могли бы видоизменить уравнение (43.2), пренебрежимо малы. Для сохранения равновесия граница конечного объема должна испытывать давление. Это давление зависит от полной гравитационной энергии всего объема. Его можно включить в уравнение состояния на границе. Это приводит к глобальному уравнению состояния, которое зависит от размеров и формы рассматриваемой области.

чтобы показать это, начнем со справедливого на границе (индекс 0) тождества

$$P_0 V_0 - N_0 k T_0 = P_0 \int_0^{V_0} dV - \frac{k T_0}{m} \int_0^{V_0} \rho dV. \quad (43.3)$$

Интегрируя по частям и подставляя (43.2), получаем

$$P_0 V_0 - N_0 k T_0 = \frac{k T_0}{m} \int V d\rho = \frac{4}{3} \pi \frac{k T_0}{m} \int_0^{r_0} r^3 \frac{d\rho}{dr} dr. \quad (43.4)$$

В последнем равенстве для простоты предполагается сферическая симметрия. Если бы гравитация была несущественной, то состояние равновесия характеризовалось бы постоянной плотностью, границы отсутствовали, и уравнение состояния идеального газа было бы применимо в любой точке системы. Это вновь привело бы нас к «обману Джинса», описанному в гл. 21. Поскольку в конечных равновесных системах существуют градиенты плотности, глобальное уравнение состояния (43.4) отличается от уравнения состояния идеального газа.

Чтобы закончить описание, найдем производную $d\rho/dr$ исходя из гидростатического уравнения (40.1) и уравнения Пуассона (40.2). В случае изотермической сферы независимо от того, состоит ли она из газа или звезд, эти уравнения приводят к уравнению (40.18). Очевидно, в этом случае решения глобального уравнения состояния $P_0(V_0)$ в аналитическом виде не существует, и оно должно быть найдено численным методом.

Если зависимость $P_0(V_0)$ найдена, характер устойчивости должен быть установлен исследованием производной $(\partial P_0/\partial V_0)_{N_0, T_0}$. Если ее значение отрицательно, это означает, что флуктуация, приводящая к увеличению объема, сопровождается уменьшением давления, а уменьшающая объем флуктуация увеличивает давление, так что система устойчива. С другой стороны, если $(\partial P_0/\partial V_0)_{N_0, T_0} > 0$, то движение стенки внутрь сферы приводит к уменьшению внутреннего давления, так что внешнее давление толкает стенку еще дальше внутрь, и происходит коллапс. В точке смены знака наклона разложение в ряд Тейлора показывает, что $dP = 1/2(\partial^2 P/\partial V^2)_{N_0, T_0}(dV^2) + \dots$, и если вторая производная здесь отрицательна, то система неустойчива относительно сжатия.

На рис. 45 схематически представлено глобальное уравнение состояния для изотермической сферы. Здесь показана последовательность систем, находящихся при одной температуре T_0 , содержащих одинаковое полное число частиц N_0 , но имеющих различную центральную плотность. (Это не есть последовательность, полученная усечением одной и той же сферы при разных радиусах.) Если N_0 частиц помещены в большой объем, их взаимная гравитационная связь становится слабее и $P_0 V_0 \rightarrow N_0 k T_0$. Такие изотермические сферы устойчивы. Если же N_0 частиц помещаются во все меньший объем, их гравитационная энергия становится все значительней до тех пор, пока в точке максимума кривая не входит в ту область, где системы становятся неустойчивы.

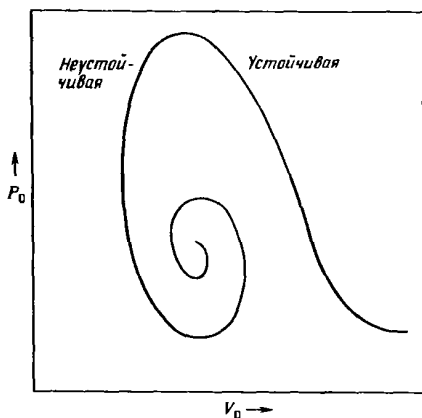


Рис. 45. Схематическая иллюстрация функции $P_0(V_0)$ для последовательности изотермических сфер с фиксированными N_0 и T_0 , но разными значениями центральной плотности.

ми. Численные расчеты (Bonnor, 1956) показывают, что неустойчивость наступает при критическом радиусе

$$r_c = 1,8 \left(\frac{kT}{mG\rho_c} \right)^{1/2}, \quad (43.5)$$

где ρ_c — центральная плотность. Для сравнения отметим, что эта величина вдвое превышает длину Джинса в сфере с однородной плотностью. В критической точке отношение массы к радиусу имеет вид: $M(r_c)/r_c = 2,4 kT/mG$. Радиус сфер, расположенных на кривой между максимумом $\dot{P}_0(V_0)$ и особой точкой в центре спирали, превосходит критический радиус r_c , так что сферы эти внутренне неустойчивы. Таким образом, влево от точки максимума не существует устойчивой равновесной конфигурации.

Аналогичным образом рассмотрение глобального уравнения состояния для усеченной изотермической сферы показывает, что при значении ее радиуса, равном r_c , вторая производная $(\partial^2 P/\partial V^2)_{N_0, T_0} < 0$. Таким образом, эта сфера неустойчива относительно глобальных флуктуаций, если ее радиус превосходит r_c . Это две стороны одного и того же физического явления: гравитационная энергия подавляет возрастание тепловой энергии, необходимой для того, чтобы уравновесить гидростатическое давление.

Идеи глобальной термодинамики можно также применить к теплоизолированным системам с заданными массой, полной энергией и объемом (Антоннов, 1962; Lynden-Bell and Wood, 1968; Thirring, 1970; Horwitz and Katz, 1978). Такие системы ближе к изолированным шаровым скоплениям — элементам

микроканонического ансамбля. Внутренняя гравитермическая устойчивость шарового скопления определяется его глобальной термодинамикой.

Рассмотрим теперь в качестве второго примера изотермическое распределение внутри непроницаемой нетеплопроводящей сферической оболочки, которая отражает все попадающие на нее звезды. Масса всех звезд считается одинаковой. При каких условиях такие системы могут быть устойчивыми? Здесь мы также ограничимся описанием общих физических принципов, поскольку анализ может быть выполнен только численно. Устойчивость конечной изолированной гравитирующей системы зависит от соотношения между ее полной энергией и полной энтропией, которые являются глобальными характеристиками системы. Энтропия систем с одинаковой полной энергией может быть различной в зависимости от размеров и внутреннего распределения в системе. Если при фиксированной энергии энтропия имеет локальный максимум, то соответствующая конфигурация является устойчивой относительно малых флуктуаций (но, возможно, метастабильной относительно больших изменений параметров). Если же энтропия не имеет локального максимума, то произойдет самопроизвольное перераспределение структуры системы в сторону возрастания энтропии; такое состояние неустойчиво.

Таким образом, нам необходимо рассчитать названные термодинамические величины для изотермической системы в изолирующей оболочке. Полную энергию можно найти с помощью теоремы вириала из гл. 9. Однако теперь нам придется учесть поверхностное давление на границе. Возвращаясь к уравнению (9.7), находим, что опущенный ранее член, ответственный за поверхностное давление, равен в точности $3P_0 V_0$. Теорема вириала в скалярной форме теперь принимает вид

$$2\mathcal{T} + W = 3P_0 V_0, \quad (43.6)$$

где $\mathcal{T}$ — полная кинетическая энергия, а W — полная потенциальная энергия. Полная энергия $E = \mathcal{T} + W$. Из закона равнораспределения $\mathcal{T} = 3NkT/2$, где T — температура. Таким образом, для полной энергии получаем

$$E = 3P_0 V_0 - \mathcal{T} = 3P_0 V_0 - \frac{3}{2}NkT, \quad (43.7)$$

а для потенциальной энергии —

$$W = 3P_0 V_0 - 3NkT. \quad (43.8)$$

Заметим сходство этого выражения с формулой (43.4), которое состоит в том, что в отсутствие гравитации глобальная термодинамика превратилась бы в локальную термодинамику идеального газа. Энтропию найдем интегрированием по всему скоплению:

$$S = -k \int f \ln f d^3x d^3v. \quad (43.9)$$

Здесь одночастичная функция распределения f является функцией распределе-

ния Максвелла, записанной с учетом гравитационной потенциальной энергии. Тогда соотношения для изотермической сферы гл. 40 можно использовать для того, чтобы выразить E , M и S как функции радиуса R системы при любом равновесном изотермическом распределении. С помощью такого подхода удалось установить, что при фиксированной полной энергии локальных максимумов энтропии не существует, если радиус сферической оболочки удовлетворяет условию

$$R > 0,335 \frac{GM^2}{(-E)}. \quad (43.10)$$

Если радиус оболочки слишком велик, то слишком большой становится и разность плотностей в центре и на краях. Звезды во внешних областях больше не в состоянии поглотить всю энергию, которая переносится из центра, и система становится неустойчивой. Структура ядро — гало приобретает все более выраженный характер. Критическое отношение плотностей, соответствующее условию (43.10), составляет $\rho_{\text{центр}}/\rho_0 = 709$; это значение было впервые получено Антоновым. При такой, или большей разнице в плотности центр системы по существу не «чувствует» внешних частей скопления. Замена гало на вакуум не внесет заметных изменений в поведение центра. Высказанные здесь по поводу термодинамической неустойчивости соображения могут быть более строго сформулированы в рамках теории Пуанкаре для линейной последовательности равновесных состояний (Lynden-Bell and Wood, 1968; Katz, 1978, 1979).

Хотя приведенное выше общее термодинамическое рассмотрение показывает неустойчивость системы и заставляет следовать выводу, что она эволюционирует как система ядро — гало, это рассмотрение не позволяет получить сколько-нибудь точную информацию о ее дальнейшей эволюции. В принципе не исключено, что незначительное изменение в распределении плотности или в распределении скоростей способно привести к исчезновению неустойчивости. Наконец, исследовалась устойчивость только одного, очень ограниченного класса изотермических состояний. Могут существовать и другие, отличные от изотермических последовательности равновесных состояний (простым примером являются политропы). Если одна кривая состояний неустойчива, система может перейти на другую, устойчивую кривую. С другой стороны, она может никогда больше не стать устойчивой. Ядро может само развиваться в гало и меньшее ядро, которое в свою очередь разовьется в гало и еще меньшее ядро и т. д.

Некоторые ответы на эти вопросы могут быть получены из сопоставления простых теоретических моделей и численного моделирования шаровых скоплений звезд. К такому рассмотрению мы и переходим в следующей главе.

44. ПЕРЕНОС В АВТОМОДЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ

Что до меня, то я пускаюсь в путешествие не для того, чтобы где-то оказаться, а чтобы просто двигаться. Путешествие — это и цель, и средство. Главное для меня — движение.

Р. Л. Стивенсон

Как и для Роберта Льюиса Стивенсона, движение — главное для звезды в скоплении. Мы хотим выяснить, каким образом эволюционирует распределение звезд при наступлении гравитермической неустойчивости. Некоторые из первых экспериментов по численному моделированию скоплений, содержащих 50 и более звезд (см., например, *Aarseth*, 1963), уже показали отчетливую тенденцию звездных систем к образованию трех ясно выраженных областей. Центральная область представляет собой ядро, близкое к изотермической сфере. По мере эволюции системы его радиус сокращается, а масса уменьшается. Средняя плотность его, однако, растет. Остающиеся в ядре звезды сильнее связываются друг с другом. За ядром следует гало. Оно содержит большую часть диффундирующих из ядра звезд. Численные модели сферических систем, в которых используются уравнения звездной гидродинамики (см. гл. 8), показывают, что, если масса всех звезд одинакова, распределение плотности в гало имеет степенной характер (*Larson*, 1970). Более точные модели с изотропным распределением скоростей, в которых используется уравнение Фоккера — Планка (см. гл. 4 и 5), подтверждают эту зависимость (см., например, *Cohn*, 1980). Плотность в гало $\rho \propto r^{-\alpha}$, где $2,1 \leq \alpha \leq 2,4$ в зависимости от разновидности модели. Ближе к внешнему краю гало можно различить зону испарения. Здесь плотность отклоняется от степенного закона и резко падает до нуля.

Модели, использующие уравнение Фоккера — Планка, показывают также, что эта тройная структура — ядро, гало, зона испарения — развивается под действием гравитермической неустойчивости. Изолированные скопления в противоположность заключенным в фиксированные оболочки лучше характеризует величина

$$x \equiv 3 \frac{[\phi(0) - E(r)]}{v_m^2(0)} = \frac{\phi(0) - E(r)}{kT}, \quad (44.1)$$

чем отношение плотности в центре к плотности на краю скопления. С физической точки зрения x представляет собой записанную в соответствующем масштабе энергию $E(r)$ звезды единичной массы, находящейся на расстоянии r от центра. Гравитационный потенциал и дисперсия скоростей в центре равны соответственно $\phi(0)$ и $v_m^2(0)$. Таким образом, нормированная функция распределения Максвелла $f_M(x) = \exp(-x)$. В ходе эволюции скопления величины $\phi(0)$ и $v_m^2(0)$ изменяются. Безразмерная энергия убегания $x(E=0) \equiv x_{\text{убег}}$ возрастает (по абсолютной величине) приблизительно по линейному закону при-

мерно от -5 до -10 в течение времени, приблизительно в десять раз превышающего время релаксации. На этом временном отрезке эволюция системы достаточно хорошо описывается последовательностью моделей, близких к изотермической, в которых используется функция $f_M(x)$ (см. гл. 40). Однако при достижении величиной $x_{\text{убег}}$ значения около -10 происходит внезапное перераспределение. Менее чем за одно характерное время релаксации $x_{\text{убег}}$ возрастает (по абсолютной величине) примерно на 50%. Затем ее рост заметно замедляется. Эта перестройка системы ядро — гало происходит при значении $x_{\text{убег}}$, соответствующем максимуму энтропии изотермической последовательности состояний при фиксированных значениях полной энергии и массы. Вблизи этого значения $x_{\text{убег}}$ полная энтропия в соответствующих фоккер-планковских моделях также заметно возрастает, достигая после структурного перехода в этих моделях нового максимума.

Теперь можно понять, почему распределение плотности в гало подчиняется степенному закону. Образованное в результате структурного преобразования изотермическое ядро продолжает сжиматься, тогда как скопление проходит иную последовательность состояний, чем перед возникновением гравитермической неустойчивости. Прежде последовательность была изотермической, а теперь это последовательность, соответствующая развитию системы ядро — гало. Ядро сжимается — возникает гало, новое ядро сжимается — возникает новое гало и т. д. На каждой ступени этого процесса существует только одна фундаментальная характерная длина, которая может служить масштабом соответствующих физических явлений. Эта длина $L = GM^2/(-E)$ относится ко всему ядру, поскольку M и E — его полные масса и энергия. В любой данный момент времени радиус ядра входит множителем в выражение для L : $r_c = r_c(t) = a(t)L$. Поскольку любая часть гало возникает в результате предшествующего сжатия ядра, можно считать, что структура гало всюду одинакова. Здесь мы должны предположить, что скорость эволюции гало ниже скорости эволюции ядра, и, поскольку величина τ_R в гало больше, такое предположение выглядит разумным. Таким образом, внутри гало не существует никакого характерного масштаба, и отношение $\rho(\lambda r)/\rho(r)$ не зависит от радиуса r . В начале гл. 32 было показано, что это условие приводит к степенной форме зависимости $\rho(r)$. Такой тип структуры называется автомодельным, или гомологическим. Ее масштаб может быть разным, но функциональная форма всегда одинакова.

Посмотрим, какой смысл содержится в подобном решении (*Lynden-Bell and Eggleton*, 1980), ибо оно хорошо согласуется с численными моделями, по крайней мере при изотропном распределении скоростей. (Эффекты введения анизотропии представляют важный объект для дальнейшего изучения.) Кроме того, это решение очень полезно для понимания эволюции ядра.

В подобном решении любой пространственный масштаб можно сделать безразмерным, выразив его в единицах характерной длины, которую мы примем равной радиусу ядра:

$$r_* = \frac{r}{r_c(t)}. \quad (44.2)$$

Другие переменные также представляют собой произведение описывающего их эволюцию сомножителя, который зависит от времени, и сомножителя, описывающего их неизменную пространственную форму, который зависит от r . Таким образом, плотность в гало выразится в виде

$$\rho(r, t) = \rho_c(t) \rho_*(r_*). \quad (44.3)$$

где ρ_c — плотность в центре гало, т. е. на краю ядра.

Предположим, идеализируя ситуацию, что за пределами ядра время релаксации так велико, что гало не «чувствует разбедания» ядра. В этом случае плотность повсюду в гало постоянна во времени, и из выражений (44.2), (44.3) получаем

$$\dot{\rho}(r, t) = 0 = \dot{\rho}_c \rho_* - \frac{\dot{r}_c}{r_c} \rho_c r_* \rho'_*, \quad (44.4)$$

где штрихом обозначено дифференцирование по r_* . Если разделить это уравнение на $\rho_* \rho_c \dot{r}_c / r_c$, то независимые переменные разделятся, и каждый член уравнения будет равен постоянной, которую обозначим $-\alpha$. Решая получающиеся при этом простые дифференциальные уравнения, найдем, что

$$\rho_* = A r_*^{-\alpha} \quad (44.5)$$

внутри гало, и

$$\rho_c \propto r_c^{-\alpha} \quad (44.6)$$

на его границе. Последнее соотношение не зависит от r , поэтому оно справедливо и в формуле (44.3), в любой точке гало.

Пока ядро остается изотермическим, его гомологическая структура (отличная от структуры гало, см. разд. 40.1) сохраняется. Поэтому отдельные свойства ядра выражаются по мере его эволюции через одни и те же безразмерные числа, умноженные на переменные характеристики свойств. Его масса, например, всегда пропорциональна $\rho_c r_c^3$ с одним и тем же коэффициентом пропорциональности, ибо структура его остается неизменной. Таким образом, для ядра получаем

$$M_c \propto \rho_c r_c^3 \propto r_c^{3-\alpha}, \quad (44.7)$$

$$E_c \propto \frac{-GM_c^2}{r_c} \propto -r_c^{5-2\alpha} \propto -M_c^{(5-2\alpha)/(3-\alpha)}, \quad (44.8)$$

$$v_c^2 \propto \frac{GM_c}{r_c} \propto r_c^{2-\alpha}. \quad (44.9)$$

Уже эти результаты позволяют делать разумные предположения о возможных значениях α . Предположим, что ядро в ходе своей эволюции проходит ряд квазистатических состояний, для каждого из которых приблизительно

выполняется теорема вириала. Сама эволюция происходит благодаря тому, что звезды с более высокой полной энергией покидают ядро, которое, как описывалось выше, становится все горячее. Поэтому по мере сжатия ядра дисперсия скоростей внутри него возрастает и, как следует из соотношения (44.9), $\alpha > 2$. В предельном случае $\alpha = 2$ градиент плотности внутри гало был бы изотермическим и поток энергии начал бы направляться обратно к ядру, чего, как мы знаем, не происходит. Из уравнения (44.8) заключаем, что если абсолютная величина энергии ядра при его сжатии должна уменьшаться, то $\alpha < 2.5$, так что, очевидно, значение α заключено в пределах $2 < \alpha < 2.5$. Рассуждая более умозрительно, что фиксированное уменьшение r_c приводит к максимальному относительному росту как энергии E_c , так и температуры $\propto v_c^2$, мы должны были бы взять значение $\alpha \approx 2.25$, т. е. посередине этого интервала. Это значение согласуется с фоккер-планковскими моделями в пределах приблизительно двух процентов.

Чтобы оценить в гомологическом решении зависимость $r_c(t)$ от времени, вспомним, что τ_R определяет характерный масштаб времени [уравнение (2.9)]. Это время является характерным для относительных изменений всех описывающих гомологическую систему величин. В частности, для радиуса ядра будем иметь

$$-\frac{1}{r_c} \frac{dr_c}{dt} \propto \frac{1}{\tau_R} \propto \frac{\rho_c}{v_c^3}. \quad (44.10)$$

Здесь мы использовали уравнение (2.9), пренебрегая несущественной зависимостью $\lg N$ от времени, обусловленной уходом звезд из ядра (такое приближение, как и другие приближения этой модели, перестает быть справедливым при $N \leq 10^2$). Из соотношений (44.6)—(44.9) видно, что в аналогичных (44.10) соотношениях для других физических величин меняется только коэффициент пропорциональности. Объяснение состоит в том, что в гомологическом решении все безразмерные величины типа $\tau_R \dot{r}/r$, которые не зависят от каких бы то ни было масштабов системы, являются постоянными.

Подставляя соотношения (44.6) и (44.9) в (44.10) и интегрируя, получаем (при $\alpha \neq 6$)

$$r_c \propto (t_0 - t)^{2/(6-\alpha)}. \quad (44.11)$$

Зависимость от времени других физических величин из соотношений (44.6)—(44.9) выразится следующим образом:

$$\rho_c \propto (t_0 - t)^{2\alpha/(6-\alpha)}, \quad (44.12)$$

$$M_c \propto (t_0 - t)^{(6-2\alpha)/(6-\alpha)}, \quad (44.13)$$

$$E_c \propto (t_0 - t)^{2(5-2\alpha)/(6-\alpha)}, \quad (44.14)$$

$$v_c^2 \propto (t_0 - t)^{2(2-\alpha)/(6-\alpha)}. \quad (44.15)$$

Формально при $t \rightarrow t_0$ ядро становится исчезающе малой областью с чрезвычайно высокой плотностью, но без массы и без полной энергии. В действи-

тельности в этом случае, как известно, наши предположения перестают быть применимыми и уступают место задаче нескольких тел. Гомологическое решение указывает лишь направление эволюции.

В гомологической фазе эволюция скопления имеет настолько правильный и гладкий характер, что возникает мысль о ее сходстве с эволюцией звезды. И в том и в другом случае эволюция проходит через ряд последовательных квазистатических состояний. Эволюция звезды определяется переносом тепла и излучения от ядра к внешнему вакууму. Эволюция скопления определяется переходом горячих звезд из ядра в гало. В обоих случаях последующее гравитационное сжатие является основным источником тепла, хотя в звездах роль главного усилителя этой энергии играют термоядерные реакции.

Приближенные модели эволюции звездных скоплений действительно могут быть построены по аналогии с эволюцией звезд (*Hachisu et al.*, 1978; *Lynden-Bell and Eggleton*, 1980; *Sugimoto et al.*, 1981). Начинать следует с уравнений звездной гидродинамики, которые являются моментами бесстолкновительного уравнения Больцмана (гл. 8). Разделим сначала скопление на оболочки, каждая из которых характеризуется массой и определенным расстоянием от центра. Поскольку эти оболочки находятся в состоянии, очень близком к гидростатическому равновесию, первые два члена уравнения (8.20) обращаются в нуль, и уравнение гидростатического равновесия в сферических координатах

$$\frac{\partial P}{\partial r} = nF_r = -\frac{GM(r)\rho}{r^2} \quad (44.16)$$

можно применить к данной оболочке. Масса, заключенная внутри оболочки, может быть найдена из закона сохранения массы, который в этих лагранжевых координатах имеет простой вид

$$\frac{\partial M(r)}{\partial r} = 4\pi r^2 \rho. \quad (44.17)$$

Изотропное локальное давление определяется из уравнения состояния «идеального газа»

$$P = \frac{kT\rho}{m} = \frac{\rho v^2}{3}, \quad (44.18)$$

где v — среднеквадратичная скорость в трехмерном пространстве. Итак, получено три уравнения для определения четырех переменных P , M , ρ и T . Замянуть систему — наиболее трудная часть задачи.

Подобная трудность, но в более принципиальном виде, уже встречалась нам в обсуждении после уравнения (8.20). Мы заметили там, что следующий момент более высокого порядка сводится к уравнению переноса энергии, а вблизи равновесия уравнение переноса энергии легко может быть получено с хорошей степенью точности из физических соображений. Направленный поток энергии представляется потоком F энергии через единицу площади в секунду.

В элементарной (феноменологической) теории теплопереноса этот поток пропорционален градиенту температуры: $F = -K \partial T / \partial r$ [см. уравнение (4.2)]. Знак минус показывает, что тепловой поток направлен в сторону, противоположную градиенту температуры, а K называется коэффициентом теплопроводности. Каждую секунду оболочка теряет часть полной энергии, равную своей светимости $L = 4\pi r^2 F$, что позволяет написать

$$\frac{L}{4\pi r^2} = -K \frac{\partial T}{\partial r}. \quad (44.19)$$

Таким образом, мы получили уравнение для T посредством введения величин L и K .

Закон сохранения энергии дает возможность замкнуть систему уравнений для термодинамических переменных, за исключением коэффициента K , который еще предстоит определить. В качестве уравнения сохранения энергии выступает первый закон термодинамики (29.10). Поскольку мы рассматриваем оболочку с постоянной величиной N (и M), при изменении объема этой оболочки химические силы не совершают никакой работы, так что уравнение (29.10) принимает вид

$$dU = dQ - PdV. \quad (44.20)$$

В системе, изменение которой происходит квазистатическим путем,

$$\frac{dU}{dt} = \frac{dQ}{dt} - P \frac{dV}{dt}. \quad (44.21)$$

Поскольку поток энергии из звезды равен ее светимости, $dL = dU/dt$. Теплота, уходящая из оболочки постоянной массы, связана с изменением температуры соотношением

$$\begin{aligned} dQ &= -N_{\text{обол}} d\left(\frac{3}{2}kT\right) = -M_{\text{обол}} d\left(\frac{3kT}{2m}\right) \\ &= -4\pi r^2 \rho dr d\left(\frac{1}{2}v^2\right). \end{aligned} \quad (44.22)$$

Поскольку постоянную массу оболочки можно выразить как $M_{\text{обол}} = \rho dV$, механическая работа, которую нужно совершить для изменения объема оболочки при постоянном давлении, составляет $P dV = PM_{\text{обол}}/\rho = = P 4\pi r^2 \rho dr / \rho$. Таким образом, уравнение (44.21) принимает вид

$$\frac{\partial L}{\partial r} = -4\pi r^2 \rho \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{v^2}{2} + P \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{1}{\rho} \right]_M \quad (44.23)$$

в лагранжевых координатах, связанных с данной оболочкой постоянной массы. Уравнения (44.16)–(44.19), а также уравнение (44.23), в котором квадратные скобки дополнены слагаемым, представляющим мощность термоядерных

реакций в оболочке, являются также основными уравнениями теории внутреннего строения звезд.

Обратимся теперь к коэффициенту теплопроводности K . Его определение — это вовсе не такая простая задача, как может показаться, ибо за простой формой этого коэффициента скрыты многие тонкости процессов переноса. Выбор K позволяет одним разом доопределить все уравнения моментов из гл. 8. Коэффициент K представляет собой феноменологическую величину, предназначенную для того, чтобы кратко обозначить наше незнание пути эволюции орбит. Для сохранения замкнутости системы уравнений можно предположить, что теплопроводность зависит только от величин P , ρ , M , L и T (или ν). Внутри звезды действуют три основных механизма теплопередачи: конвекция, излучение и теплопроводность. В звездном скоплении нет никаких полных аналогов хотя бы одному из этих механизмов! Конвекцию можно было бы уподобить когерентному крупномасштабному движению направленных потоков звезд. Такие потоки могут появляться в скоплениях в результате приливного взаимодействия, но в изолированных прорелаксировавших сферических скоплениях это представляется маловероятным. Ни в экспериментах по численному моделированию, ни в непосредственных наблюдениях конвекция звезд до сих пор еще никем детально не исследовалась. Процессы теплопроводности и излучения представимы сходным образом как диффузионные. При этом основное отличие переноса фотонов от переноса частиц выражается в форме коэффициента K .

Внутри звезды отклонение траекторий движения атомов, ответственное за диффузионное распространение тепла, является локальным явлением. Средняя длина свободного пробега атома между актами рассеяния на большие углы мала по сравнению с размерами звезды. Как было показано в гл. 2, аналогичное явление в звездных системах отсутствует. Поэтому нет никакой уверенности в том, что локальная «звездно-динамическая проводимость» сколь угодно существенна. Попытка такого описания тем не менее заманчива, и оно действительно оказывается довольно полезным. Основная предпосылка его применимости состоит в том, что уравнение теплового потока (44.19) по природе своей является феноменологическим, что позволяет нам видоизменять коэффициент K в соответствии с представлением о происходящих физических процессах.

Исходя из этого, замечаем, что размерность K можно представить как произведение размерностей постоянной Больцмана, обратного характерного времени и обратной характерной длины: $K \propto \tau^{-1} R^{-1}$. В основе характерной длины лежат градиент температуры и радиус рассматриваемой оболочки постоянной массы. В скоплении с автомоделной структурой обе эти величины должны быть связаны с единственной характерной длиной скопления: $R \approx \approx GM/v^2$. Характерным временем является характерное время диффузии из ядра звезд с высокой энергией, происходящей по мере накопления ими этой энергии в многочисленных актах рассеяния на малый угол. Таким временем должно быть время релаксации τ_R , описываемое соотношением (2.9). Итак, коэффициент K выразится следующим образом:

$$K = \frac{C\rho}{r}, \quad (44.24)$$

где в постоянную C входит очень медленно меняющийся сомножитель $\lg \Lambda$ из выражения для τ_R . Если отвлечься от безразмерной постоянной C (точное значение которой несущественно для многих задач), то можно утверждать, что мы получили замкнутую систему уравнений, необходимую для описания сферического звездного скопления.

Чтобы найти автомодельные решения для такого скопления, используем соотношения (44.2), (44.3) и аналогичные им формулы для переменных M , r и L . Для любой функции вида $M_*(M, t)$ справедливо равенство

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{M_*} = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_M + \left(\frac{\partial M}{\partial t}\right)_{M_*} \left(\frac{\partial}{\partial M}\right), \quad (44.25)$$

которое следует применить к производным в уравнении (44.23). Подстановка этих выражений в основные уравнения [(44.16)—(44.19), (44.23)], описывающие строение скопления, приводит к разделению их на члены, зависящие либо от t , либо от r_* . Это дает систему полных дифференциальных уравнений, содержащих постоянные интегрирования. Для заданных граничных условий эта система имеет решения только при определенных значениях постоянных интегрирования, которые играют роль собственных значений. Зависимость плотности от радиуса имеет степенной характер, причем показатель степени зависит от постоянных интегрирования, с помощью которых решается система. Таким образом, эти постоянные легко связываются с величиной α из соотношения (44.5). Численный анализ (Lynden-Bell and Eggleton, 1980) дает результат $\alpha = 2,21$, который хорошо согласуется с упомянутой ранее фоккер-планковской численной моделью Кона. Найденное значение α может быть использовано для определения временных зависимостей (44.11)—(44.15). Несколько иные исходные предположения и значения теплопроводности могут изменить значение α на несколько процентов.

Этот общетеоретический подход, очевидно, очень полезен при описании длительного периода, в течение которого формируется гало первоначально изотермического звездного скопления. Вопрос о том, годится ли он для описания реальных скоплений нашей Вселенной, остается открытым. Времена релаксации в гало некоторых шаровых скоплений могут превосходить хаббловское время, и тогда шаровые скопления будут обладать хорошей памятью об условиях своего образования. Не могут ли гало таких скоплений, появившиеся, возможно, в результате бурной релаксации, отличаться от своей структуре от гало, образовавшихся в ходе сжатия изотермического ядра? Ответ на эти вопросы — еще один ключ к пониманию происхождения гало, если только мы сумеем найти его.

Этот поиск затрудняется целым рядом других процессов, влияющих на развитие реальных скоплений. На гало воздействует испарение звезд из внешних частей скопления. Не все звезды в скоплении имеют одинаковую массу,

поэтому взаимодействие и эволюция групп звезд с различными массами будут происходить по-разному. Движение больших масс внутри скопления, будь то движение групп звезд в ходе сегрегации или движение газа, приведет к изменению орбит других членов скопления. Может происходить и образование двойных звезд, которые окажутся новым источником динамической энергии в скоплении. Элементарное исследование этих дополнительных аспектов мы начинаем в следующих главах.

45. ИСПАРЕНИЕ И УБЕГАНИЕ

Цепь и оковы, и крепость из камня,
Все было тщетно — узник сбежал!
Всем вам назло — он свободен, свободен!

Гилберт и Салливан

По мере эволюции скоплений некоторые из их членов приобретают кинетическую энергию, достаточную для убегания из системы. Полная энергия сохраняется, поэтому любое убегание сопровождается перераспределением оставшихся звезд. Если в результате этого перераспределения последующее убегание оказывается более легким, то неустойчивость может нарастать. В конечном счете первоначальная система может неузнаваемо рассеяться, а ее гравитационная потенциальная энергия перейти в одну-единственную тесную двойную звезду. Легко показать, что если двойная теряет большую часть своей энергии вследствие гравитационного излучения, то образуется одна массивная звезда.

Установить критерий убегания звезд легко [см. формулу (40.56)]

$$E_{\text{убег}}(r) = \frac{1}{2}mv_{\text{убег}}^2 - m\phi(r) > 0. \quad (45.1)$$

Однако рассчитать темп, с которым убегаящие звезды уносят из скопления массу и энергию, гораздо труднее. Имеются только очень приближенные теории этого процесса. Численные эксперименты показывают, что эти теории дают результаты приемлемые только по порядку величины, изредка — с точностью до двойки или тройки, причем степень подгонки не регулируется. Причина этой трудности заключается в разнообразии и сложности процессов переноса энергии, приводящих к убеганию. Вот некоторые из таких процессов, имеющих место в изолированных системах: а) взаимодействие нескольких несвязанных звезд; б) выброс звезды поля в результате взаимодействия с двойной звездой; в) гравитационный «рогаточный» выброс одного из членов связанной тройной или кратной системы; г) замещение звездой поля одного из членов двойной звезды с последующим его выбросом; д) бурная релаксация на стадии образования системы; е) рассеяние орбит звезд гало сконденсировавшимся ядром системы; ж) диффузия к большим скоростям, обусловленная множеством малых обменов импульсом. В реальных скоплениях дополнительными факторами, приводящими к убеганию, являются следующие: з) действие

приливных сил со стороны галактики или других скоплений; и) вращение скопления, испытывающего приливное взаимодействие; к) возмущение скоростей, обусловленное взаимодействием с массивными газовыми облаками, находящимися внутри скопления или проходящими через него; л) вспышка одного из членов двойной или тройной группы как сверхновой; м) гравитационный удар при прохождении скопления через неоднородность (например, плоскость) галактики. Все перечисленные процессы могут в той или иной степени происходить в разных частях скопления и с различными значениями $v_{\text{убег}}$. В этом и состоит основная трудность.

Оказалось, что в случае изолированных скоплений только последний из указанных процессов — диффузия скоростей — поддается описанию в рамках простой теории. Однако и здесь вскоре обнаруживается неясность. В гл. 2 и 3 было показано, как кумулятивные эффекты многих далеких гравитационных сближений приводят к релаксации распределения скоростей звезд в скоплении к виду, близкому к максвелловскому, а в гл. 40 описаны получающиеся при этом квазиравновесные модели скоплений. Характерным для этих моделей является процесс убегания звезд, находящихся в высокоэнергичном хвосте распределения скоростей. Этот процесс по аналогии с газообразными системами называется испарением. Попробуем теперь выяснить, как скопление реагирует на испарение посредством изменения своей структуры.

Сначала нужно оценить число испаряющихся звезд. Это, по-видимому, сделать нетрудно. Нужно только рассчитать $v_{\text{убег}}(r)$ и проинтегрировать распределение скоростей от $v_{\text{убег}}$ до бесконечности в каждой точке скопления. Чтобы еще больше упростить задачу, для аналитической иллюстрации рассмотрим однородное скопление. Ему будет присуща некоторая среднеквадратичная скорость убегания, отличающаяся от среднеквадратичной скорости на множитель γ порядка единицы:

$$\langle v_{\text{убег}}^2 \rangle = \gamma^2 \langle v^2 \rangle. \quad (45.2)$$

Один из часто используемых методов определения γ состоит в применении теоремы вириала в виде $\langle v^2 \rangle = GM/2R_h = \langle \phi \rangle / 2$, где R_h — радиус области, внутри которой заключена половина массы скопления. Этот радиус в конечном счете можно найти точно в отличие от полного радиуса далеко прорелаксировавшего скопления. Множитель двойка слабо зависит от деталей строения скопления. С учетом этого соотношения из (45.1) получим $\langle v_{\text{убег}}^2 \rangle = 2\langle \phi \rangle$ и $\gamma = 2$.

Интегрируя далее по трехмерному максвелловскому распределению скоростей, получаем, что доля звезд, скорость которых более чем в два раза превышает среднеквадратичную скорость, составляет $7,4 \cdot 10^{-3}$. Пополнение этого высокоэнергетичного хвоста вследствие процесса релаксации происходит за время $\sim \tau_R$. Величина τ_R также переменна по системе, но ее можно взять равной эффективному среднему значению $\tau_R(r = R_h)$. Это привносит еще один неопределенный множитель порядка единицы, который зависит от строения скопления. Предполагая, что звезды со скоростями, удовлетворяющими соотношению $v^2 > \langle v_{\text{убег}}^2 \rangle$, действительно убегают из системы, можем написать

$$\frac{1}{N} \frac{dN}{dt} = - \frac{\varepsilon}{\tau_R}, \quad (45.3)$$

где ε порядка 10^{-2} .

Дальнейшие рассуждения показывают, что эта простая на вид теория в действительности приводит к сомнительным результатам. В скоплении данного размера время релаксации звезды, имеющей скорость v , составляет $\tau_R \propto v^3/n$. При увеличении скорости звезды до величины $v_{\text{убег}}$ происходит следующее. Во-первых, приходящаяся на единицу реального времени вероятность того, что последующее далекое сближение приведет к дальнейшему увеличению скорости звезды, быстро уменьшается. Другими словами, каждое последующее столкновение оказывается менее эффективным. Во-вторых, столкновений становится все меньше и меньше, поскольку более энергичные звезды проводят все большее время на удаленных орбитах. В результате звезда достигает скорости убегания за счет этого процесса все медленнее. На самом деле она может и вовсе никогда не достигнуть этой скорости, а остаться в гало высокоэнергичных (т. е. обладающих приблизительно нулевой энергией) звезд, окружающих скопление.

На эти звезды гало могут воздействовать многие из перечисленных выше процессов, приводящих к убеганию из скопления. Однако, что касается эволюции самого ядра, то звезды, испарившиеся в гало, можно считать убежавшими, поскольку они редко возвращаются к ядру и оказывают на него возмущающее действие. Развивая нашу иллюстративную мысль, можно предположить, что испаряющиеся звезды не уносят из ядра энергию, поскольку их скорость приблизительно равна скорости убегания, или несколько меньше. Тогда, если ядро эволюционирует через ряд последовательных квазистационарных состояний, находящихся в вириальном равновесии, то его полная энергия, а также гравитационная потенциальная энергия остаются приблизительно постоянными. Отсюда следует $R \propto N^2$ и $\tau_R \propto v^3/n \propto v^3 R^3/N \propto N^{3/2} R^3/R^{3/2} N \propto N^{1/2}$. С помощью этого соотношения мы можем проинтегрировать уравнение (45.3), в результате чего получим

$$\frac{N}{N_0} = \left(1 - \frac{t}{t_{\text{испар}}} \right)^{2^7}, \quad (45.4)$$

где индекс «0» означает величину N в начальный момент времени $t_0 = 0$. Характерное время полного испарения ядра в результате этого диффузионного процесса равно

$$t_{\text{испар}} = \frac{2}{7\varepsilon} \tau_{R0}. \quad (45.5)$$

Оно примерно на порядок больше начального времени релаксации.

Используя соотношения пропорциональности между величинами R , ρ и (v^2) , легко показать, что их изменение пропорционально величине в скобках в соотношении (45.4), возведенной в степень $1/4$, $-1/4$ и $-3/4$ соответственно. Именно этого результата следовало ожидать из гомологических соотношений

(44.11)—(44.15) в случае $\alpha = 2,5$, когда $E_c = \text{const}$. Структуру простого испаряющегося гало можно получить из тех же основных соображений подобия, которые описывают гравитермическое сжатие. Оба этих процесса представляют собой проявления одной и той же фундаментальной гравитационной неустойчивости системы многих тел, но отличаются различными характерными временами и граничными условиями.

Этот взгляд на образование гало, более близкий к кинетическому подходу, позволяет лучше понять суть характерного времени $t_{\text{испар}}$ через посредство оценки ε . В численных экспериментах, моделирующих изолированные системы с большим N (см., например, *Spitzer and Thuan*, 1972), эффективное значение ε может быть использовано для параметризации. Эти эксперименты показали, что на каждую реально убежавшую звезду приходится примерно две звезды, которые остались в гало. Если оба процесса рассматривать как испарение, то обычно получается значение $\varepsilon \approx 1 \cdot 10^{-2}$, в то время как для одних убегающих звезд $\varepsilon \approx 3 \cdot 10^{-3}$. На ранних стадиях эволюции скопления сжатие ядра определяется испарением и убеганием звезд. В дальнейшем контраст плотности в скоплении возрастает, и становится более важной внутренняя гравитермическая неустойчивость.

Многие звезды гало могут быть унесены приливными силами, действующими со стороны галактики или ближайшего скопления. Внешние приливные силы становятся более существенными по мере удаления звезды от центра скопления, которому она принадлежит. В конце концов она проходит через точку, в которой приливная сила превышает силу, связывающую звезду со скоплением. Из соотношения (1.4) видно, что это происходит при радиусе

$$R_1 \approx (M_{\text{скопл}} / M_{\text{внеш}})^{1/3}, \quad (45.6)$$

называемом приливным радиусом или пределом Роша. Важно помнить, что этот критерий является статическим, т. е. не принимает во внимание ни орбитальное движение звезды в скоплении, ни вращение скопления во внешнем поле. Например, при вращении скопления внутри галактики внешнее поле может изменяться приблизительно с тем же характерным временем, которое свойственно орбитальному движению звезды во внешнем гало. В результате звезду гало можно рассматривать в рамках ограниченной задачи трех тел: она является пробной частицей, обращающейся вокруг двух движущихся массивных частиц. Орбитальные резонансы, зависящие от точного распределения сил, могут предотвратить убегание звезды, даже если ее расстояние от центра превосходит $\sim R_1$. Это может привести к увеличению эффективного значения R_1 .

Анизотропия в распределении скоростей звезд гало также приводит к изменению эффективного приливного предела. Это особенно важно, если скопление вращается. Звезды, орбитальный момент импульса которых направлен в ту же сторону, что и момент импульса, обусловленный вращением скопления, могут легче покинуть скопление, чем звезды, находящиеся на обратных орбитах. Следовательно, приливные силы сами по себе способствуют росту анизотропии скоростей в гало. Ясно, что приливное ограничение следует вычислять

для каждого отдельного случая, хотя по порядку величины соотношение (45.6) дает общий результат.

Некоторые звезды покидают изолированное скопление со скоростью, намного превышающей $v_{\text{убег}}$. Такие убегания почти всегда являются результатом тесного сближения с другой звездой. Идеализированная теория таких убеганий, даже для одного тесного сближения (Hénon, 1969), очень сложна. Ее анализ сильно зависит от распределения звезд по массам. В результате большая часть наших сведений о быстрых убеганиях следует из прямых численных экспериментов со скоплениями, содержащими несколько сотен звезд (Aarseth, 1974). Получено несколько «эмпирических правил», помогающих ориентироваться в результатах этих экспериментов:

1. Если для группы N_i звезд массы m_i определить относительный темп убегания звезд за время пересечения L_i выражением

$$\frac{\Delta N_i(m_i)}{N_i(m_i)} = L_i \frac{t}{t_{\text{ст}}}, \quad (45.7)$$

то численные эксперименты дают его значение $L_i \approx 10^{-3}$. Эта величина может меняться приблизительно в 2 раза в зависимости от строения скопления и начальных условий.

2. Большая часть убеганий является результатом тесных сближений, включая сближения с временно связанными парами.

3. Как оказалось, относительный темп убегания L_i зависит от массы m_i незначительно, за исключением очень массивных звезд, которые убегают реже.

4. Отношение избыточной энергии убегания к средней энергии $v_\infty^2 / \langle v^2 \rangle$ обычно составляет от 0,1 до 1,0, причем среднее значение для типичного выброса приблизительно равно 0,5.

5. В системах с разбросом масс за время, приблизительно в 30 раз превышающее начальное время пересечения, убегает примерно 5% полной массы. В системах, состоящих из звезд равной массы, полная масса убежавших звезд составляет 2/3 этой величины.

6. На стадии начального бурного коллапса системы убегания относительно немногочисленны ($\leq 10\%$). Многие из них происходят по истечении первых нескольких времен пересечения, что связывают с начальной вспышкой образования двойных звезд.

7. Большая часть высокоэнергичных переходов, приводящих к убеганию, происходит в ядре скопления. В некоторых случаях в выбросе звезд из системы особую роль играет двойная массивная звезда.

Следует подчеркнуть, что эти эмпирические правила получены для систем, состоящих из нескольких сотен членов. Тесные сближения могут быть менее важны в системах, скажем, с $N \geq 10^5$. К сожалению, по-видимому, не создано хорошо проверенной теории, описывающей переход между малыми и большими системами. Одна из трудностей заключается в том, что происходит сегрегация масс. Наличие центральной подсистемы массивных звезд может привести к тому, что большие скопления приобретут многие свойства малых, особенно если эти свойства связаны с убеганием звезд.

46. СЕГРЕГАЦИЯ МАСС И РАВНОРАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЭНЕРГИИ

Сегрегация масс была одним из первых значительных результатов численного моделирования скоплений, состоящих из нескольких десятков объектов. Она состоит в постепенном оседании более массивных звезд в центре скопления, что приводит к возрастанию их отрицательной энергии связи. При этом более легкие звезды, обладающие меньшей массой, преимущественно уходят в гало, а их энергия связи уменьшается. Позже такие же тенденции были обнаружены в результате прямого интегрирования в случае систем, насчитывающих многие сотни звезд, а также применения моделей, в которых уравнение Фоккера — Планка интегрировалось уже для многих тысяч звезд.

Такого поведения следует ожидать, исходя из основных свойств медленной релаксации, происходящей в результате парных столкновений. Уравнение (14.65) показывает, что характерное время, за которое энергия массивной звезды массы M_0 существенно уменьшается вследствие динамического трения, меньше характерного времени релаксации τ_R более легких звезд массы m (движущихся с той же скоростью) на множитель m/M_0 . По мере того как массивные звезды во внешних частях скопления отдают свою энергию более легким, происходит их «падение» в направлении центра скопления и возрастание их скорости. Постепенно массивные звезды теряют кинетическую энергию, приобретенную в ходе падения, и это падение продолжается. С другой стороны, средняя полная энергия легких звезд возрастает и они перемещаются в гало. По мере того как легкие звезды движутся к внешней границе скопления, скорость их падает, что приводит к изменению локального времени релаксации остающихся массивных звезд. Поэтому результирующей релаксации каждой отдельной звезды соответствует усредненное по орбите время τ_R .

Может ли наступить конец сегрегации масс? Достигнет ли система когда-нибудь равновесия? Чтобы это произошло, массивные звезды должны приобретать энергию от флуктуирующего гравитационного поля с той же скоростью, с какой они теряют ее вследствие динамического трения. Это означает выполнение двух условий: механического равновесия, при котором справедлива скалярная теорема вириала (9.30), $2\langle T \rangle + \langle W \rangle = 0$, и теплового равновесия, предполагающего равномерное распределение энергии по компонентам различной массы m_α :

$$m_\alpha \langle v_\alpha^2 \rangle = 3kT. \quad (46.1)$$

Все компоненты должны иметь одну и ту же температуру, поэтому энергообмен между различными компонентами отсутствует. Это означает, что наш первоначальный вопрос эквивалентен вопросу о том, совместимы ли в гравитирующих системах равномерное распределение и теорема вириала.

Несмотря на то что теорема вириала была выведена ранее для систем, все члены которых имеют одинаковую массу, результат может быть легко обобщен и на случай спектра масс. Производя свертку тензора вириальной потен-

пциальной энергии (9.9), получим гравитационную потенциальную энергию системы

$$W = -\frac{G}{2} \int \int \rho(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}') \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d\mathbf{x}' d\mathbf{x}. \quad (46.2)$$

Это в сущности более подробная форма записи формулы (43.1), необходимая для физической интерпретации. (Для удобства обозначения мы опустили угловые скобки, означающие усреднение по времени.) Если теперь число звезд массы m_α в единице объема составляет $n(\mathbf{x}, m_\alpha)$, то

$$\rho(\mathbf{x}) = \int m_\alpha n(\mathbf{x}, m_\alpha) dm_\alpha. \quad (46.3)$$

Дискретное распределение звезд по массам в спектре масс может быть отражено с помощью дельта-функций. Таким образом, выражение для потенциальной энергии приобретает вид

$$W = -\frac{G}{2} \int_{\mathbf{x}} \int_{\mathbf{x}'} \int_{m_\alpha} \int_{m_\beta} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} m_\alpha m_\beta n(\mathbf{x}, m_\alpha) n(\mathbf{x}', m_\beta) dm_\beta dm_\alpha d\mathbf{x}' d\mathbf{x} \quad (46.4)$$

и, как нетрудно заметить, становится симметричным по m_α и m_β , а также по $\mathbf{x}$ и $\mathbf{x}'$.

Чтобы совместить вириальное равновесие с равнораспределением, необходимо знать, каким образом дисперсия скоростей каждой компоненты массы связана с ее потенциальной энергией. Зафиксируем определенный диапазон изменения массы, или компоненту массы, введя для этого обозначение m_γ . Пусть

$$n(\mathbf{x}, m_\alpha) = n(\mathbf{x}, m_{\alpha \neq \gamma}) + n(\mathbf{x}, m_\gamma). \quad (46.5)$$

где

$$n(\mathbf{x}, m_\gamma) = n_\gamma(\mathbf{x}) \delta(m_\alpha - m_\gamma) \quad (46.6)$$

и при замене $\mathbf{x}$ на $\mathbf{x}'$ и α на β эти соотношения остаются справедливыми. При этом интеграл в соотношении (46.4) разбивается на сумму четырех интегралов, каждый из которых содержит одно из следующих четырех произведений:

$$n(\mathbf{x}, m_{\alpha \neq \gamma}) n(\mathbf{x}', m_{\beta \neq \gamma}), \quad (46.7a)$$

$$n(\mathbf{x}, m_{\alpha \neq \gamma}) n(\mathbf{x}', m_\gamma), \quad (46.7б)$$

$$n(\mathbf{x}', m_{\beta \neq \gamma}) n(\mathbf{x}, m_\gamma), \quad (46.7в)$$

$$n(\mathbf{x}, m_\gamma) n(\mathbf{x}', m_\gamma). \quad (46.7г)$$

Из уравнения (9.5) видно, что внутренние интегралы по переменным m_β и $\mathbf{x}'$ в выражении (46.4) дают гравитационный потенциал $\phi(\mathbf{x})$. Из теоретической механики известно, что внутри сферической системы (или, в более общем слу-

чае, системы, составленной из однородных эллипсоидальных оболочек) результирующая сила, действующая со стороны оболочек с $x' > x$, равна нулю. Сила, действующая со стороны остальных оболочек, попадает в теорему вириала через уравнение (9.1). Поэтому постоянный потенциал при $x' > x$ не должен включаться в выражение для полного потенциала, которое, таким образом, приобретает вид

$$\phi(x) = \frac{GM(r)}{r}. \quad (46.8)$$

С учетом этого обстоятельства первый член выражения (46.6) выглядит следующим образом:

$$W(\alpha \neq \gamma, \beta \neq \gamma) = -\frac{G}{2} \int_{m_\alpha} \int_{\mathbf{r}} m_\alpha n(\mathbf{r}, m_{\alpha \neq \gamma}) \frac{M_{\neq \gamma}(r)}{r} d\mathbf{r} dm_\alpha. \quad (46.9)$$

Перед нами потенциальная энергия, полученная «построением» скопления путем переноса оболочек, содержащих все звезды, за исключением звезд массы m_γ , из бесконечности в потенциальное поле ранее перенесенных звезд, вновь за исключением звезд массы m_γ . (Каждая звезда включена как в $n(\mathbf{r})$, так и в $M(\mathbf{r})$, что компенсируется множителем $1/2$.) Таким образом, мы получили потенциальную энергию всех звезд, за исключением m_γ в поле всех остальных звезд, вновь за исключением m_γ . Аналогичным образом второй член в выражении (46.4)

$$W(\alpha \neq \gamma, \gamma) = -\frac{G}{2} \int_{m_\alpha} \int_{\mathbf{r}} m_\alpha n(\mathbf{r}, m_{\alpha \neq \gamma}) \frac{M_{= \gamma}(r)}{r} d\mathbf{r} dm_\alpha \quad (46.10)$$

представляет потенциальную энергию, полученную переносом звезд $m_{\alpha \neq \gamma}$ в скопление, в потенциальное поле звезд m_γ . Третий член

$$W(\gamma, \alpha \neq \gamma) = -\frac{G}{2} \int_{\mathbf{r}} m_\gamma n_\gamma(r) \frac{M_{\alpha \neq \gamma}(r)}{r} d\mathbf{r} \quad (46.11)$$

представляет потенциальную энергию, полученную переносом звезд m_γ в потенциальное поле всех других звезд. (Напомним, что β — это лишь условное обозначение, которое после выполнения интегрирования может быть заменено на α .) Наконец, четвертый член

$$W(\gamma, \gamma) = -\frac{G}{2} \int_{\mathbf{r}} m_\gamma n_\gamma(r) \frac{M_{= \gamma}(r)}{r} d\mathbf{r} \quad (46.12)$$

— это энергия звезд m_γ в их собственном поле*.

* В уравнениях (46.9)—(46.12) подразумевается два члена, один из которых соответствует индексу α , а другой — индексу β . Это удваивает действительную величину W .

Разделяя кинетическую энергию на две части опять же в соответствии с равенством (46.5), получаем теорему вириала в следующем виде:

$$\int_{m_\alpha} \int_r m_\alpha n(r, m_\alpha) v_\alpha^2 dm_\alpha dr + m_\gamma N_\gamma v_\gamma^2 + W(\alpha \neq \gamma, \beta \neq \gamma) + W(\alpha \neq \gamma, \gamma) + W(\gamma, \alpha \neq \gamma) + W(\gamma, \gamma) = 0. \quad (46.13)$$

Как видно, если применять теорему вириала к каждой компоненте массы в отдельности, то удвоенную кинетическую энергию каждой звезды следует приравнять потенциальной энергии, которую она приобретает в результате переноса из бесконечности в скопление, содержащее все остальные звезды всех масс. Поэтому можно написать

$$m_\gamma N_\gamma v_\gamma^2 = -W(\gamma, \alpha \neq \gamma) - W(\gamma, \gamma) \quad (46.14)$$

и аналогичным образом приравнять удвоенную кинетическую энергию звезд всех остальных масс потенциальной энергии $-W(\alpha \neq \gamma, \beta \neq \gamma) - W(\alpha \neq \gamma, \gamma)$.

Обратимся теперь к условию равнораспределения. Из обсуждения, следующего за уравнением (45.2), ясно, что равнораспределение не распространяется на звезды с массой менее $1/4$ массы их соседей. Такие звезды должны убегать из скопления. Поэтому мы рассмотрим равнораспределение лишь среди остальных звезд. Равнораспределение в том виде, как оно выражено формулой (46.1), означает, что деленная на N_γ правая часть соотношения (46.14) является не зависящей от γ постоянной. Эту правую часть удобно преобразовать, написав

$$\begin{aligned} W_\gamma &\equiv -W(\gamma, \alpha \neq \gamma) - W(\gamma, \gamma) \\ &= 2\pi G \int_0^{m_0} \int_0^{R_0} \frac{m_\gamma n(r, m_\gamma)}{r} m N(r, m) r^2 dr dm \\ &= \frac{G}{2} \int_0^{m_0} \int_0^{R_0} \frac{m_\gamma}{r} \frac{\partial N(r, m_\gamma)}{\partial r} m N(r, m) dr dm. \end{aligned} \quad (46.15)$$

Здесь $N(r, m)$ — полное число звезд массы m внутри радиуса сферы r . Оно удовлетворяет условию

$$\frac{\partial N(r, m)}{\partial r} = 4\pi r^2 n(r, m) \quad (46.16)$$

при любом значении массы m . Интегрирование в соотношении (46.15) выполняется по всем звездам массы m , включая m_γ , от нуля до максимальной массы m_0 (необходимость в индексах массы α и β теперь отпадает). Скопление имеет радиус R_0 .

Чтобы упростить систему обозначений, величину W_γ можно сделать безразмерной, введя

$$x \equiv r/R_0 \quad \text{и} \quad y \equiv m/m_0 \quad (46.17)$$

и обозначив $N_\gamma \equiv N(1, y_\gamma)$. Условие равнораспределения после незначительного преобразования производных принимает в этом случае вид

$$0 = \frac{\partial}{\partial y_\gamma} \left(\frac{W_\gamma(x, y, y_\gamma)}{N(1, y_\gamma)} \right) = \int_0^1 \int_0^1 \frac{y}{x} \frac{N(x, y)}{N(1, y_\gamma)} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y_\gamma} \left\{ \frac{y_\gamma N(x, y_\gamma)}{N(1, y_\gamma)} \right\} dx dy. \quad (46.18)$$

Это основное уравнение, выражающее необходимое и достаточное условие глобального равнораспределения.

Может оказаться полезным и применение условия, которое было бы необходимым, но не достаточным, такое условие позволило бы узнать, возможно ли равнораспределение в случае того или иного конкретного распределения звезд по массам. Простое необходимое условие можно легко вывести из подынтегральной функции в уравнении (46.18). Сомножители, стоящие перед второй производной, всегда положительны. Поэтому, если интеграл равен нулю, вторая производная должна быть положительна для одних значений x и отрицательна для других и обращаться, таким образом, в нуль хотя бы для одного значения x . В этой точке x_0 величина в фигурных скобках должна быть независима от y_γ . Выполняя дифференцирование по x и используя условие (46.16) для всех значений y_γ , получаем

$$n(x_0, y_\gamma) = C(x_0) \frac{N(1, y_\gamma)}{y_\gamma}, \quad (46.19)$$

где $C(x_0)$ — функция, зависящая только от x_0 . Таким образом, должно существовать хотя бы одно значение x , при котором спектр масс локальной плотности числа звезд связан со спектром масс полного числа звезд соотношением (46.19). Другими словами, в каком-то месте скопления локальный спектр масс должен быть пропорционален глобальному спектру. Чем меньше масса звезды, тем большая часть от полного числа звезд этой массы должна находиться в x_0 . С физической точки зрения это означает, что изоляция более массивных звезд не может зайти так далеко, чтобы они образовали собственную самогравитирующую подсистему, которая эволюционировала бы независимо и не участвовала в равнораспределении энергии вместе с более легкими звездами.

Достаточным условием равнораспределения является выполнение всюду равенства

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y_\gamma} \left\{ \frac{y_\gamma N(x, y_\gamma)}{N(1, y_\gamma)} \right\} = 0. \quad (46.20)$$

Это равенство выражает также и необходимое условие реализации состояния, которое может быть названо «локальным равнораспределением» внутри каждой тонкой звездной оболочки скопления. Чтобы ответить на вопрос о существовании приемлемой функции распределения, удовлетворяющей этим условиям, проинтегрируем уравнение (46.20). Это простое дифференциальное уравнение гиперболического типа, характеристики которого представляют со-

бой прямые, параллельные осям x и y . Чтобы найти функцию $N(x, y_\gamma)$, можно определить ее значения вдоль двух пересекающихся характеристик, которые ограничивают интересующую нас область. Для этого было бы естественно определить функции $N(x, 1)$ и $N(1, y_\gamma)$ следующим образом: $N(x, 1)$ — полное число самых массивных звезд внутри сферы данного радиуса, $N(1, y_\gamma)$ — спектр масс полного числа звезд во всем скоплении. Общее решение уравнения (46.20) представляет собой равенство выражения в фигурных скобках сумме произвольной функции x и произвольной функции y_γ . С учетом определенных выше граничных условий получим

$$N(x, y_\gamma) = \frac{N(1, y_\gamma)}{y_\gamma} \left[\frac{N(x, 1)}{N(1, 1)} + y_\gamma - 1 \right] \quad (46.21)$$

для любых значений y_γ . [В формулах (46.19)—(46.21) мы могли бы опустить индекс γ , но оставили его во избежание возможных недоразумений.]

Может ли иметь такой вид реальное распределение? Нет, не может. Ибо при $x \rightarrow 0$ доля самых массивных звезд должна стремиться к нулю: $N(x, 1)/N(1, 1) \rightarrow 0$. Поскольку при этом $0 \leq y_\gamma \leq 1$, существует интервал значений массы, при которых $N(x, y_\gamma) < 0$, что по меньшей мере нефизично. Мы приходим к выводу, что локальное равнораспределение не может установиться во всей сферической гравитирующей системе. (Оно может, однако, установиться временно между отдельными компонентами масс в отдельных частях системы.)

Подробное изучение различных моделей скоплений дает возможность найти критерии равнораспределения для тех или иных частных случаев. Например, в первом обсуждении такого критерия (Spitzer, 1969) рассматривалось скопление, содержащее звезды только двух масс m_1 и m_2 , причем соблюдалось одно из следующих условий: 1) $m_2 > m_1$; 2) $M_2 \equiv m_2 N_2 \ll M_1$ и 3) массивные звезды уже достаточно сконцентрированы в центре, так что звезды массы m_1 , влияющие на их потенциальную энергию, могут быть представлены распределением $M_1(r) = 4\pi\rho_{01}r^3/3$, где ρ_{01} — центральная плотность. Равнораспределение невозможно при $M_2/M_1 > \beta(m_1/m_2)^{3/2}$, где β меньше единицы. Значение β до известной степени зависит от распределений плотности и скорости и при $m_2 \gg m_1$ составляет приблизительно 0,16.

Если этот критерий равнораспределения не выполняется, то взаимное притяжение массивных звезд становится столь сильным, что в ядре скопления они образуют высокотемпературную подсистему. Дисперсия скоростей, необходимая для поддержания такой подсистемы в состоянии вириального равновесия, соответствует температуре, превышающей температуру равнораспределения с участием легких звезд. Поэтому температурный градиент оказывается отличным от нуля, и энергия, которую легкие звезды получают из ядра системы, начинает превышать энергию, переносимую в обратном направлении. В результате подсистема массивных звезд сжимается еще больше.

Может показаться, что в общем случае гравитирующие системы не достигают состояния равнораспределения. Такие системы, однако, могут достигать

состояния механического равновесия, не требующего изотермического распределения (Merriitt, 1981; Katz and Taff, 1983). Обычно они неустойчивы; изучение их должно быть продолжено.

Если система не находится в состоянии теплового равновесия, естественно задаться вопросом, каково характерное время существенного изменения неравновесности. Такое изменение выражается в сегрегации масс. Поскольку энергообмен является по существу диффузионным процессом, следует ожидать, что это характерное время и здесь окажется порядка τ_R . Напомним, что для разных масс время τ_R неодинаково, так как оно пропорционально $1/m_\gamma$. Численное моделирование показывает, что именно так обстоит дело в случае систем с двумя или тремя компонентами массы. Такие системы приблизительно описываются феноменологическими уравнениями вида (Spitzer, 1975)

$$\frac{dE_1}{dt} = \frac{\Delta T_{12}}{\tau_R(1,2)}. \quad (46.22)$$

Здесь E_1 — средняя полная энергия массивных звезд, ΔT_{12} — разница в температуре (кинетической энергии) между двумя компонентами массы, а $\tau_R(1,2)$ — характерное время энергообмена [равное приблизительно времени релаксации (14.65)]. В случае большего числа компонент масс время энергообмена между ними выражено не так четко. Прямое численное интегрирование системы N тел в этом случае показывает, что выраженная сегрегация масс происходит в течение времени, в несколько раз превышающего динамическое время пересечения, но в этих численных экспериментах число N составляло всего несколько сотен и $\tau_{\text{пересеч}} \approx \tau_R$. Чтобы найти точный вид уравнения (46.22) для систем более общего вида, предстоит большая работа. Однако уже сейчас ясно, что системы, содержащие набор масс, будут эволюционировать значительно быстрее систем, содержащих одинаковые массы (Inagaki and Saslaw, 1985).

47. СЕГРЕГАЦИЯ ОРБИТ

То вверх — то вниз, то здесь — то там.
Потом — от вас, обратно к вам,
Движенья неразрывен круг:
В нем вы, и я, и все вокруг.

Гилберт и Салливан

Любой процесс, приводящий к перераспределению плотности гравитирующей системы, как, например, сегрегация масс, потеря массы, неустойчивость системы ядро — гало, приводит также и к сегрегации орбит. Первоначально сегрегация орбит вызывается изменениями в среднем гравитационном поле. Влияние этого поля на орбиты зависит от их эксцентриситета.

В шаровом скоплении, в частности, значение характерного времени перераспределения плотности, вызванного сегрегацией масс, заключено между значениями характерного динамического времени пересечения и характерного вре-

мени релаксации звезд средней массы. Поэтому орбиты средних и легких звезд претерпевают вековые изменения, которые определяются медленно меняющимся средним полем. (Мы выделяем такие изменения среднего поля, которые при усреднении их по орбитам приводят к сегрегации этих орбит; это означает, в частности, что мы не рассматриваем тесные сближения и динамическое трение в случае пробных звезд.) Мы рассмотрим для ясности крайние случаи эксцентриситета орбиты — круговую и прямолинейную радиальную орбиты. Пусть, как обычно, плотность скопления возрастает в направлении центра. Если бы скопление находилось в состоянии устойчивого равновесия, звезды с круговыми орбитами продолжали бы свое обращение по орбите, а звезды с радиальными орбитами — возвратно-поступательное движение через центр скопления; при этом и те и другие находились бы в равновесии со средним полем. Звезды с промежуточными значениями эксцентриситета, но с постоянным моментом импульса, двигались бы в общем случае по открытым орбитам с постоянной амплитудой.

Предположим теперь, что часть скопления начинает сжиматься с малой в масштабе характерного времени свободного падения скоростью. В общем случае сжатие не будет гомологическим, но оно усилит концентрацию массы в центре. Звезды, движущиеся по круговым орбитам вдоль границы скопления, не «почувствуют» никаких изменений, поскольку среднее поле является сферически-симметричным. Орбиты этих звезд остаются поэтому неизменными. Звезды на внутренних круговых орбитах «чувствуют» увеличение центральной массы. Эксцентриситет этих орбит возрастает, и они загибаются внутрь. Рассмотрим далее звезду на радиальной орбите, движущуюся в направлении центра. За время движения из точки максимального удаления в центр она получает дополнительное ускорение от движущейся внутрь массы. Поэтому через центр она пролетает со скоростью, превышающей равновесную. Эту дополнительную скорость она теряет во время движения из центра к границе скопления. Однако на этом интервале потеря скорости превысит ее предыдущий прирост, так как вклад в замедление звезды дает также дополнительная масса, движущаяся в центр скопления. В итоге происходит потеря кинетической энергии и уменьшение амплитуды орбиты. Таким образом, радиальные орбиты с начальной амплитудой, близкой к границе скопления, будут претерпевать сегрегацию относительно круговых орбит с такой же амплитудой, поскольку поле, воздействующее на орбиты этих двух типов, имеет разную временную зависимость. Сегрегация других орбит зависит от точного характера распределения плотности. Орбиты с промежуточными значениями эксцентриситета отличаются в общем случае более сложным поведением, особенно если эксцентриситет сам оказывается переменной во времени величиной.

Чтобы дополнить эту качественную картину количественным обоснованием, изучим радиальные орбиты, проходящие через центр скопления с нелинейным сферически-симметричным распределением плотности общего вида. В масштабе орбитального периода изменения распределения плотности происходят медленно.

Пусть начальный радиус скопления равен R_0 , плотность, взятая за основу сравнения, равна ρ_0 , а радиальная координата имеет вид $x = r/R_0$. Распределение плотности в скоплении может быть разложено в ряд:

$$\rho(x) = \rho_0 \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(t) x^n, \quad (47.1)$$

так что масса внутри сферы радиуса x составит

$$M(x) = 4\pi R_0^3 \rho_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n(t)}{n+3} x^{n+3}. \quad (47.2)$$

Коэффициенты $\alpha_n(t)$, описывающие внутреннее строение скопления, зависят от времени. Если в структурные коэффициенты включить зависимость от времени величин R_0 и ρ_0 , то эти величины можно рассматривать как постоянные. Радиальные орбиты подчиняются уравнению движения

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{n+3} x^{n+1}, \quad (47.3)$$

где обычное безразмерное время

$$\tau \equiv (4\pi G \rho_0)^{1/2} t. \quad (47.4)$$

Характерное время изменения структурных коэффициентов α_n велико по сравнению с периодом орбиты. Его можно выразить, представив α_n зависящими от «медленного времени» ζ , скорость течения которого меньше по порядку величины, чем скорость течения τ , т. е.

$$\zeta = \varepsilon \tau. \quad (47.5)$$

Итак, $\alpha_n = \alpha_n(\varepsilon \tau) = \alpha_n(\zeta)$. В общем случае координата объекта на орбите состоит из компонент, меняющихся в масштабе медленного времени ζ , и других компонент, меняющихся с более быстрым характерным временем, которое мы обозначим η . Время ζ может, например, применяться к вековым изменениям амплитуды орбиты, являющейся приближенно периодической с характерным временем η . Поэтому зависимость координаты от времени может быть записана в виде

$$x(\zeta, \eta) = x_0(\zeta, \eta) + \varepsilon x_1(\zeta, \eta) + O(\varepsilon^2). \quad (47.6)$$

Быстрое время η должно быть того же порядка, что и τ , но в общем случае не равно τ . Поэтому можно предположить, что эти две величины связаны дифференциальным соотношением вида

$$\frac{\partial \eta}{\partial \tau} = h(\zeta), \quad (47.7)$$

где $h(\zeta)$ — функция порядка единицы, принимающая лишь положительные значения. Поскольку мы рассматриваем лишь такие орбиты, которые остаются

ся связанными и при больших значениях τ , функция $h(\zeta)$ будет по-прежнему подчинена этому важному асимптотическому ограничению.

Подставляя соотношения (44.5)–(44.7) в (47.3) и приравнявая порознь коэффициенты при $O(1)$ и $O(\varepsilon)$, получаем

$$h^2(\zeta) \frac{\partial^2 x_0}{\partial \eta^2} + Q(\zeta, x_0) = 0, \quad (47.8)$$

$$h^2(\zeta) \frac{\partial^2 x_1}{\partial \eta^2} + \frac{\partial Q(\zeta, x_0)}{\partial x_0} x_1 = -2h(\zeta) \frac{\partial^2 x_0}{\partial \eta \partial \zeta} - \frac{\partial h}{\partial \zeta} \frac{\partial x_0}{\partial \eta}, \quad (47.9)$$

где

$$Q(\zeta, x_0) \equiv \sum_{n=-1}^{\infty} \frac{\alpha_n(\zeta)}{n+3} x_0^{n+1}. \quad (47.10)$$

С точностью до членов нулевого порядка орбита оказывается периодической; отклонения от периодичности появляются в первом порядке. Будем поэтому искать периодические решения $x_0(\zeta, \eta)$ общего вида

$$x_0(\zeta, \eta) = \sum_{k=0}^N A_k(\zeta) \cos k\eta. \quad (47.11)$$

(Фазу орбиты можно выбрать таким образом, что синусоидальные члены будут отсутствовать.) Подставляя это разложение в уравнение движения $d^2x/d\tau^2 = -Q(\zeta, x)$, разлагая Q в ряд Фурье по косинусам, приравнявая коэффициенты при одинаковых гармониках и удерживая члены по N -й порядок включительно, видим, что

$$-h^2 k^2 A_k + Q_k = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N, \quad (47.12)$$

где

$$Q_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi Q[\zeta, x_0(\zeta, \eta)] \cos k\eta d\eta. \quad (47.13)$$

Итак, мы получили систему из $N+1$ уравнений (47.12) для $N+2$ неизвестных $A_0, A_1, \dots, A_N, h$. Дополнительное ограничение, как уже упоминалось, обеспечивается требованием периодичности решения при $\tau \rightarrow \infty$. Чтобы в решении уравнения (47.9) для x_1 не появилось вековых членов и отношение x_1/x_0 оставалось ограниченным для любых значений времени, правая часть уравнения (47.9) должна быть ортогональна решению соответствующего однородного уравнения. Благодаря этому силовой член не разрушает периодическое решение. Решение соответствующего (47.9) однородного уравнения имеет вид: $x_1 = dx_0/d\eta$; это решение легко может быть получено дифференцирова-

нием уравнения (47.8). Итак, условие ортогональности имеет следующий вид:

$$\int_0^\pi \left(2h \frac{\partial^2 x_0}{\partial \eta \partial \zeta} + \frac{\partial h}{\partial \zeta} \frac{\partial x_0}{\partial \eta} \right) \frac{\partial x_0}{\partial \eta} d\eta = \frac{d}{d\zeta} \left[h \int_0^\pi \left(\frac{\partial x_0}{\partial \eta} \right)^2 d\eta \right] = 0. \quad (47.14)$$

Комбинируя его с разложением (47.11), получаем

$$h(\zeta) \sum_{k=0}^N k^2 A_k^2(\zeta) = C. \quad (47.15)$$

Постоянная C характеризует энергию орбиты. Другие постоянные интегрирования уравнения движения характеризуют фазу орбиты и были выбраны таким образом, чтобы в разложении Фурье (47.11) можно было обойтись одними косинусами.

Уравнения (47.12)—(47.15) дают общее решение для радиальных орбит в сферических системах с медленно меняющейся плотностью. Заметим, что решать уравнение (47.9) относительно x_1 необязательно, поскольку эта величина ограничена и дает лишь незначительную поправку порядка ε относительно x_0 к общему решению. Решение обычно даже проще, так как у большинства периодических орбит преобладает одна частота, так что $N \approx 1$. Кроме того, если амплитуда орбиты $A_1 = A$ при $\eta = 0$, а $N = 1$, причем распределение плотности таково, что $\alpha_n = 0$ при любом нечетном n , то решение, полученное с использованием соотношений (47.10)—(47.13) и формулы Уоллиса для интегралов, упрощается еще больше; в этом случае имеем

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0,2,4,\dots} \frac{\alpha_n(\zeta)}{n+3} \frac{\Gamma[(n+3)/2]}{\Gamma[(n+4)/2]} A^{n+4}(\zeta) = C^2, \quad (47.16)$$

$$h(\zeta) A^2(\zeta) = C, \quad (47.17)$$

где Γ — обычная гамма-функция. При таком определении C , связанном с видом орбиты и характером эволюции коэффициентов плотности, решение сводится к решению алгебраического уравнения порядка $(n+4)/2$.

Во многих случаях определение сегрегации орбит даже проще, так как нет необходимости получать решение этого алгебраического уравнения в явном виде. В качестве примера рассмотрим распределение плотности $\rho = \rho_0(\alpha_0 - \alpha_2 x^2)$, где все остальные коэффициенты $\alpha_n = 0$. Такое распределение напоминает ядро изотермической сферы [соотношения (40.7), (40.20)], радиус которого $x = (\alpha_0/\alpha_2)^{1/2}$. Оно может также характеризовать все (неустойчивое) скопление. Полная масса при таком распределении составляет

$$M = \frac{8}{15} \pi R_0^3 \rho_0 \alpha_0^{5/2} \alpha_2^{-3/2}. \quad (47.18)$$

Если полная масса остается постоянной или изменяется каким-либо заданным образом, то уравнение (47.18) связывает изменения коэффициентов α_0 и α_2

между собой. Эволюция амплитуды орбиты $A(\xi)$ задана при этом уравнением (47.16), в котором следует положить $n = 0$; 2 и которое таким образом превращается в кубическое.

Чтобы определить сегрегацию орбит, решать это кубическое уравнение в действительности необязательно. Нет необходимости и в определении величины S . Дифференцируя кубическое уравнение по ξ и находя постоянную полную массу с помощью (47.18), получаем

$$\left. \frac{d \ln A}{d \ln \alpha_2} \right|_{\text{рад}} = -\frac{3(4-3y)}{2(40-27y)}, \quad (47.19)$$

где

$$y(\xi) \equiv \frac{A^2(\xi)\alpha_2(\xi)}{\alpha_0(\xi)} \equiv \frac{A^2(\xi)}{\lambda^2(\xi)} \leq 1, \quad (47.20)$$

так как отношение $(\alpha_0/\alpha_2)^{1/2}$ является фактически характерной длиной, соответствующей квадратичному убыванию плотности. Так, возрастание α_2 сопровождается уменьшением характерной длины скопления, а также уменьшением, хотя и не гомологическим, амплитуды радиальных орбит.

Изменения круговых орбит легче поддаются вычислению, поскольку произведение радиуса на массу, заключенную внутри орбиты, является стандартным адиабатическим инвариантом (см., например, *Ландау и Лифшиц*, 1973). В частном случае использованного в этой главе общего разделения масштабов времени изменения адиабатических инвариантов будут иметь порядок величины ϵ^2 и выше. Итак, с учетом соотношения (47.2) получаем

$$\left. \frac{d \ln A}{d \ln \alpha_2} \right|_{\text{круг}} = -\frac{3(1-y)}{2(10-9y)}. \quad (47.21)$$

Читателю, возможно, захочется показать, что этот результат можно также получить непосредственно из условия сохранения момента импульса. Здесь мы опять имеем дело с негомологическим изменением радиуса орбиты, вызванным меняющимся распределением плотности. Круговые орбиты с параметром $y = 1$, расположенные в наиболее удаленной от центра части скопления, не меняются вовсе, поскольку не «чувствуют» изменений во внутреннем распределении.

С помощью уравнений (47.19) и (47.21) можно сравнить изменения радиальных и круговых орбит при одинаковых (или различных) значениях радиуса и в одних и тех же (или похожих) скоплениях. Для такого сравнения определим общий показатель сегрегации

$$S \equiv \frac{d \ln A|_{\text{круг}}}{d \ln A|_{\text{рад}}}. \quad (47.22)$$

При $S < 1$ радиальные орбиты стягиваются к центру быстрее, чем круговые. В качестве примера сравним круговую и радиальную орбиты одинаковой

амплитуды в одном и том же скоплении. Из соотношений (47.19)–(47.21) имеем

$$S = \frac{dA|_{\text{круг}}}{dA|_{\text{рад}}} = \frac{(40 - 27y)(1 - y)}{(4 - 3y)(10 - 9y)}. \quad (47.23)$$

Эта функция изображена на рис. 46. Сегрегация орбит зависит здесь только от квадрата отношения амплитуды к характерной длине. При $y \rightarrow 1$ получаем $S \rightarrow 0$, и радиальные орбиты стягиваются к центру быстрее. При $y \rightarrow 0$ сжатие становится гомологическим, $S \rightarrow 1$, и оба типа орбит стягиваются с одинаковой скоростью, как этого и следовало ожидать на основе физических соображений, изложенных в начале этой главы.

В общем случае следует ожидать, что орбиты с большим эксцентриситетом стягиваются к центру быстрее, чем орбиты с меньшим эксцентриситетом. Общее сжатие скопления стремится увеличить эксцентриситет внутренних орбит ($y < 1$), так как концентрация среднего поля при этом возрастает. Это происходит даже в случае гомологического коллапса и однородной плотности (Lecar, 1966). Усредненная по каждой из орбит центральная сила медленно растет во времени, приводя к загиганию орбит внутрь скопления, сопровождаемому росту эксцентриситета. Этот дополнительный эффект ведет к усилению сегрегации амплитуд орбит в зависимости от величины их эксцентриситета.

Таким образом, вызванная изменением среднего поля сегрегация орбит наряду с медленной релаксацией, тесными сближениями, гравитермической неустойчивостью, испарением и сегрегацией масс приводит к перераспределению орбит в галактических и звездных системах.

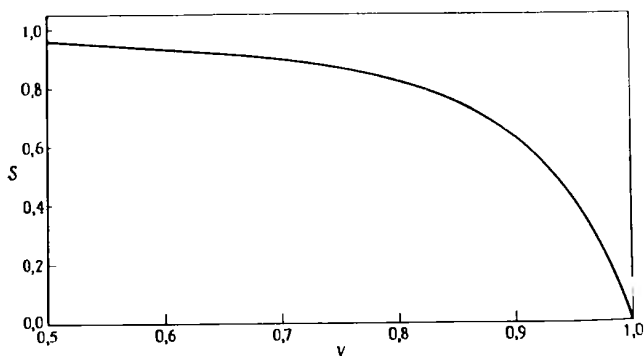


Рис. 46 Индекс сегрегации S для радиальных и круговых орбит при медленно меняющемся квадратичном распределении плотности. Сегрегация орбит происходит при $S(y) < 1$, где $y^{1/2}$ — отношение амплитуды орбиты к радиусу скопления.

48. ОБРАЗОВАНИЕ ДВОЙНЫХ ЗВЕЗД И ЭВОЛЮЦИЯ СКОПЛЕНИЙ

Двойные звезды в скоплениях играют роль источников и стоков энергии. В качестве стоков гравитационной потенциальной энергии они способны поглощать более половины полной энергии связи скопления. Как соответствующие источники кинетической энергии они вызывают разогрев скопления.

Как быстро происходит образование двойных? Насколько важным может быть их наличие? Соответствующая аналитическая теория, даже в тех приближениях, при которых она справедлива, исключительно сложна. Численное моделирование системы N тел является подчас единственным способом ответа на точные вопросы, особенно в случае широкого спектра масс. Тем не менее в этой области исследований получено много полезных результатов, некоторые из них описываются в данной главе. В ходе обсуждения образования двойных звезд в результате взаимодействия одиночных звезд мы рассмотрим, каким образом двойные звезды влияют на эволюцию скопления. С более общей точки зрения эти процессы могут рассматриваться как пример передачи энергии между различными уровнями иерархической структуры скопления.

48.1. ОБРАЗОВАНИЕ ДВОЙНЫХ ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ НЕСКОЛЬКИХ ТЕЛ

Двойные звезды, возможно, появляются непосредственно при образовании звезд и галактик. Мы не понимаем по-настоящему, как это образование происходит, и потому нам остается лишь ввести в скопление *ad hoc* такие начальные двойные, а затем изучать их эволюцию. Но даже если такие начальные двойные отсутствуют, несколько звезд с достаточно низкими относительными скоростями могут благодаря флуктуирующему гравитационному полю настолько сблизиться друг с другом, что окажутся временно связанными. Существование таких подскоплений обычно кратковременно, ибо последующие флуктуации могут сообщить им кинетическую энергию, достаточную для их распада. Однако орбиты подсистем, состоящих из нескольких тел, весьма сложны, и при благоприятном стечении обстоятельств могут возникнуть двойные звезды с такой сильной связью, что они окажутся способными противостоять разрушающему воздействию флуктуаций.

Ясно, что энергия связи такой остаточной двойной является ее самым важным свойством. Из решения задачи Кеплера в теоретической механике (см., например, Ландау и Лифшиц, 1973) известно, что энергия связи $E < 0$ связана с эксцентриситетом эллиптической орбиты соотношением

$$|E| = \frac{Gm_1 m_2}{2a} = \frac{Gm_1 m_2}{2p} (1 - e^2), \quad (48.1)$$

$$|E| = \frac{L^2}{2mb^2} = \frac{L^2}{2mp^2} (1 - e^2). \quad (48.2)$$

Здесь a и b — большая и малая полуоси эллипса, а $m = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ — приведенная масса. Кроме того, $L = m r^2 \dot{\phi}$ — постоянный полный момент импульса орбиты с эксцентриситетом e , которая определяется соотношением

$$\frac{p}{r} = 1 + e \cos \phi, \quad (48.3)$$

где $p \equiv L^2 / G m_1 m_2 m$ — параметр орбиты (половина хорды, проведенной через фокус эллипса параллельно его малой оси).

Энергию связи двойной звезды целесообразнее всего сравнить с тепловой энергией хаотического движения окружающих ее звезд поля. Чтобы получить представление о порядках соответствующих величин, рассмотрим двойные звезды четырех характерных размеров. Первым и наибольшим из таких размеров является размер R самой системы. Если бы двойная с большой полуосью $a \approx R$ могла существовать, то из соотношения (48.1) и примененной ко всему скоплению (со звездами приблизительно одинаковой массы) теоремы вириала следовало бы, что отношение энергии связи этой двойной к энергии связи всего скопления имеет порядок N^{-2} . Поэтому отношение энергии связи двойной звезды к кинетической энергии типичной одиночной звезды $|E|/kT$ составляет по порядку величины N^{-1} . Второй характерный размер получается, если предполагать, что большая полуось орбиты двойной звезды приблизительно равна среднему расстоянию между звездами в скоплении: $a \approx RN^{-1/3}$. В этом случае $|E|/kT \approx N^{-2/3}$. Для третьего характерного размера $|E|/kT \approx 1$. Это самый важный случай. Мы вернемся к нему после упоминания о четвертом размере, характеризующем двойную звезду с внутренней энергией, приблизительно равной энергии связи всего скопления. Для такой двойной с максимальной энергией связи $a/R \approx N^{-2}$. В типичном шаровом скоплении такая двойная звезда будет контактной.

Случай $|E|/kT \approx 3$ особенно важен, поскольку разграничивает жесткие и мягкие двойные звезды. Жесткие двойные с отношением $|E|/kT \gg 3$ стремятся отдать орбитальную кинетическую энергию своим одиночным соседям. В результате они сжимаются и становятся еще более жесткими. С другой стороны, мягкие двойные с отношением $|E|/kT \ll 3$ будут в общем случае получать кинетическую энергию от своих соседей и становиться менее связанными.

Основная причина этого явления состоит в том, что динамическое трение действует в направлении равномерного распределения кинетической энергии в системе, где все массы одинаковы. Чтобы понять эффект изменений энергии связи двойных звезд, полезно вспомнить об отрицательной удельной теплоемкости гравитирующих систем (см. гл. 43). Потеря кинетической энергии жесткими двойными приводит к их сжатию и разогреву. Те одиночные звезды, которые получают эту энергию, проводят в среднем больше времени во внешних частях скопления. Поэтому скопление испытывает расширение и охлаждение. Звезды, остающиеся поблизости от двойной, оказываются в среднем холоднее тех, которые получили от нее кинетическую энергию. Таким образом, отношение $|E|/3kT$, где через T обозначена локальная температура, возрастает, и жесткие двойные становятся еще более жесткими. С мягкими двойными звез-

дами происходит противоположный процесс. Итак, жесткое становится более жестким, мягкое — более мягким.

Поскольку критерий жесткости имеет такое фундаментальное значение, было бы интересно интерпретировать его несколько по-иному. Еще раз применяя к скоплению теорему вириала и используя приближительное равенство $|E| \approx 3kT$, получим, что размеры двойной звезды и скопления связаны соотношением

$$aN \approx 2R. \quad (48.4)$$

Другими словами, если бы все звезды в скоплении были двойными с переходной жесткостью, то, расположив их вплотную друг к другу, мы получили бы цепочку длиной приблизительно в диаметр скопления. Располагая все звезды трехмерного скопления вдоль его одномерного радиуса на равном расстоянии друг от друга (и сохраняя их тепловую энергию), мы сообщим каждой паре ближайших соседей переходную энергию двойной звезды. Этот критерий уже встречался нам раньше, так как a является также приближительным расстоянием, на котором происходит рассеяние на большие углы двух сближающихся звезд поля [см. соотношение (2.2)]. Он встретится нам еще раз при рассмотрении условий взрыва сталкивающихся звезд в очень плотных звездных системах.

Почти по определению полная энергия связи, заключенная в мягких двойных звездах, не может внести заметного вклада в общую динамику скопления. Однако влияние жестких двойных может быть очень сильным. Итак, следующий вопрос состоит в том, сколько жестких двойных образуется в системе при взаимодействиях нескольких тел.

Этот способ образования двойных требует по крайней мере сильного двойного столкновения, при котором третье тело может унести избыток энергии и импульса. Число парных сближений на единицу объема в секунду составляет $n^2\sigma v$, так что число сближений, происходящих во всем объеме скопления в течение времени релаксации τ_R составит $n^2\sigma v\tau_R(4\pi R^3/3) = n\sigma v\tau_R N$. Вероятность найти третье тело внутри того же объема сечений взаимодействия $\sim N(a/R)^3 \sim N\sigma^{3/2}R^{-3}$. Поэтому полное число тройных сближений, каждое из которых происходит в объеме $\sim \sigma^{3/2}$, во всем скоплении в течение одного времени релаксации оказывается порядка $n\sigma^{5/2}v\tau_R N^2R^{-3}$. Если мы предположим теперь, что каждое тройное сближение внутри сферы радиуса a , определяемого соотношением (48.4), приводит к образованию жесткой двойной, то, используя соотношение $\sigma \sim \pi a^2$ и выражение (2.9) для τ_R , а также теорему вириала в более точной для конечных скоплений форме $v^2 \approx GM/2R$, найдем, что число образующихся за время t жестких двойных звезд имеет порядок (Spitzer and Hart, 1971)

$$N_{\text{hb}} \approx \frac{1.5}{N \ln(N/2)} \frac{t}{\tau_R}. \quad (48.5)$$

Значительно более точное рассмотрение, при котором учитываются и те жесткие двойные, которые образуются из мягких (Heggie, 1980), дает следующую

шее приближенное значение скорости образования жестких двойных в единице объема:

$$\begin{aligned} \frac{dn_{hb}}{dt} &\approx 10^2 \frac{G^5 m^5 n^3}{\langle v^2 \rangle^{9/2}} \\ &\approx 2 \times 10^{-13} \left(\frac{n}{10^4 \text{ пс}^{-3}} \right)^3 \left(\frac{m}{m_{\odot}} \right)^5 \times \left(\frac{100 \text{ км}^2 \cdot \text{с}^{-2}}{\langle v^2 \rangle} \right)^{9/2} \text{ пс}^{-3} \cdot \text{год}^{-1}. \end{aligned} \quad (48.6)$$

Отметим сильную зависимость этой скорости от n^3 , m^5 и v^{-9} . Соотношения (48.5) и (48.6) с учетом имеющихся в них неопределенностей удовлетворительно согласуются друг с другом. Большая полюсь «самой мягкой» из жестких двойных, т. е. такой, для которой $|E| = 3kT$, оказывается равной

$$a \approx 4 \left(\frac{m}{m_{\odot}} \right) \left(\frac{100 \text{ км}^2 \cdot \text{с}^{-2}}{\langle v^2 \rangle} \right) \text{ а.е.} \quad (48.7)$$

[Одна астрономическая единица (а.е.) равна среднему расстоянию от Земли до Солнца ($\sim 1,5 \cdot 10^{13}$ см, или 200 солнечных радиусов)]. Следует помнить, что эта величина является очень приблизительной для скоплений со спектром масс, так как они, как правило, не имеют единой температуры равнораспределения (см. гл. 46). Тем не менее она служит удобным масштабом по крайней мере до тех пор, пока теория систем с различными массами не будет развита лучше.]

Предшествовавший выводу формулы (48.5) анализ был относительно прост. Однако при попытке применить его к реальным скоплениям возникает вопрос: каково действительное значение N ? Если бы скопление было однородным и все его звезды имели одинаковую массу, то допущения, лежащие в основе формулы (48.5), были бы справедливы и N представляло бы собой полное число звезд. В этом случае при $N \geq 10^3$ число жестких двойных было бы пренебрежимо мало даже по истечении 10 или 100 τ_R . Однако, как мы уже видели, реальные модели скоплений очень неоднородны, а τ_R в центре скопления может быть на несколько порядков меньше, чем во внешних областях. Это должно привести к сильному уменьшению эффективного значения N . С физической точки зрения поведение центрального ядра будет аналогично поведению относительно изолированной системы с меньшим числом звезд, а образование в нем жестких двойных звезд будет идти с большей скоростью. Кроме того, благодаря значительной сегрегации масс в реальном скоплении этот эффект должен заметно усилиться. Действительно, если масса звезд одинакова, то, как показывает прямое численное интегрирование для скоплений, содержащих несколько сотен членов, жесткие двойные звезды появляются по прошествии времени, равного нескольким десяткам времен пересечения τ_c [см. формулу (2.11)] или порядка 10 времен релаксации τ_R . Если распределение масс представлено гладким спектром с отношением $m_{\max}/m_{\min} \sim 10$, то жест-

кая двойная возникает приблизительно в десять раз быстрее. Эта двойная почти всегда состоит из двух самых массивных тел. Поэтому эффективное значение N в формуле (48.5) может уменьшаться по мере эволюции скопления и становиться значительно меньше полного числа звезд. Возможно, этот вывод остается справедливым и в отношении скоплений, содержащих значительно большее число звезд, но более точное исследование этого вопроса с помощью прямого численного моделирования пока не проводилось.

Естественный способ оценки эффектов неоднородности и сегрегации масс состоит в интегрировании соотношения (48.6) по всему скоплению с использованием на каждом этапе эволюции локальных средних для величин n , m и $\langle v^2 \rangle$ и последующем интегрировании результата по всему времени эволюции скопления. Появление двойных в соответствии с формулой (48.6) можно было бы в этом случае сравнить с результатами численного моделирования. Некоторые аналитические оценки, основанные на таком подходе, уже получены (Heggie, 1975), но многое еще предстоит сделать.

Сразу после образования двойных звезд начинается их эволюция в результате обмена энергией со звездами поля, а иногда и с другими двойными звездами. Хегги (Heggie, 1975) дает развернутый анализ эволюции как жестких, так и мягких двойных звезд, сопровождаемый обширной библиографией. В обоих случаях двумя основными механизмами эволюции являются кумулятивные эффекты большого числа далеких случайных сближений и выраженные эффекты малого числа тесных сближений. Относительное значение тесных и далеких сближений зависит от точного вида распределения скоростей звезд поля и от орбитальных параметров двойных звезд. При усреднении по всем этим показателям характерным является приблизительное равенство вкладов далеких и тесных сближений в энергетический обмен двойных звезд.

Если рассматривать далекие сближения жестких двойных звезд, то неудивительно, что характерное время существенного изменения энергии в результате таких сближений имеет порядок диффузионного времени релаксации τ_R . Для тесных сближений этот вывод не столь очевиден, но он легко может быть получен из следующих физических соображений. Поскольку уже одно тесное сближение меняет энергию на большую относительную величину, для существенного изменения энергии двойной необходимо одно или в крайнем случае несколько таких сближений. Эффективное сечение такого сближения для типичной двойной с жесткостью порядка единицы составляет, как видно из формулы (48.4), $\sigma \sim a^2 \sim R^2 N^{-2}$. Поэтому время между столкновениями $(n\sigma v)^{-1}$ имеет порядок величины $NR/v \sim N\tau_{\text{пересеч}}$, что равно приблизительно τ_R . Получив скорость изменения энергии E , с помощью соотношений (48.1)–(48.3) можно узнать, каким образом изменяются орбитальные параметры двойной в том же масштабе времени. Результатом этого изменения, как уже говорилось выше, является тенденция мягких двойных к распаду, а жестких двойных к увеличению жесткости. Если скопление характеризуется приблизительно максвелловским распределением, то мягкие двойные звезды стремятся к стационарному равновесному распределению, тогда как жесткие двойные стремятся к увеличению своего числа. При очень больших значениях

характерного времени это приводит к тому, что жесткие двойные «осаждаются» в центре. В дальнейшем будет показано, как сильно может меняться вид системы под влиянием даже одной жесткой двойной звезды.

48.2. ОБРАЗОВАНИЕ ДВОЙНЫХ ВСЛЕДСТВИЕ ДИССИПАЦИИ ВНУТРЕННЕЙ ЭНЕРГИИ ЗВЕЗД: ПЕРЕДАЧА ПРИЛИВНОЙ ЭНЕРГИИ

Иди же — землю охвати, взвесь воздух, вычисли приливы.

Александр Поуп

Образование двойных звезд может происходить и совершенно иным путем, который предполагает переход энергии орбитального движения звезды в ее внутреннюю структуру. Для участия в таком процессе необходимы только две звезды. Приливная диссипация энергии орбитального движения долго изучалась применительно к системе Земля — Луна; те же физические принципы применимы в основном и к звездным системам.

При прохождении вблизи друг друга двух протяженных деформируемых гравитирующих тел каждое из них вызывает на другом приливы. Эффекты этих приливов зависят от относительных величин трех характерных времен. Во-первых, это время $\tau_{\text{прил}}$, необходимое для нарастания и последующего спада прилива. Оно зависит от эффективной вязкости звезды. Во-вторых, это время между последовательными сближениями $\tau_{\text{меж}}$. В-третьих, это время сближения $\tau_{\text{сближ}}$, в течение которого звезды находятся вблизи положения максимального сближения. Если внутренняя вязкость очень мала, то $\tau_{\text{прил}} \ll \tau_{\text{сближ}}$ и внутренняя структура звезды находится в постоянном равновесии с внешней возмущающей силой. В результате диссипация энергии внутри звезды за время сближения очень мала. Если же внутренняя вязкость велика, то $\tau_{\text{прил}} > \tau_{\text{сближ}}$ и реакция звезды на воздействие внешней силы замедляется. Отклик звезды отстает от текущих значений величины и направления внешней силы. В предельном случае, когда $\tau_{\text{прил}} \gg \tau_{\text{сближ}}$, звезда воспринимает внешнее возмущение как импульс. Этот импульс деформирует звезду, и после окончания его действия она испытывает осцилляции. Наличие вязкости ведет к постепенному затуханию осцилляций, а их энергия в конце концов рассеивается в виде теплоты.

Поскольку полная сумма орбитальной и внутренней энергий звезд постоянна (существование других звезд, помимо взаимодействующей пары, здесь в расчет не принимается), излучение энергии в пространство может произойти только за счет потери энергии орбитального движения. Энергия связи пары после сближения превышает соответствующую энергию до сближения. С точки зрения орбитального движения это вызвано изменением взаимного гравитационного притяжения звезд под действием приливной деформации. Приливы усиливают гравитационные мультипольные моменты звезды, которые оказывают обратное воздействие на орбиту. Если немедленный отклик внут-

ренной структуры звезды на сближение отсутствует, то отсутствует и взаимная компенсация эффектов, связанных с приближением и удалением звезд друг от друга.

При $\tau_{\text{меж}} \gg \tau_{\text{прил}} > \tau_{\text{сближ}}$ в каждый момент времени звезда испытывает лишь одно возмущение и полная энергия, теряемая в результате последовательных сближений, обладает свойством линейности (если пренебречь остаточными изменениями структуры звезды более высоких порядков, которые обусловлены, например, изменениями ядерных реакций или перемешиванием, вызванным осцилляциями). Если же это условие не выполняется, могут возникнуть резонансы, которые существенным образом повлияют на эволюцию. Эти нелинейные резонансы в звездных системах пока совершенно не исследованы. Некоторые их слабые эффекты были изучены для случая двойных звезд и для связи вращательного и орбитального движения в системе Земля — Луна.

Критерий захвата посредством приливной диссипации при тесном сближении может быть легко найден. В положении максимального сближения, т. е. в периастре, относительная скорость звезд $v_{\text{периастр}} \approx [2G(m_1 + m_2)/r_{12}]^{1/2}$. При расстоянии в несколько звездных радиусов эта скорость составит несколько сотен километров в секунду. Дисперсия скоростей звезд v_{rms} в шаровом скоплении составляет обычно ~ 10 км/с. Поэтому для образования двойной звезды необходима диссипация доли $\sim (v_{\text{rms}}/v_{\text{периастр}})^2$ от максимальной кинетической энергии орбитального движения. В шаровых скоплениях эта доля обычно составляет несколько десятых процента. Однако в плотных галактических ядрах приливная диссипация перестает быть значительной после достижения значения $v_{\text{rms}} \sim 10^3$ км/с.

Покажем с помощью простого расчета, как можно оценить приливную диссипацию в случае как импульсных, так и медленных сближений. Это можно сделать и без знания деталей вязких процессов, которые определяют механизм диссипации. Рассмотрим сначала импульсное сближение. Предположим, что звезда массы m быстро движется по приблизительно прямой орбите мимо другой звезды массы M (рис. 47). Несмотря на то, что на каждую из звезд действуют приливные силы, мы можем смело пренебречь эффектом второго порядка, состоящим во взаимной деформации звезд.

Рассмотрим малый элемент объема звезды M на рис. 47. Оси z и z' направлены перпендикулярно плоскости чертежа и скорости звезды m , а плоскости $x-y$ и $x'-y'$ содержат вектор скорости звезды m . Ось x' всегда направлена на звезду m . Во вращающейся системе координат (обозначена штрихами) компоненты ускорения элемента под действием приливного импульса состав-

$$F_y = - \frac{Gmy'}{R^3}, \quad (48.8)$$

$$F_{z'} = - \frac{Gmz'}{R^3}, \quad (48.9)$$

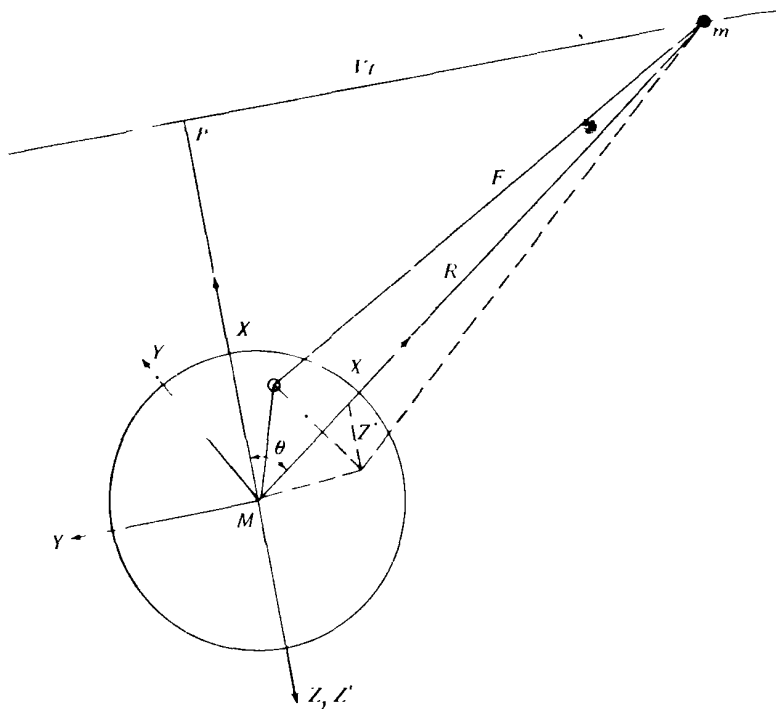


Рис. 47. Геометрия импульсного приливного столкновения.

$$F_{x'} = \frac{2Gmx'}{R^3} \quad (48.10)$$

Заметим, что при выводе выражений для компонент $F_{y'}$ и $F_{z'}$ мы пренебрегли поправкой к расстоянию R в знаменателе, которая дала бы член второго порядка малости. Однако для $F_{x'}$ эта поправка важна, так как для получения дифференциального приливного эффекта вдоль оси x' необходимо вычлсть ускорение центра масс.

Из геометрии рисунка находим обычное соотношение между координатами во вращающейся и неподвижной системах

$$x' = \frac{xP}{R} + \frac{yS}{R}, \quad (48.11)$$

$$y' = -\frac{xS}{R} + \frac{yP}{R}, \quad (48.12)$$

$$z' = z, \quad (48.13)$$

причем

$$R^2 = P^2 + S^2, \quad (48.14)$$

$$S = Vt, \quad (48.15)$$

поскольку $V^2 \gg GM/P$ предполагается постоянной. Преобразуя соотношения (48.8)–(48.10) в неподвижную систему координат и обозначая через v возмущение скорости элемента звезды M , находим его уравнения движения в проекции на оси координат:

$$\frac{dv_x}{dS} = \frac{Gm}{V'R^3} \left(2x - \frac{3xS^2}{R^2} + \frac{3yPS}{R^2} \right). \quad (48.16)$$

$$\frac{dv_y}{dS} = \frac{Gm}{V'R^3} \left(2y - \frac{3yP^2}{R^2} + \frac{3xPS}{R^2} \right). \quad (48.17)$$

$$\frac{dv_z}{dS} = -\frac{Gmz}{V'R^3}. \quad (48.18)$$

Чтобы найти скорость, обусловленную действием приливного импульса, подставим сюда равенство (48.14) и проинтегрируем по всей орбите в пределах $-\infty \leq S \leq \infty$. В результате получим

$$v_x = \frac{2Gm x}{P^2 V}, \quad (48.19)$$

$$v_y = 0, \quad (48.20)$$

$$v_z = -\frac{2Gm z}{P^2 V}. \quad (48.21)$$

Полный прирост внутренней энергии звезды в результате сближения можно найти интегрированием плотности кинетической энергии $\frac{1}{2}[\rho(v_x^2 + v_z^2)]$ возмущения по всей звезде

$$\Delta T = \frac{1}{3} M \left(\frac{2Gm}{P^2 V} \right)^2 r_*^2, \quad (48.22)$$

где r_* — среднеквадратичный радиус звезды. Если, например, плотность постоянна, r_* составляет $(3/5)^{1/2}$ от радиуса звезды. В действительности ΔT оказывается несколько меньше, так как плотность центральных областей звезды испытывает меньшие возмущения. Чтобы получить представление об этой величине, можно сравнить ее с полной гравитационной энергией звезды

$$\frac{\Delta T}{Gm^2/r_*} = \frac{4}{3} \frac{GM}{r_* V^2} \left(\frac{r_*}{P} \right)^4. \quad (48.23)$$

Таким образом, при касательном столкновении энергия звезды возрастает на относительную величину $\sim V_{\text{убег}}^2/V^2$; вообще же относительный прирост энергии сильно зависит от расстояния максимального сближения. В случае импульсного сближения он составляет величину, меньшую единицы, поэтому результатом такого сближения не может быть ни разрушение звезды, ни образование связанных пар. Тем не менее в некоторых скоплениях этот тип сближений может оказаться существенным стоком энергии орбитального движения, в чем читатель может убедиться, вычислив отношение $\Delta T/T$, где T — кинетическая энергия звезды.

Рассмотрим теперь более подробно, каким образом происходит возмущение звезды. Это рассмотрение обеспечит также некоторое понимание более трудной проблемы медленных сближений. При прохождении мимо другого объекта в звезде возбуждается большое число внутренних мод. Когда эти возмущения линейны, они не взаимодействуют друг с другом и могут рассматриваться независимо. В литературе по математической физике или теории потенциала показано, что такие возмущения могут быть обычно представлены при наличии осевой симметрии обыкновенными полиномами Лежандра, а при ее отсутствии — сферическими гармониками. При импульсном сближении большая часть приливной энергии будет переходить в основную моду. Это приведет к удлинению звезды в направлении максимального сближения, но сохранит ее симметрию относительно оси удлинения.

Чтобы определить приблизительную амплитуду наведенной пульсации, сделаем предположение о преобладании основной моды и свяжем ее энергию с амплитудой. Если θ измеряется от прямой, соединяющей центры звезд (см. рис. 47), r_0 — равновесное значение радиуса рассматриваемой оболочки, а $k(t)$ — безразмерная амплитуда смещения, то профиль деформированной звезды выразится как

$$r = r_0 \left[1 + \frac{k}{2} (3 \cos^2 \theta - 1) \right]. \quad (48.24)$$

Множитель при k представляет собой полином Лежандра $P_2(\cos \theta)$, описывающий основную моду. При условии малости возмущений изменение элемента объема, обусловленное приращением $d(r - r_0)$, составит поэтому

$$d\tau = \frac{k}{2} (3 \cos^2 \theta - 1) r_0^2 \sin \theta dr_0 d\theta d\phi. \quad (48.25)$$

Полная кинетическая энергия возмущения дается выражением

$$\Delta T = \frac{1}{2} \int \rho \dot{r}^2 r_0^2 \sin \theta dr_0 d\theta d\phi = I_1 \dot{k}^2, \quad (48.26)$$

которое вместе с равенством (48.24) является определением I_1 . Для однородного элемента, расположенного над равновесной поверхностью и смещенного на величину $\Delta r = r - r_0$, возмущение плотности потенциальной энергии со-

ставит $GM(r_0)\rho\Delta r/2r_0^2$. Умножая его на объем элемента $d\tau$ и интегрируя по всей звезде, получаем полную потенциальную энергию возмущения

$$\Delta W = I_2 k^2. \quad (48.27)$$

Это равенство является определением I_2 . При постоянной плотности $I_1 = 3MR_*^2/50$ и $I_2 = 3GM^2/50R_*$. Из полученных кинетической и потенциальной энергий возмущения можно составить лагранжиан $L = \Delta T - \Delta W$ этого возмущения и его уравнение движения

$$I_1 \ddot{k} + I_2 k = 0. \quad (48.28)$$

Это уравнение простого гармонического осциллятора, что соответствует линейности возмущения.

Решение этого уравнения имеет вид

$$k = A \cos(\omega t + \delta), \quad (48.29)$$

где $\omega = (I_2/I_1)^{1/2}$ — частота, A — амплитуда и δ — фаза. Полная энергия колебаний равна максимальной кинетической энергии, и из выражения (48.26) получаем

$$\Delta T = I_1 A^2 \omega^2 = I_2 A^2. \quad (48.30)$$

Приравнявая эту величину энергии (48.22), превратившейся во внутреннюю энергию звезды в результате сближения, найдем максимальное возмущение

$$A = \left. \frac{\Delta r}{r} \right|_{\max} = r_* \left(\frac{2Gm}{P^2 V} \right) \left(\frac{M}{3I_2} \right)^{1/2} \approx \frac{2 \cdot 10^3}{\alpha^2 V (\text{км/с})}. \quad (48.31)$$

Последнее выражение относится к приблизительно однородным звездам солнечного радиуса, а $\alpha \equiv P/r_*$. Соотношение (48.31) справедливо только при $A \leq 0,1$. Руководствуясь физическими соображениями, можно ожидать, что вместе с основной колебательной модой тесные медленные сближения возбуждают и моды более высоких порядков, что приводит к нарушению допущений, лежащих в основе соотношения (48.31).

Обратимся теперь к медленным сближениям. Важный результат предыдущего анализа, который остается справедливым и здесь, состоит в том, что полная энергия любой линейной колебательной моды пропорциональна квадрату ее амплитуды. Поменяв ход предыдущих рассуждений на противоположный, оценим амплитуду прилива, наведенного медленным сближением, и используем этот результат для вычисления приблизительного значения передачи энергии.

Если приливное ускорение $\sim GmR_*/P^3$ действует в течение времени τ , то результирующее смещение $\Delta r \sim GmR_*\tau^2/P^3$. При максимальной величине прилива P должно соответствовать касательному столкновению, для которого $\tau^2 \sim R_*^3/GM$, если масса обеих звезд приблизительно одинакова. При этих

условиях амплитуда

$$A = \frac{\Delta r}{r} \approx \frac{m}{M} \left(\frac{R_*}{P} \right)^3. \quad (48.32)$$

Резонанс в результате более далекого сближения не будет так заметен, поскольку характерное время сближения значительно превышает характерную длительность основного периода колебаний звезды. Поэтому при сближениях, более далеких от условия резонанса, с $P \geq 2r_*$, амплитуда A оказывается меньше значения (48.32).

Если возмущения по-прежнему линейны, то из формул (48.30) и (48.32) получим величину энергии, переданной в результате сближения:

$$\Delta T \approx I_2 \left(\frac{m}{M} \right)^2 \left(\frac{R_*}{P} \right)^6 \approx \frac{3}{50} \frac{Gm^2}{R_*} \left(\frac{R_*}{P} \right)^6, \quad (48.33)$$

где последнее выражение относится к приблизительно однородной звезде. В случае больших нелинейных возмущений энергия по-прежнему изменится на величину $\propto \Delta r dr \propto A^2$, как об этом было сказано перед формулой (48.27). Хотя численный коэффициент в выражении (48.33) возрос, установление точного значения прироста энергии требует более точного анализа. Основной результат состоит в том, что по мере роста прицельного параметра P происходит чрезвычайно быстрое уменьшение величины энергии, переданной в результате сближения. Заметим, что если в импульсном приближении (48.23) перейти к медленному пределу, положив $V^2 \approx GM/P$, то такой переход не приведет к правильной зависимости (48.33) ΔT от R_*/P . Причина состоит в том, что медленное сближение представляет собой процесс гораздо более чувствительный в отношении резонанса, чем импульсное сближение.

Именно в результате медленных сближений может происходить диссипация достаточного для образования двойных звезд количества орбитальной энергии. Уравнение (48.33) показывает, что обсуждавшееся в начале этой главы условие образования связанных пар $\Delta T/T \geq (v_{\text{rms}}/v_{\text{периастр}})^2$ приводит к соотношению

$$P \leq P_{\text{связ}} \approx \left(\frac{GM}{R_* v_{\text{rms}}^2} \right)^{1/6} R_* \approx \left(\frac{v_{\text{убег}}}{v_{\text{rms}}} \right)^{1/3} R_*, \quad (48.34)$$

справедливому для звезд примерно одинаковой массы. Здесь $v_{\text{убег}}$ — скорость убегания с поверхности звезды. «Настройка в резонанс» здесь так точна, что неравенства $1 \leq P_{\text{связ}}/R_* \leq 3$ выполняются для широкого набора условий, причем действительное значение зависит от конкретной модели.

Чтобы определить эффективное сечение захвата, мы должны отличать друг от друга первоначальный прицельный параметр P и расстояние максимального сближения $R_{\text{мин}}$ непосредственно перед захватом. Хотя эти величины и совпадают в случае прямолинейной орбиты, они отличаются в случае криволинейных орбит, приводящих к связанным состояниям, как это обсуждалось в гл. 17. Анализ сохранения энергии и импульса, аналогичный тому, ко-

который привел к формуле (17.6), теперь приводит к соотношению

$$\frac{P^2}{R_{\min}^2} = \frac{2G(M+m)}{R_{\min} v^2} + 1, \quad (48.35)$$

где v — относительная скорость, а вторым членом в правой части обычно можно пренебречь. Поэтому эффективное сечение захвата

$$\sigma_{\text{захв}} = \pi P^2 \approx 2\pi G(M+m) \frac{R_{\min}}{v^2}. \quad (48.36)$$

Число захватов в единице объема в секунду, происходящее между звездами массы m и M , равно $\dot{n}_{\text{захв}} = n(M)n(m)\sigma_{\text{захв}}v$. Чтобы найти полное число двойных звезд, образующихся вследствие приливных эффектов, надо проинтегрировать $\dot{n}_{\text{захв}}$ по координатному пространству и пространству скоростей с учетом соответствующих распределений в системе. Однако, принимая во внимание степень точности настоящего анализа, можно просто заменить v на характерное значение $\sim v_{\text{rms}}$ и рассмотреть однородное скопление радиуса R_c , все звезды которого имеют одинаковую массу m . Относительная скорость образования двойных звезд принимает, таким образом, вид

$$\frac{\dot{N}_{\text{прил}}}{N} \approx \frac{R_{\min}}{R_c} \frac{1}{\tau_c} \sim \left(\frac{v_{\text{rms}}}{v_{\text{убег}}} \right)^2 \frac{1}{N \tau_c} \propto \left(\frac{v_{\text{rms}}}{v_{\text{убег}}} \right)^2 \frac{1}{\tau_R}. \quad (48.37)$$

Здесь мы применили теорему вириала, соотношение (48.34) при $R_{\min} \approx R_{\text{связ}} \approx R_*$ и соотношение (2.11) между временем пересечения и временем релаксации скопления. Основной вывод заключается в том, что за одно время пересечения происходит приливный захват доли $\approx R_*/R_c$ от всех звезд. Более точный расчет (Press and Teukolsky, 1977), в котором используются суммирование по всем возмущенным модам политропы с показателем $n = 3$ и интегрирование в пространстве распределенных по Максвеллу скоростей, дает для звезд одинаковых массы и радиуса величину скорости захвата в единице объема

$$\dot{n}_{\text{прил}} = 2 \cdot 10^{-8} \left(\frac{R_*}{R_{\odot}} \right)^{0.9} \left(\frac{m}{m_{\odot}} \right)^{1.1} \left(\frac{100 \text{ км}^2 \cdot \text{с}^{-2}}{\langle v^2 \rangle} \right)^{0.6} \left(\frac{n}{10^4 \text{ пс}^{-3}} \right)^2 \text{ пс}^{-3} \cdot \text{год}^{-1}. \quad (48.38)$$

Сравнение с соотношением (48.6) позволяет непосредственно установить условия (например, в шаровых скоплениях), при которых приливный захват преобладает над захватом при тройном столкновении.

Сразу после образования большинства двойных звезд в результате приливного захвата или захвата при тройном столкновении их орбиты будут характеризоваться большим эксцентриситетом. Это объясняется тем, что первоначальные траектории звезд были гиперболическими. Последующая приливная диссипация приводит к тому, что двойная звезда становится более жесткой. Из уравнения (48.2) видно, что при фиксированной величине (постоянного) мо-

мента импульса орбитой с максимальной энергией связи является окружность, т. е. эксцентриситет такой орбиты $e = 0$. Таким образом, по мере того как двойная становится все более жесткой, ее орбита все более приближается к круговой. Во время каждого обращения по орбите вскоре после образования двойной обычно происходит потеря части энергии $\sim (v_{\text{rms}}/v_{\text{периастр}})^2$, как отмечалось выше [ср. также формулу (48.37)]. Поэтому орбита становится круговой после приблизительно $(v_{\text{периастр}}/v_{\text{rms}})^2$ оборотов. Эти приливные процессы характерны для захвата и слияния как галактик, так и звезд. В случае галактик приливная диссипация может усилить эффекты динамического трения во время слияния. Основным механизмом диссипации здесь является не излучение тепла, а выброс звезд с высокими скоростями в гало и за его пределы.

48.3. ВЛИЯНИЕ НА ЭВОЛЮЦИЮ СКОПЛЕНИЯ

Двойные звезды могут сильно влиять как на гравитационную, так и на астрономическую эволюцию скопления. Один из наиболее тонких астрономических эффектов состоит в изменении соотношения между цветом и звездной величиной. Жесткие двойные, особенно те из них, которые включают компактные белые карлики, нейтронные звезды и черные дыры, могут становиться также сильными источниками рентгеновского и γ -излучения. Такое излучение нередко быстро изменяется во времени и обусловлено сложным характером перетекания вещества и аккреции в двойной системе. Двойные больших масштабов, компонентами которых являются сверхмассивные объекты или черные дыры с массой $M \geq 10^6 m_{\odot}$, могут выбрасывать из ядер галактик звезды меньшей массы. Сверхмассивные двойные могут и сами разрушаться и выбрасываться из ядра, полностью нарушая распределение звезд на своем пути и оставляя позади себя след излучающих осколков.

Здесь, однако, нас интересует в основном гравитационная эволюция. Как уравнение (48.6), так и (48.38) показывают, что высокие плотности и сегрегация масс способствуют образованию двойных звезд. Эти свойства характерны для поздних стадий эволюции скопления после образования центрального ядра. Кроме того, двойные звезды, обязанные своим происхождением плохо еще понятым процессам образования кратных звезд, могут появиться еще на начальной стадии развития скопления. Через механизм столкновений с одиночными звездами происходит передача кинетической энергии жестких двойных звезд системе. (Мягкие двойные, значения которых не так велико, поглощают некоторое количество кинетической энергии, но затем происходит их распад и возвращение значительной части этой энергии системе.) Самыми эффективными в этом отношении являются те жесткие двойные, которые имеют наименее тесную связь. Они имеют большее эффективное сечение взаимодействия, а переданная ими одиночной звезде энергия не так велика, чтобы эта звезда могла убежать за пределы скопления.

Различные аспекты рассеяния одиночных звезд двойными будут обсуждаться в гл. 49. К счастью, одна простая мысль дает возможность получить

наиболее важные для эволюции скопления результаты без такого обсуждения. Если расстояние максимального сближения звезд превышает большую полуось двойной в два-три раза, следует ожидать, что двойная будет взаимодействовать как одиночный объект. Эффективная масса такого объекта будет равна полной массе двойной звезды, а его монополярный момент будет преобладать над рассеянием. Если же одиночная звезда проходит на расстоянии не более чем в одну-две полуоси двойной, то происходит рассеяние на большой угол, в результате которого существенно изменяется энергия как одиночной звезды, так и двойной. Это изменение превысит превращение внутренней энергии двойной в энергию системы.

Предположим (в соответствии с численными экспериментами по тройным столкновениям), что среднее рассеяние на большой угол изменяет энергию двойной звезды приблизительно на

$$\Delta E \approx \frac{1}{2} |E| = \frac{Gm^2}{4a} \quad (48.39)$$

при условии равенства масс. При этом скорость отлетающего тела должна быть равной примерно $20(m/m_{\odot})^{1/2}(a_{a,e})^{-1/2}$ км/с. Скорость роста энергии одиночных звезд в единице объема составляет в этом случае

$$\dot{E} \approx (\Delta E) n_{\text{одиноч}} n_{\text{двойн}} \sigma v. \quad (48.40)$$

Эффективное сечение здесь $\sigma \approx \pi a^2$, где a дается формулой (48.4), а дисперсия скоростей v опять получается из теоремы вириала. Предположим для простоты, что система однородна, и $N_{\text{двойн}} < N$. Комбинируя эти результаты, получаем полную скорость превращения энергии связи двойных звезд в кинетическую энергию по всей системе

$$\frac{\dot{E}_{\text{двойн}}}{E} \approx \frac{3}{2} \frac{N_{\text{двойн}}}{N \tau_c} \approx 10^{-2} \frac{N_{\text{двойн}}}{N \ln(N/2) \tau_R}. \quad (48.41)$$

В последнем равенстве использовано соотношение (2.11) между временем пересечения и временем релаксации (в котором учтен более точный множитель $1/2$ в выражении для потенциальной энергии однородной сферической системы). Применяя равенство (48.41) к реальному рассеянию с учетом распределения размеров двойных звезд в неоднородной модели скопления, важно помнить, что численный коэффициент может быть в несколько раз больше или меньше приведенного здесь значения.

Приливная диссипация, сопровождающая образование двойных звезд, приводит к нагреванию звезд, но одновременно к охлаждению звездной системы. По двум причинам это охлаждение должно быть меньше нагревания, обусловленного рассеянием на жестких двойных. Во-первых, распад двойных маловероятен. Поэтому происходит их накопление, вследствие чего число двойных существующих в характерный момент времени, должно превышать число двойных, образующихся под действием приливного механизма. Во-вторых, прирост энергии в результате каждого рассеяния на жесткой двойной больше

потери энергии $\sim \frac{1}{2}mv^2$ в результате приливного захвата. Из выражения (48.38) получаем

$$\frac{\dot{E}_{\text{прил}}}{E} = \frac{\dot{N}_{\text{прил}}}{N} = \frac{\dot{n}_{\text{прил}}}{n} = 9 \cdot 10^{-5} \left(\frac{r_*}{r_{\odot}} \right)^{0,9} \left(\frac{m}{m_{\odot}} \right)^{-0,9} \left(\frac{v}{10 \text{ км/с}} \right)^{1,8} \frac{1}{\tau_R \ln(N/2)}, \quad (48.42)$$

где τ_R — время релаксации (2.9). При характерных значениях параметров шарового скопления прирост энергии, обусловленный рассеянием на жестких двойных, превышает приливные потери в том случае, если более $\sim 1\%$ всех звезд являются жесткими двойными. Выполнение этого условия в случае каждой конкретной модели может существенным образом зависеть от начального распределения двойных звезд.

Как велико должно быть значение $\dot{E}_{\text{двойн}}$ и $\dot{E}_{\text{прил}}$ для того, чтобы заметно повлиять на гомологическую эволюцию, описанную в гл. 44 и 45? Если эволюция проходит через последовательность квазиравновесных вириальных состояний, то радиус скопления изменяется в соответствии с уравнением

$$\frac{1}{R} \frac{dR}{dt} = \frac{2}{N} \frac{dN}{dt} - \frac{1}{E} \frac{dE}{dt}. \quad (48.43)$$

В простом испаряющемся скоплении (45.4) $dE/dt = 0$ и $N/\dot{N} \approx -\varepsilon/\tau_R$, где $\varepsilon \approx 10^{-2}$. Поэтому такое скопление будет подвержено сильному влиянию двойных звезд, если $\dot{E}/E$ окажется больше, чем приблизительно $10^{-2}/\tau_R$. Как видно из формулы (48.41), для того чтобы это произошло, значительная часть всех звезд должна быть жесткими двойными! Аналогично из (48.42) видно, что существенные приливные потери энергии возможны только в крайних ситуациях (которые могут иногда возникать в тех или иных моделях). Сравнение с более общей гомологической эволюцией ядер скоплений (44.8) также показывает, что для осуществления заметного общего влияния на эти ядра также требуется большое число двойных звезд. Более точные модели (например, Inagaki, 1984) приводят к тому же основному выводу.

Даже если двойные звезды не влияют на глобальную динамику скопления, они могут оказывать заметное воздействие на его центральные части. Это особенно верно в том случае, когда сегрегация масс приводит к концентрации тяжелых двойных звезд в центральной части скопления. Выброс одиночных звезд из центральной области под воздействием двойных даже при небольшом числе последних (вплоть до одной!) может понизить здесь величину средней плотности и существенно повлиять на структуру ядра. Этот вывод почти всегда подтверждается результатами прямого численного моделирования, но получить его аналитически очень трудно из-за нерегулярности ситуации в ядре, зависящей от точного вида орбит. В центре возможно и взаимодействие нескольких двойных звезд между собой. В следующей главе мы расскажем о некоторых статистических результатах, преимущественно экспериментальных, относящихся к точному описанию взаимодействий этих двойных звезд с одиночными.

49. «РОГАТОЧНЫЙ» ВЫБРОС

И некоторые звезды безумно
Вырываются из своих сфер.

Шекспир

Простейшими примерами гравитационного «рогаточного» выброса могут служить двойная звезда, рассеивающая одиночную, а также распад первоначально связанной системы трех тел. При этом в результате эффекта отдачи как двойная звезда, так и одиночное тело могут покинуть систему. Если ядра галактик содержат сверхмассивные объекты, образующие двойные системы, то астрономические последствия таких процессов могут быть особенно значительны (*Saslaw et al.*, 1974). Они играют также важную роль в обычных звездных скоплениях с $N \lesssim 10^2$ и в самом центре более богатых скоплений.

Выполнение многих численных экспериментов по задаче трех тел показало, каким образом происходит рассеяние. Здесь наблюдается любопытный контраст с физикой высоких энергий, причем вычислительная машина служит (недорогим) гравитационным ускорителем. Целью наших экспериментов является не установление микроскопического закона, который описывал бы взаимодействие — он известен со времен Ньютона, — а понимание реальных результатов действия этого закона. Даже частицы с относительно низкой энергией в нашем эксперименте — звезды, движущиеся с характерной скоростью $\sim 10^2$ км/с, имеют кинетическую энергию более $\sim 10^{50}$ ГэВ!

Несмотря на то, что в аналитической динамике имеется много точных математических результатов по расчету системы трех тел, их применение обычно возможно лишь при выполнении сильно ограничивающих общность условий. В основе таких расчетов, как правило, лежат асимптотические методы и методы теории возмущений (см., например, *Арнольд*, 1979; *Pars*, 1965). Этого недостаточно для понимания обширного круга важных явлений, происходящих при реальном физическом рассеянии, поэтому мы должны прибегнуть к численному моделированию и приближенному нелинейному анализу (*Heggie*, 1975 (а, б), ссылки в гл. 48).

Основными входными данными в численном эксперименте по выбросу в задаче трех тел являются данные по двойной системе и третьему налетающему телу. После сложных взаимодействий, перемешивающих все орбиты, конечный результат может быть различным. Простейшим является *пролет*, при котором третье тело покидает систему двух тел сразу же после взаимодействия. При *резонансе* третье тело захватывается двойной, образуется тесная тройная система, которая затем быстро распадается. При *обмене* одна из компонент исходной двойной звезды немедленно выбрасывается, а другая компонента вместе с третьим телом образует новую двойную. При *ионизации* третье тело разрывает двойную звезду, и все три объекта разлетаются.

Какой именно из этих результатов будет реализован в действительности, зависит от конкретных начальных условий. Полное описание конфигурации трех тел требует задания 21 параметра: трех координат, трех компонент ско-

рости, а также массы каждого объекта. Из всех этих параметров три координаты и три компоненты скорости необходимы для описания движения центра масс, так что в системе, начало которой движется вместе с центром масс, необходимы «только» 15 параметров. В качестве таких параметров могут быть использованы различные сочетания орбитальных характеристик. Не все эти характеристики одинаково важны, некоторые из них выбором соответствующего масштаба могут быть приравнены к единице. Кроме того, в большинство основных физических результатов входят средние от некоторых орбитальных параметров. Поэтому сейчас нет необходимости рассматривать точную геометрию задачи; такое рассмотрение можно найти в обширной литературе по этому вопросу (см., например, *Saslaw et al.*, 1974).

Многочисленные ранние эксперименты (*Saslaw et al.*, 1974; *Valtonen*, 1975) позволили установить некоторые общие результаты. В случае отрицательной полной энергии ионизация невозможна. Относительная вероятность пролета, резонанса и обмена зависит прежде всего от перичентрического расстояния близкой к параболической орбиты третьего тела. Кроме того, она зависит от относительной массы третьего тела. Существует и третья по значимости зависимость — от начального эксцентриситета двойной и от наклона ее орбиты к орбите третьего тела. Если перичентрическое расстояние орбиты третьего тела ≥ 3 (в единицах начального значения большой полуоси двойной звезды), то с вероятностью около 100% произойдет пролет. При меньших расстояниях преобладают обмен и резонанс. Уменьшение массы третьего тела влечет за собой увеличение вероятности обмена. При этом обмен уступает место пролету при больших перичентрических расстояниях. Если третье тело имеет наименьшую среди трех тел массу, вероятность обмена почти пренебрежимо мала. Увеличение энергии третьего тела ведет к возрастанию вероятности пролета за счет резонанса. Если двойная имеет большой начальный эксцентриситет, то при движении всех тел в одной плоскости вероятность обменов и резонансов на больших расстояниях возрастает. Для большинства орбит обмены и резонансы на больших расстояниях являются более вероятными, если орбиты прямые, а не обратные.

В случае пролета наибольший интерес представляет приобретенная или потерянная пролетающим телом энергия. С ростом перичентрического расстояния она падает, становясь обычно пренебрежимо малой при расстояниях ≥ 4 . При меньших расстояниях она сильно зависит от относительной фазы орбит двойной системы и третьего тела. Как и следовало ожидать, такая фазовая зависимость оказывается особенно выраженной при больших значениях эксцентриситета, малом наклоне орбит и малом перичентрическом расстоянии. Изменение фазовой зависимости при изменении отношения масс незначительно до тех пор, пока масса третьего тела не превысит примерно вдвое полную массу двойной; при этом более вероятной формой взаимодействия становится обмен. Обычное значение относительного изменения скорости при перичентрическом расстоянии, меняющемся приблизительно от 1 до 2,5, составляет от 80% до 10% при условии, что все массы имеют одинаковый порядок величины. Уменьшение относительной массы третьего тела приводит к уменьшению

изменения его скорости, поскольку деформация орбиты двойной третьим телом в этом случае не так велика.

При близких прохождениях сильные резонансы между орбитами приводят к временному захвату и последующему выбросу третьего тела. Чтобы такие резонансы были возможны, энергия двойной должна быть хорошо согласована с энергией третьего тела. При этом условия скорость третьего тела относительно какой-либо из компонент двойной будет с большой вероятностью низкой, что обеспечит значительное отклонение этой компоненты третьим телом. При заметном возрастании скорости третьего тела относительно внутренней скорости двойной эффективное сечение резонанса быстро падает. Это приводит к мысли разложить зависимость эффективного сечения от скорости по степеням отношения энергий двойной системы и налетающего тела $E_{\text{двойн}}/E_{\text{налет}}$. Точный анализ (Heggie, 1975a) показывает, что в этом случае преобладает первый член разложения: $\sigma \approx \pi a^2 v_{\text{двойн}}^2 / v_{\text{налет}}^2$. Распределение скоростей убегающего тела характеризуется обычно широким пиком при $v_{\text{убег}}^2 \approx 0,5 |E_{\text{полн}}|/m$, где m — средняя масса убегающего тела. Однако при больших значениях полного момента импульса $v_{\text{убег}}$ меньше примерно в два раза. При высоких значениях энергии это распределение скоростей имеет хвост, простирающийся до величины, в два-три раза превышающей ту, которая соответствует $v_{\text{убег}}$. Влияние других, помимо m и L , параметров эксперимента на величину скорости убегания, видимо, незначительно.

Распределение скоростей убегания одиночного тела массы m может быть выражено в предложенной Хегги простой форме, которая хорошо согласуется с широким кругом случаев (Saslaw et al., 1974):

$$f(v)dv = 3,5 \frac{mv}{z} \left(1 + 0,5 \frac{mv^2}{z} \right)^{-4.5} dv. \quad (49.1)$$

Масса m соответствует частице, которая с наибольшей вероятностью должна быть выброшена из системы: она равна среднему взвешенному значению от наименьшей и следующей по величине массы; величина z представляет собой абсолютное значение полной энергии. Это распределение справедливо как для первоначально тесных систем, так и для слабосвязанных систем, включая случай резонанса. Оно является в основном статистическим результатом заметного перемешивания орбит. Выброс не требует тесного сближения. Убеганию часто предшествует треугольная конфигурация, в которой все тела равноудалены друг от друга.

Резонанс может приводить также к обмену; убегающим обычно оказывается тело с наименьшей массой. Квадрат его характерной скорости убегания также имеет обычно порядок величины $|E_{\text{полн}}|/2m$. Если все три массы одинаковы, а первоначальная большая полуось двойной равна a , то, как показывают численные эксперименты, эффективное сечение обмена определяется выражением

$$\sigma_{\text{обмен}} \approx \frac{80\pi G^3 m^3}{3av^6} \quad (49.2)$$

при условии, что скорость третьего тела перед взаимодействием более чем вдвое превышает ту скорость, при которой полная энергия системы обращается в нуль (*Hut and Bahcall, 1983; Hut, 1983*).

Если энергия третьего тела перед взаимодействием так велика, что полная энергия системы положительна, то может произойти ноцизация двойной. При этом эффективное сечение резонанса при высоких скоростях убывает как (*Hut, 1983*)

$$\sigma_{\text{нон}} \approx \frac{40}{3} \pi a G \frac{m_{\text{налет}}^2}{m_{\text{двойн}}} \frac{1}{v^2}. \quad (49.3)$$

Это сечение, как и $\sigma_{\text{обмен}}$, является результатом усреднения по орбитальным параметрам. Приближения более высоких порядков показывают, что оно до некоторой степени зависит и от эксцентриситета первоначальной орбиты.

В дополнение к рассеянию на двойных образование тесных систем трех тел возможно и путем конденсации непосредственно из фрагментирующего газового облака. Конечные свойства таких систем очень похожи на свойства тех, которые получаются в результате резонансного захвата. Убегание наиболее легкого тела происходит обычно по прошествии времени, в 10^2 раз превышающего начальное время пересечения (время пересечения двойной). Однако если все три массы одинаковы, то для убегания потребуется в два-три раза большее время. В очень редких случаях возможно появление более устойчивой конфигурации замкнутой системы трех тел, когда наиболее легкое из них обращается на большом удалении вокруг тесной двойной. После убегания импульс, появляющийся в результате отдачи, отбрасывает двойную в обратном направлении. В общем случае при малом моменте импульса всей системы эксцентриситет остающейся двойной обычно оказывается большим.

При выбросе из системы трех тел угловое распределение выброшенного одиночного тела и остающейся двойной характеризуется выраженным пиком в плоскости полного углового момента системы. Эта особенность отмечается почти при всех значениях орбитальных параметров. Было бы также интересно видоизменить рогаточный выброс, окружив каждое тело диском из пробных частиц с целью выявить их поведение во время выброса (*Lin and Saslaw, 1977*). Такого рода модель можно применить к аккреционным дискам вокруг компактных объектов. Основные результаты соответствующих численных экспериментов состоят в том, что, во-первых, аккреционные диски с обратным вращением гораздо лучше «переносят» выброс, чем диски с прямым вращением, и, во-вторых, выброс легче «переносится», когда масса выброшенного тела приблизительно равна полной массе двойной. Оба этих результата вполне согласуются с интуитивными соображениями.

Звезды, рассеянные в процессах рогаточного выброса из ядер галактик, могут образовать вокруг галактики гало. Очень эффективным может оказаться такой механизм образования гало, при котором двойная система, состоящая из двух компактных сверхмассивных объектов, выбрасывает одиночные звезды. Можно ли с его помощью объяснить некоторые особенности строения гигантских эллиптических галактик, которые являются мощными источниками

радиоизлучения (Saito, 1977)? Динамика звезды, выброшенной двойной системой, включает два конкурирующих процесса: убегание и приливное разрушение. Какой из двух одержит верх? Применяя формулу (1.4) к звезде массы m и радиуса d , которая приближается к двойной звезде массы M , видим, что приливное разрушение начинается на расстоянии $l \approx d(M/m)^{1/3}$. На этом расстоянии характерное время разрушения звезды $(G\rho_*)^{-1/2}$ приблизительно равно времени ее убегания с орбиты $(GM/l^3)^{-1/2}$. Таким образом, для сохранения звезды от разрушения она не должна подходить к двойной ближе, чем на это расстояние. Максимальная орбитальная энергия (в расчете на единицу массы), которую двойная может сообщить звезде, имеет порядок величины GM/l . Таким образом, максимальная скорость, которую звезда может приобрести в результате рогаточного выброса без приливного разрушения, выразится через скорость убегания с ее поверхности как

$$v_{\text{max}} \approx v_{\text{убег}} \left(\frac{M}{m} \right)^{1,3} \quad (49.4)$$

При более высоких значениях скорости рогаточный выброс приводит к отрыву ядра звезды от ее оболочки и убеганию этого ядра (остатка звезды) из системы.

50. РОЛЬ ЦЕНТРАЛЬНОЙ СИНГУЛЯРНОСТИ

Кое-где звезд слишком много, а где-то еще их не хватает, но, честное слово, дело это поправимое.

Марк Твен

Можно подумать, что юморист Марк Твен успел познакомиться с теорией черных дыр и эффектов их проявления. К сожалению, он умер в 1910 г., за шесть лет до того, как эти сингулярные решения общей теории относительности были открыты К. Шварцшильдом. Хотя в данной книге рассматриваются ньютоновские системы, в которых отношение GM/Rc^2 гравитационной энергии к энергии массы покоя очень мало, присутствие центральной сингулярности, разрушающей или поглощающей звезды, может оказывать заметное влияние на ньютонову динамику окружающих объектов. Вообще говоря, черная дыра — лишь один из примеров такой сингулярности. Другими примерами являются сверхмассивная звезда, или спинар, и даже сама область такой высокой плотности, что попадающие внутрь звезды разрушаются вследствие физических столкновений (гл. 52).

Ранее было показано (разд. 40.2), как гравитирующая материальная точка изменяет распределение окружающих звезд, как это распределение подчиняется обычному уравнению состояния политропы. Большая точечная масса приводит к образованию в центре пика плотности (каспа), а не обычного пологого распределения. В разд. 40.2 мы исключили из рассмотрения слишком близкие к центральной массе области, поскольку политропное поведение в них на-

рушается. В данной главе мы продвинемся ближе к центру, чтобы выяснить, как деформируются звездные орбиты.

Предположим, что масса черной дыры M_h значительно превышает массу любой отдельной звезды m_* , но значительно меньше полной массы всех звезд в скоплении $m_* N$. Дыра характеризуется радиусом разрушения r_D , с которого звезды никогда не возвращаются. Этот радиус по порядку величины равен наибольшему из двух: либо радиусу Шварцшильда

$$r_s = \frac{2GM}{c^2} = 3 \times 10^5 (M_h/m_\odot) \text{ см}, \quad (50.1)$$

либо радиусу приливного разрушения

$$r_T \approx 1,5 \times 10^{11} \left(\frac{M_h}{m_\odot} \right)^{1/3} \left(\frac{m_\odot}{m_*} \right)^{1/3} \frac{r_*}{r_\odot} \text{ см}. \quad (50.2)$$

(Напомним, что $r_\odot \approx 7 \cdot 10^{10}$ см.)

Радиус Шварцшильда характеризует простые невращающиеся черные дыры. В литературе по общей теории относительности показано, что энергия и момент импульса частицы определяют, насколько близко она может подойти к черной дыре, прежде чем потерять устойчивость и быть захваченной ею. Для круговой орбиты достаточно характерным значением является $3r_s$. Приливный радиус «Роша» можно получить из анализа, проведенного в конце гл. 49 для звезд, по внутреннему строению аналогичных Солнцу. Как следует из обсуждения гл. 48, звезды с прицельным параметром $\sim 2r_T$ могут быть захвачены в результате приливной диссипации и их орбиты в конце концов стягиваются к радиусу r_s , если $r_s < r_T$. Заметим, что при $M_h \geq 3 \cdot 10^8 m_\odot$ радиус Шварцшильда больше приливного радиуса. Поэтому очень массивные черные дыры с большой вероятностью «заглатывают» звезды целиком. При этом приливное разрушение звезд может приводить к высвобождению меньшего количества газа, который высвечивается в процессе медленной аккреции. Некоторые исследователи (см., например, *Hills, 1975*) допускают, что это явление может быть важным фактором в образовании источников энергии квазаров и активных ядер галактик.

Величина радиуса разрушения r_D настолько мала, что в каждый момент вблизи него может находиться лишь небольшое число звезд. Чтобы установить их судьбу, оказывается необходимым проследить за отдельными довольно сложными орбитами этих звезд. Их относительные скорости обычно так велики, что они слабо влияют друг на друга, если только не сближаются настолько, чтобы произошло столкновение. Такой режим высоких скоростей устанавливается внутри области, где скорости звезд $\sim (GM_h/r)^{1/2}$ приблизительно равны скорости убегания с поверхности звезды, т. е. внутри области радиуса

$$r_{\text{столкн}} \approx 7 \times 10^{10} \left(\frac{M_h}{m_\odot} \right) \frac{r_*}{r_\odot} \frac{m_\odot}{m_*} \text{ см}. \quad (50.3)$$

В большинстве случаев $r_s < r_T < r_{\text{столкн}}$.

На расстояниях от сингулярности, превышающих $r_{\text{столкн}}$, обращаются звезды, число которых уже достаточно для того, чтобы оценка их статистического распределения стала разумной. Эти звезды могут быть, а могут и не быть связаны с сингулярностью. Но даже в отсутствие такой связи сингулярность сильно влияет на их движение вплоть до расстояния, определяемого соотношением (2.1):

$$r_h \approx \frac{GM_h}{v_c^2} \approx 2 \times 10^{16} \left(\frac{M_h}{10^3 m_\odot} \right) \left(\frac{n_c}{10^5 \text{ пс}^{-3}} \right)^{-1} \left(\frac{r_c}{1 \text{ пс}} \right)^{-2} \left(\frac{m_\odot}{m_*} \right) \text{ см.} \quad (50.4)$$

Здесь использована теорема вириала для оценки средней дисперсии скоростей v_c^2 в скоплении радиуса r_c со средней плотностью n_c .

Внутри области радиуса r_h звезды движутся по приблизительно кеплеровским орбитам со скоростями $v \approx (GM_h/r)^{-1/2}$. Энергия и, что более важно, момент импульса этих орбит медленно диффундируют посредством парных сближений с характерным временем релаксации τ_R (2.9). Ничто не гарантирует, что распределение этих орбит окажется изотропным. Коллапсирующее вещество, образовавшее сингулярность, могло вызвать сегрегацию орбит, как это обсуждалось в гл. 46. Анизотропия орбит может быть связана с предшествующим неоднородным коллапсом, поскольку коллапс, режим которого близок к свободному падению, происходит с характерным временем, равным динамическому времени пересечения, а это время намного меньше, чем τ_R . Анизотропия связана также с процессом поглощения и разрушения звезд, который опустошает орбиты с малым моментом импульса.

Модели, объединяющие эти виды анизотропии, очень сложны. Поэтому, чтобы развить общий подход к явлению, легче всего предположить, что основное физическое содержание его может быть описано с помощью изотропной функции распределения. Напомним, что она, как показано в гл. 39, зависит только от энергии: $f = f(E)$, где $E = v^2/2 - GM_h/r$. При этих условиях не удастся получить $f(E)$ самосогласованным образом, однако было высказано предположение, что простая степенная зависимость

$$f(r, v) \propto E^p \quad (50.5)$$

является хорошей аппроксимацией, что подтверждается численными экспериментами (см. *Shapiro and Marchant*, 1978, и ссылки в этой работе). Для такой степенной зависимости и при дисперсии скоростей $v \propto r^{-1/2}$ получим распределение плотностей

$$n(r) = \int f d^3v \propto r^{-(p+3/2)}. \quad (50.6)$$

Чтобы определить величину p , нужно найти полный поток кинетической энергии из области радиуса r_D . По мере более глубокого проникновения некоторых звезд внутрь потенциальной ямы, расположенной вокруг области радиуса r_D , часть своей кинетической энергии они передают окружающим звездам, как это рассматривалось в гл. 43–46. Характерным временем таких процессов

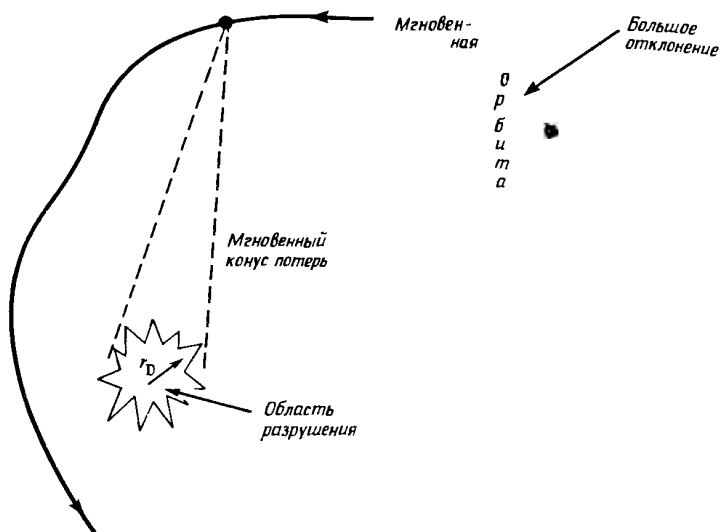


Рис. 48. Схематическое изображение движения звезды вокруг сингулярности в скоплении.

является время релаксации τ_R , в течение которого звезды, получающие кинетическую энергию, дрейфуют наружу. Поток энергии дрейфующих звезд через сферическую оболочку радиуса r составляет $\sim n(r) v^2(r) r^2 v_{\text{дрейф}} \approx n(r) v^2(r) r^3 / \tau_R(r)$. Предполагая, что этот поток энергии не зависит от радиуса (Bahcall and Wolf, 1976), и подставляя τ_R из (2.9), где $v \propto r^{-1/2}$, получаем зависимость $n(r) \propto r^{-3/4}$, которая достаточно хорошо соответствует результатам численного моделирования системы на основе уравнения Фоккера — Планка. Это означает, что направленный наружу поток энергии почти полностью определяется внутренним граничным условием при радиусе r_D , если какие-либо дополнительные источники и стоки энергии в скоплении отсутствуют.

Однако такое решение не может применяться повсеместно. В любой точке скопления момент импульса звезды может вследствие диффузии случайно оказаться столь малым, что она сразу попадет внутрь области радиуса r_D . Это привело к идее существования «конуса потерь» (Frank and Rees, 1976), который показан на рис. 48. Записывая удельную энергию звезды через радиальную и тангенциальную составляющие ее скорости и удельный угловой момент $J = r v_t$, получаем

$$E = \frac{1}{2} v_r^2 + \frac{J^2}{2r^2} - \frac{GM_h}{r}. \quad (50.7)$$

При максимальном сближении в непосредственной близости от области

радиуса r_D радиальная скорость звезды равна нулю. Как следует отсюда, чтобы звезда не попала в конус потерь, ее минимальный момент импульса должен составлять

$$J_{\min}(E) = \left[2 \left(E + \frac{GM_h}{r_D} \right) \right]^{1/2} r_D. \quad (50.8)$$

Поскольку звезды с моментом импульса, меньшим $J_{\min}$, разрушаются (если только последующее сближение не вытолкнет их из конуса потерь), функция распределения при $J < J_{\min}$ должна быть сильно обеднена. Это означает, что в общем случае функция распределения не может быть изотропной и, таким образом, $f = f(E, J)$. Оговорка, сделанная в начале этого абзаца, существенна. Это условие определяет радиус области, внутри которой обеднение функции распределения, связанное с конусом потерь, становится заметным. Характерное время переноса момента импульса вследствие диффузии составляет $\tau_R \propto v^3/n \propto r^{3/4}$ при том же пространственном распределении плотности и скорости, что и в обсуждавшемся выше примере. Характерное время захвата областью разрушения $\tau_{\text{пересеч}} \propto r/v \propto r^{1/2}$. Таким образом, должен существовать критический радиус, при котором оба этих характерных времени равны. Внутри области такого радиуса диффузия момента импульса не успеет до разрушения звезды изменить ее орбиту. Вне этой области звезде, возможно, удастся избежать разрушения.

Чтобы найти действительное значение этого критического радиуса, необходимо знать точную структуру и характер взаимодействия орбит в модели скопления. Следует заметить, что при распределении плотности, пропорциональном $r^{-3/4}$, критический радиус оказывается меньше r_h и гравитационный потенциал сингулярности определяет поле скоростей в области захвата конусом потерь. Поскольку τ_R довольно сильно зависит от радиальной координаты, особенно вблизи критического радиуса, а звезды с различными значениями момента импульса имеют неодинаковые радиальные координаты в течение разных отрезков времени, τ_R необходимо усреднить по орбитам. Это означает также, что критический радиус будет до некоторой степени зависеть от пути образования центральной сингулярности и характера получившихся при этом орбит. В результате может произойти заметная сегрегация орбит (гл. 47). В том случае, если имеется тенденция к установлению стационарного состояния за характерное время τ_R , некоторые из этих временных характеристик могут быть сглажены. Соответственно многие интересные астрономические эффекты могут не проявиться.

Большинство этих эффектов, особенно эффекты излучения, определяются скоростью захвата массы. Это тоже зависит от точного вида орбит, близких к области радиуса r_D . Однако если ввести простое предположение о том, что все звезды с близким к изотропному распределением скоростей, которые достигли радиуса r_D , поглощаются, то скорость этого поглощения можно легко оценить по порядку величины. Любопытно, что в своей существенной части анализ гл. 17 можно с равным успехом применять и к захвату звезд черной дырой, и к захвату частиц пыли звездой. В выражении (17.6) для эффективно-

го сечения захвата преобладает второй член, поэтому можно написать

$$\frac{dm}{dt} \approx \rho_* \sigma v \approx 10^{-15} \frac{\rho_*}{(m_\odot/\text{пс}^3)} \frac{r_D}{r_\odot} \frac{M_h}{m_\odot} \frac{1}{v_* (\text{км/с})} m_\odot \cdot \text{год}^{-1}. \quad (50.9)$$

Здесь v_* — усредненное значение среднеквадратичной скорости звезд при $r > r_h$ вдали от сингулярности. Кроме того, ρ_* представляет собой усредненную плотность массы звезд, которая в дальнейшем, так же как и v_* , должна быть определена для конкретной модели. Формула (50.9) должна быть также уточнена с учетом относительного числа и положения связанных и несвязанных орбит. Тем не менее, поскольку значение $10^{-15} m_\odot \cdot \text{год}^{-1}$ соответствует скорости выделения энергии массы покоя $\sim 6 \cdot 10^{31}$ эрг/с, ясно, что энерговыделение, сравнимое с энерговыделением квазара, возможно и в ядрах галактик. В меньшем масштабе шаровых скоплений этот процесс также предполагался в качестве одного из источников активности в диапазоне высоких энергий.

Помимо излучения распадающихся звезд, которое они испускают по мере падения на сингулярность, возможно наблюдение и некоторых прямых динамических эффектов, которым подвержена дисперсия скоростей окружающих звезд. Для этого необходимо высокое пространственное и спектральное разрешение. Простое наблюдение распределения интенсивности излучения в ядре недостаточно, так как этим областям могут быть свойственны быстрые изменения отношения массы к светимости в пространстве и во времени. Синхротронное, комптоновское, свободно-свободное и свободно-связанное излучения, а также свет звезд могут давать в сочетании запутанную картину. На фоне этой картины нелегко выделить дисперсию скоростей звезд, которая вблизи массивной сингулярности изменяется как $v \propto r^{-1/2}$.

Связь между динамикой и светимостью — особенно светом звезд — может быть также искажена анизотропией дисперсии скоростей. Эта анизотропия может остаться от более раннего процесса образования сингулярности, которая, возможно, имела компаньона. Ее могут поддерживать также крупномасштабные неоднородности плотности, сильная корреляция звездных орбит, а также постоянное падение вещества в ядро. Другими словами, вовсе не обязательно, чтобы она исчезала по прошествии характерного времени релаксации τ_R . Если сильная корреляция орбит отсутствует, эффекты анизотропии могут быть выведены из моментов (8.19) бесстолкновительного уравнения Больцмана (при подходящей аппроксимации путем замыкания системы уравнений). Уравнения (8.14) и (8.15) показывают, что в зависимости от вида орбит анизотропия скоростей может либо увеличивать, либо уменьшать градиент плотности.

Результат, возможно, будет более очевидным, если уравнение (8.15) записать в сферических координатах:

$$\frac{d(n\overline{v_r^2})}{dr} = -n \frac{GM(r)}{r^2} - n \left(\frac{2\overline{v_r^2}}{r} - \overline{v_T^2} \right). \quad (50.10)$$

Только в случае изотропного движения (или движения какого-либо другого, специально подобранного вида) тангенциальная составляющая среднеквадратичной скорости равна удвоенной радиальной составляющей. Чтобы решить уравнение (50.10), необходимы, разумеется, дополнительные предположения, как указывалось в гл. 8. Но даже без таких предположений видно, что если преобладание радиальных скоростей с ростом радиуса увеличивается, то градиент плотности падает наружу быстрее, чем в изотропном случае. Это в свою очередь влияет на картину светимости.

Общий вид ядра галактики, в котором звезды разрушаются массивным компактным объектом или черной дырой, можно было бы описать словами Уоллеса Стивенса:

Сначала луч, за ним — второй,
Потом их тысячи на небе засияли.
И каждый — как орбита и звезда; и свет дневной
Они в себя неистово вобрали.

51. РОЛЬ РАСПРЕДЕЛЕННОГО ФОНА

Влияние протяженного фона на скопление имеет больше общего с влиянием центральной точечной массы, чем могло бы показаться с первого взгляда. В обоих случаях орбиты звезд определяются распределением внешней массы, а не их собственным гравитационным полем. Отсюда следует, в частности, что основные физические процессы, обсуждавшиеся в ч. I, должны усредняться с учетом конкретного распределения орбит в каждой системе.

Наличие распределенного фона подтверждается результатами различных наблюдений. Кривые вращения галактик, особенно гигантских спиральных галактик, полученные с помощью наблюдения излучения облаков нейтрального водорода на волне 21 см, иногда выглядят гораздо более пологими, чем можно было бы предполагать в соответствии с оптическим изображением галактики. Это отклонение от кеплеровского соотношения между расстоянием и скоростью может указывать на существование окружающего галактику гало. Полная масса этого гало очень неопределенна. Чтобы производить заметный динамический эффект, она должна быть по меньшей мере сравнима с массой звезд галактики, но может и значительно превышать ее. Природа такого гало неизвестна. Внутри галактик орбиты шаровых скоплений определяются распределенным звездным фоном, а возможно также и гало.

Применительно к более крупным масштабам проблема «скрытой массы» в случае скоплений галактик уже обсуждалась в гл. 41 и 42. Решение этой проблемы может быть связано с невидимой массой, распределенной по всему скоплению. Масса очень горячего газа внутри скоплений, обнаруженного по его рентгеновскому излучению, оказывается обычно на порядок величины меньше. Здесь возможны различные предположения относительно происхождения невидимой массы; это может быть, например, газ, потерянный прото-

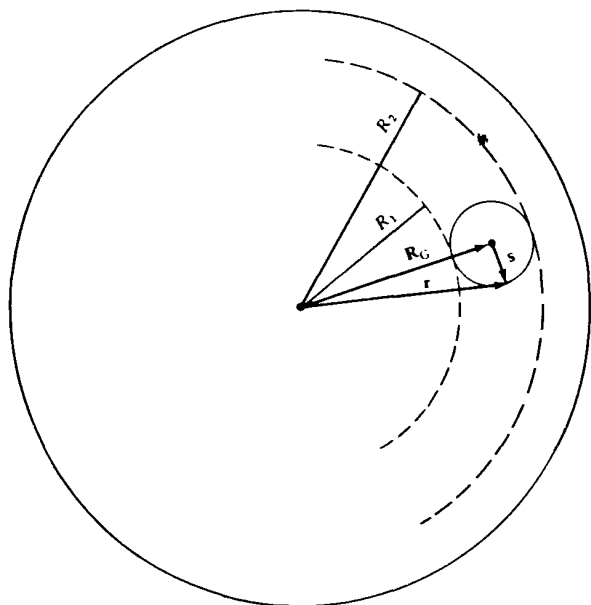


Рис. 49. Геометрия приливного взаимодействия сферической подсистемы со сферически распределенным фоном.

галактиками во время их образования или впоследствии оторванный от галактик действием динамического давления при движении во внешнем газе, или же массивные нейтрино, или другие гипотетические элементарные частицы, которые в больших количествах имелись во Вселенной на ранних стадиях ее существования. Много таких моделей было разработано достаточно детально, но пока неясно, есть ли среди них правильные, а если есть, то какие.

Каково бы ни было происхождение распределенного фона, его динамическое воздействие на сферические системы может быть значительным. Самым простым из эффектов такого воздействия является изменение приливного предела. Это показано на рис. 49 для случая сферической подсистемы (например, шарового скопления или галактики), находящейся внутри фоновой сферической системы (например, галактики или скопления галактик). Расстояние r до произвольного элемента, который отстоит от центра подсистемы на расстоянии s , связано с расстоянием до центра подсистемы простым соотношением $r = R_G + s$. Сила, действующая со стороны фона на элемент, находящийся в точке r , имеет три составляющих: это сила, действующая со стороны вещества, находящегося ближе к центру, чем подсистема, сила со стороны той части заключенной между радиусами R_1 и r оболочки, которая перекрывается с подсистемой, и поправочный член, необходимый для исключения фона

внутри подсистемы (поскольку он учитывается как часть собственной массы подсистемы). Учет этого последнего члена соответствует предположению, что внутри подсистемы содержится фоновая сфера отрицательной массы. Результирующая сила, действующая на элемент со стороны находящейся за радиусом r оболочки, равна нулю. Полная сила, действующая со стороны фона, поэтому равна

$$F_b = -\frac{GM_b(R_1)}{r^3}r - \frac{Gr}{r^3} \int_{R_1}^r 4\pi x^2 \rho_{\text{обол}}(x) dx + \frac{GM_b(s)}{s^3}s, \quad (51.1)$$

где $M_b(R_1)$ — масса фона внутри сферы радиуса R_1 , а $M_b(s)$ — масса фона внутри сферы радиуса s .

Как подсказывает физическая интуиция, здесь имеются два очевидных предельных случая. Если подсистема расположена в центре фона, то $F_b = 0$, исходя из соображений симметрии. Это сразу видно и из уравнения (51.1), так как в этом случае $R_G = 0$, $r = s$, $R_1 = 0$, $M_b(R_1) = 0$ и два последних члена сокращаются. Вторым предельным случаем является постоянная плотность фона, здесь F_b — константа, и действие на подсистему приливной силы отсутствует. При этом сумма направленной вдоль r компоненты силы со стороны массы $M_b(s) \propto s^3$ и силы, действующей со стороны оболочки, уравновешивают направленную вдоль r силу, действующую со стороны массы $M_b(R_1)$, оставляя, таким образом, только постоянную силу, направленную вдоль радиуса R_G . В этом частном случае уравнение (51.1) также показывает критичность зависимости силы F_b от фона и подсистемы, остающихся при этом сферическими.

Чтобы вычислить силу, действующую со стороны оболочки в случае неоднородного распределения плотности, можно предположить, что оболочка достаточно тонка и может быть описана с помощью линейного градиента плотности

$$\rho_{\text{обол}} = \frac{1}{(R_2 - R_1)} [\rho_1(R_2 - r) + \rho_2(r - R_1)], \quad (51.2)$$

где $\rho_1 = \rho(R_1)$ и $\rho_2 = \rho(R_2)$. Тогда вклад оболочки в силу F_b в уравнении (51.1) легко вычисляется. Соответствующую приливную силу можно оценить, исходя из разности между значениями действующей в направлении r фоновой силы вдоль R_G в центре масс подсистемы и на расстоянии s от центра. Эта разность составит приблизительно $F_{\text{прил}} \approx (dF_b/dr)\Delta r = s dF_b/dr$. Из последних двух уравнений получаем

$$\begin{aligned} s^{-1}F_{\text{прил}} = & \frac{2GM_b(R_1)}{r^3} - \frac{4}{3}\pi G \frac{(\rho_1 R_2 - \rho_2 R_1)}{(R_2 - R_1)} \left[1 + \frac{2R_1^2}{r^3} \right] \\ & + \frac{\pi G(\rho_1 - \rho_2)}{(R_2 - R_1)} \left[2r + \frac{2R_1^2}{r^3} \right] + \frac{2}{3}\pi G(\rho_1 + \rho_2). \end{aligned} \quad (51.3)$$

В последнем члене при расчете массы $M_b(s)$ плотность фона была аппроксимирована ее средним значением $\frac{1}{2}(\rho_1 + \rho_2)$.

Смысл последней формулы станет яснее, если предположить, что подсистема находится далеко от центра фона, так что $r \approx R_G \approx R_1 \approx R_2$, но $R_1 = R_G - s$ и $R_2 = R_G + s$, откуда $R_2 - R_1 = 2s$. В этом случае

$$s^{-1}F_{\text{прил}} = \frac{2GM_b(R_1)}{R_1^3} - \frac{4}{3}\pi G(\rho_1 + \rho_2). \quad (51.4)$$

Правая часть этого выражения не зависит от s , а ее первый член представляет собой обычную приливную силу, действующую со стороны фона, заключенного внутри радиуса R_1 . Второй член соответствует оболочке и эквивалентен приливному эффекту фона отрицательной массы, содержащейся внутри подсистемы. Необходимость учета второго члена зависит от того, велика или мала масса фона по сравнению с массой подсистемы.

Для оценки приливного предела (независимо от точного вида отдельных орбит) нужно вычислить значение s , при котором $F_{\text{прил}} = GM_{\text{подсист}}(s)/s^2$. Действие заключенной между радиусами R_2 и R_1 оболочки состоит в увеличении приливного радиуса по сравнению со случаем полностью внешней по отношению к галактике приливной силы. Это можно показать и посредством геометрического построения, поскольку основной вклад в приливную силу, действующую на скопление в точках R_1 и R_2 вдоль R_G со стороны оболочки, дают ее ближайшие к скоплению слои, и результирующая этой силы направлена к центру галактики. Отношение двух членов в правой части соотношения (51.4) равно отношению средней плотности внутри области радиуса R_1 к средней плотности оболочки. По мере того как это отношение стремится к единице, приливный радиус становится бесконечным, что согласуется с полученным выше основным результатом для случая однородной плотности. При равенстве других параметров приливное ограничение может служить тестом для определения полной массы, распределенной внутри скопления, включая любую невидимую фоновую массу.

Влияние распределенного фона может также приводить к изменению эволюции конечных систем. Сегрегация орбит, создаваемая меняющимся фоном, уже обсуждалась в гл. 47. Такие процессы, как сегрегация масс, равнораспределение энергии и динамическое трение могут существенно различаться в зависимости от характера орбитального движения в среднем поле распределенного фонового вещества. Эта область является пока малоисследованной.

52. ФИЗИЧЕСКИЕ СТОЛКНОВЕНИЯ ЗВЕЗД

Звезды могут исчезать, растворяясь постепенно,
И теряясь безвозвратно в черном хаосе Вселенной.
П. Шелли

Первый расчет, приведенный в самом начале этой книги, относился к усло-

виям, при которых расстояние между звездами достаточно велико для того, чтобы их можно было считать материальными точками. Теперь мы подошли к противоположной ситуации. В ядрах галактик плотность звезд может быть так высока, что они испытывают физические столкновения. Что же в этом случае происходит?

Для характерной звезды радиуса r среднее время между столкновениями составляет

$$t_c = \frac{1}{n\sigma V} = \frac{9,7 \cdot 10^{21} R^{7/2} (\text{пс})}{N^{3/2} (m^{1/2} r^2 / m_{\odot}^{1/2} r_{\odot}^2) (1 + 8,8 \cdot 10^7 R (\text{пс}) r_{\odot} / (Nr))} \text{ лет.} \quad (52.1)$$

При выводе этого соотношения использовалась теорема вириала $\langle v^2 \rangle = G N m / 2 R$, записанная для среднего политропного распределения (см. гл. 54) со среднеквадратичным радиусом R . Средний квадрат скорости $\langle v^2 \rangle$ равен половине квадрата относительной скорости V^2 при большом расстоянии между звездами. Кроме того, геометрическое эффективное сечение увеличено здесь на множитель $(1 + 2 G m / r V^2)$, чтобы учесть гравитационное притяжение (см. разд. 17.6 и 50.9), а приливная деформация не учитывается. Представление о вычисленном таким образом времени столкновения можно получить из табл. 6, где оно сравнивается со средним временем релаксации τ_R из формулы (2.9) и со среднеквадратичной дисперсией скоростей в сферических системах, состоящих из звезд солнечного радиуса.

Основная линия раздела в теории звездных столкновений пролегает между столкновениями, которые могут приводить к полному разрушению звезд, и всеми остальными столкновениями. Можно легко оценить условия разрушительного лобового столкновения. Большая часть кинетической энергии переходит в тепловую, и существенное высвобождение газа может произойти при условии положительности полной энергии. Если каждая звезда является политропой с индексом n , то, используя выражение для ее потенциальной энергии, выведенное (читателем) в разд. 54.1, получим условие ее полного разрушения в виде

$$\frac{1}{2} m \left(\frac{V}{2} \right)^2 - \frac{3}{2(5-n)} \frac{G m^2}{r} > 0. \quad (52.2)$$

(Вспомним, что энергия связи звезды составляет половину ее потенциальной энергии.) В случае двух звезд типа Солнца ($n = 3$) отсюда следует, что $V \gtrsim 1500$ км/с. Этот результат является приблизительным, поскольку он не учитывает эффекты ударных волн, добавочную энергию, уносимую газом, который высвобождается со скоростью, превышающей скорость убегания, а также зависимость гравитационного поля от времени.

Лобовое столкновение звезды типа Солнца со своим зеркальным отраже-

нием исследовалось с помощью двумерного численного гидродинамического моделирования (*Seidel and Cameron, 1972*). Во время столкновения происходит сжатие звезд и разогрев слоя газа, который затем выбрасывается в плоскости, перпендикулярной начальной относительной скорости. Одновременно с этим во внешних слоях образуется ударная волна отдачи, которая приводит к выбросу газа с поверхностей звезд, — эффект, более заметный при низких скоростях столкновения. Численные эксперименты, в которых относительная скорость на удалении была равна нулю, 1000 и 2000 км/с, показали, что соответственно около 5, 18 и 60% вещества звезд высвобождается в виде газа. Таким образом, неравенство (52.2), несмотря на простоту его вывода, представляет собой достаточно верный критерий разрушения.

Переписывая критерий разрушения (52.2) в более простом виде с использованием теоремы вириала для скопления, находим

$$\frac{V^2}{Gm/r} \approx \frac{N}{R/r} \approx 1. \quad (52.3)$$

Это соотношение означает, что столкновения становятся преимущественно разрушительными, когда плотность звезд столь высока, что звезды, расположенные вдоль радиуса скопления, окажутся вплотную друг к другу.

Таблица 6. Свойства компактных сферических звездных систем

Число звезд	Радиус R , пс	0,1	1	10	100
$N = 10^6$	Скорость звезд $\langle v^2 \rangle^{1/2}$, км/с	150	50	15	5
	Время релаксации τ_R , лет	$5,3 \cdot 10^5$	$1,7 \cdot 10^7$	$5,3 \cdot 10^8$	$1,7 \cdot 10^{10}$
	Время между столкновениями t_c , лет	$3,2 \cdot 10^8$	$1,1 \cdot 10^{11}$	$3,5 \cdot 10^{13}$	$1,1 \cdot 10^{16}$
$N = 10^8$	Скорость звезд	1500	500	150	50
	Время релаксации	$3,9 \cdot 10^6$	$1,2 \cdot 10^8$	$3,9 \cdot 10^9$	$1,2 \cdot 10^{11}$
	Время между столкновениями	$2,8 \cdot 10^6$	$5,2 \cdot 10^9$	$3,1 \cdot 10^{12}$	$1,1 \cdot 10^{15}$
$N = 10^{10}$	Скорость звезд	15 000	5000	1500	500
	Время релаксации	$3,1 \cdot 10^7$	$9,9 \cdot 10^8$	$3,1 \cdot 10^{10}$	$9,9 \cdot 10^{11}$
	Время между столкновениями	$3,1 \cdot 10^3$	$9,7 \cdot 10^6$	$2,8 \cdot 10^{10}$	$8,5 \cdot 10^{13}$

При значительном невыполнении критерия разрушения большая часть газа по-прежнему взаимодействует со сверхзвуковой (локальной) скоростью. Ударные волны превращают заметную часть кинетической энергии движения звезд в тепловую энергию, которая рассеивается затем в пространство. Таким образом, столкновение является сильно неупругим, и значительная часть вещества звезд слипается. Образовавшийся при этом протяженный объект пульсирует в течение некоторого времени, а затем превращается в сформировавшуюся звезду. Во время столкновения температура и плотность не достигают значений, достаточных для генерации больших количеств энергии посредством термоядерных реакций (*Spitzer and Saslaw, 1966; Mathis, 1967*).

Лобовыми являются лишь немногие столкновения; остальные требуют аккуратного рассмотрения с помощью приближенных методов. Их точная гидродинамика очень сложна и пока не слишком понятна. Некоторое понимание ее, по крайней мере в пределах поставленных вопросов, было достигнуто на основе простых моделей (*Spitzer and Saslaw, 1966; Colgate, 1967; Sanders, 1970*). В этих моделях обе звезды разделены на длинные параллелепипеды, вытянутые параллельно относительной скорости звезд. Каждый такой параллелепипед сталкивается только с геометрически соответствующим ему параллелепипедом другой звезды, причем их изменения никак не связаны с изменениями в остальной части звезды. При столкновении кинетическая энергия движения звезды преобразуется в теплоту, а импульс сохраняется. Эта тепловая энергия делится между двумя параллелепипедами пропорционально той кинетической энергии, которую они имели перед столкновением (в системе центра масс). Если тепловая энергия элемента массы превосходит энергию его связи с той звездой, с которой он связан сильнее, то предполагается убегание этого элемента массы.

Точность этих предположений, естественно, очень неопределенна, особенно при низкой скорости столкновений, когда в плоскости, перпендикулярной относительной скорости движения, может быть передан импульс значительной величины. В соответствии с этим приближением лобовое столкновение при низких скоростях не должно сопровождаться потерей массы, поэтому следует ожидать, что с уменьшением прицельного параметра p точность этого приближения ухудшается. Кривая потеря массы в зависимости от p должна обращаться в нуль в точке $p = 0$ и при $p > 2r$ и иметь максимум где-то посередине. Например, расчеты Сандерса для столкновения двух звезд типа Солнца с относительной скоростью $V = 62$ км/с дают максимум полной потери массы, составляющий приблизительно $0,04 m_{\odot}$, при значении прицельного параметра $p \approx 0,4$ солнечного радиуса.

При каких условиях происходит слипание двух звезд? Если при первом столкновении достаточное количество энергии орбитального движения преобразуется в теплоту, звезды становятся связанными. Последующие столкновения будут приводить к уменьшению большой полуоси орбиты до тех пор, пока большая часть массы не слипнется окончательно. Это происходит в том случае, когда преобразующаяся в теплоту кинетическая энергия движения превосходит орбитальную кинетическую энергию двух звезд на бесконечности.

Рассмотренные в гл. 48 динамические и приливные явления, которые приводят к усилению связи, также могут способствовать слипанию. Без точных расчетов количество необратимо потерянной энергии остается неизвестным, т. е. неизвестно, насколько неупругим является столкновение. Предположив некоторую степень неупругости, можно рассчитать количество тепловой энергии, выделяющейся в каждом из сталкивающихся параллелепипедов, получить полную энергию сложением ее по всем параллелепипедам и таким образом определить, является ли эта энергия достаточной для слипания звезд.

Для применения этого метода к звездам разной массы важно знать распределение плотности внутри них. Средняя плотность более массивных звезд в общем случае ниже, чем менее массивных. Распределение из плотности во многом определяет ответ на вопрос, смогут ли две сталкивающиеся звезды с большой разницей масс преобразовать достаточное количество энергии и импульса орбитального движения в теплоту, для того чтобы произошло их слипание. Колгейт первый предположил, что звезды массы $m \geq 50m_{\odot}$ не будут слипаться с более многочисленными звездами поля, обладающими массой $\sim 1m_{\odot}$, а эти звезды поля будут проиизывать их насквозь. Таким образом, должен существовать верхний предел массы звезды, которая может образоваться посредством такого слипания. Тем не менее расчеты Сандерса показали, что этот результат сильно зависит от конкретной модели и слипание может все-таки происходить, но при более низких скоростях. Полная ясность в этом важном вопросе пока не достигнута.

Звезды очень "питательны". Большая звезда может продлить свою жизнь, "заглатывая" малую, что объясняется двумя главными причинами. Во-первых, при этом увеличиваются запасы водородного горючего. Во-вторых, вследствие перемешивания в ядро массивной звезды попадает больше водорода, что приводит к увеличению времени ее жизни на главной последовательности. Таким образом, превратится или нет массивная звезда в сверхновую, зависит от отношения характерного времени перемешивания вещества звезды, вызванного слипанием, к времени ее жизни на главной последовательности в данном состоянии. Если перемешивание ядра образовавшейся в результате слипания звезды происходит быстрее, чем горение в нем водорода, то возможно образование крайне массивных звезд в центре звездной системы.

"Проглоченная" звезда должна быть "переварена", а затем "усвоена". Полученная при столкновении дополнительная теплота приводит к расширению образовавшейся в результате слипания звезды до размеров, превосходящих те, которые соответствуют ее полной массе. Такой вздувшийся объект пульсирует в течение некоторого времени и в конце концов по истечении промежутка, в несколько раз превышающего время релаксации порядка $(G\rho)^{-1/2}$ (около полутора часа для звезды типа Солнца), приходит к состоянию механического равновесия. Для достижения теплового равновесия требуется характерное время диффузии излучения Кельвина — Гельмгольца (около $3 \cdot 10^7$ лет для звезды типа Солнца). Его можно сравнить со значениями характерного времени столкновений из табл. 6.

Наши представления о строении и эволюции объектов, образовавшихся в

результате слипания звезд, крайне поверхностны. Это одна из наиболее важных и сложных проблем в изучении плотных звездных систем.

При нецентральных столкновениях разрушение звезд преобладает в том случае, когда скорость столкновения намного выше скорости убегания. Используя упомянутую выше простую модель, Спитцер и Саслау рассчитали количество газа, высвобождаемого при столкновении двух одинаковых звезд главной последовательности при различных значениях прицельного параметра и относительной скорости. Усредняя эти результаты по всем расстояниям максимального сближения, учитывая вес каждого расстояния, соответствующего геометрическому эффективному сечению, которое пропорционально ρR^2 , можно получить полную потерю массы звездами Δm в единицах звездной массы m как функцию отношения $V_{\text{убег}}/V$ скорости убегания с поверхности одной из двух звезд к относительной скорости этих двух звезд на бесконечности. Характерные приближенные значения $\Delta m/m$ составляют 0,04; 0,06; 0,1; 0,2; 2 соответственно для значений $V_{\text{убег}}/V$, равных 0,4; 0,2; 0,1; 0,05; 0. При $V_{\text{убег}}/V \rightarrow 0$ отношение $\Delta m/m$ резко возрастает и существенное разрушение звезд в результате нецентральных столкновений начинает играть важную роль.

Другой важный вопрос, связанный с разрушительными столкновениями, — это вопрос о количестве энергии, преобразуемой в энергию релятивистских частиц ударными волнами. Де Юнг (*De Young*, 1968) рассчитал численную гидродинамическую модель лобового столкновения двух звезд типа Солнца с относительной скоростью 5000 км/с. Обычно ударные волны преобразуют около 3% полной энергии столкновения в релятивистские электроны с энергией $\geq 0,5$ МэВ. Эта доля сравнительно невелика, но эффективность преобразования могла бы заметно возрасти при наличии у звезд хотя бы слабого магнитного поля, которое в процессе столкновения сжимается и усиливается.

Столкновения звезд вместе с естественными потерями массы в ходе их эволюции являются важным источником горячего газа в скоплениях. Часть этого газа может покидать скопление. Оставшийся газ может перемещаться в центр и частично перерабатываться в новые звезды. Чтобы обозначить возможные направления завершения этого процесса, в следующих главах дается краткое описание некоторых типов взаимодействия звезд с газом. Столкновение звезд может представлять собой механизм формирования новых звезд из старых или даже лежать в основе процесса образования квазаров.

53. ЕЩЕ О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ЗВЕЗД С ГАЗОМ

И все всклокоченные блуждающие звезды.

У. Йейтс

53.1. ГАЛАКТИЧЕСКИЙ ВЕТЕР

Столкновения звезд, новые, сверхновые, планетарные туманности, звезд-

ный ветер и вспышки на звездах — все эти явления поставляют газ звездным скоплениям и галактикам. Основной вопрос состоит в том, сколько этого газа охлаждается и остается в скоплении, а сколько покидает его. Ответить на него трудно, поскольку ответ полностью зависит от деталей процесса потери массы и от взаимодействий с участием газа, потерянного разными звездами. Газовые облака могут сталкиваться, и обусловленное ударными волнами выделение теплоты может приводить к испарению. Движущиеся через галактику звезды могут проходить через облака, вызывая их разогрев, как описано в гл. 17. Ясно, что результаты будут сильно зависеть от конкретной модели, поэтому мы ограничимся рассмотрением очень простого примера, иллюстрирующего природу галактического ветра. (Строгий анализ см. в работе *Mathews and Baker, 1971.*)

Необходимое условие убегания атома или иона из скопления состоит в том, что его энергия должна примерно вдвое превышать среднюю энергию хаотического движения звезд в расчете на один атом. (Достаточные условия убегания определяются средней длиной свободного пробега между столкновениями.) Если возможно очень грубое усреднение по скоплению, то, предполагая приблизительное равномерное распределение энергии между звездами и газом (в расчете на одну частицу), получим эквивалентную температуру убегания $T_{\text{убег}} \approx \mu v^2 / 3k \approx 2 \cdot 10^7 (\mu / 0,5) (v_* / 1000 \text{ км/с})^2$, где μ — средняя масса частиц в единицах массы протона. Из табл. 6 видно, что в обычных системах, где время столкновения звезд гораздо меньше хаббловского времени, газ должен нагреваться до $5 \cdot 10^7 \text{ К}$. Примерно такую энергию вследствие столкновений получает большая часть газа, поэтому частицы, принадлежащие высокоэнергетическому хвосту, получающегося в результате этих столкновений распределения, могут легко покинуть пределы скопления.

Эволюция газа может быть описана путем модификации гидродинамических уравнений (15.2) — (15.4). Эти уравнения применимы в каждой отдельной точке пространства, а условия в разных местах скопления будут, естественно, сильно различаться. К этим уравнениям можно было бы добавить желаемое распределение источников горячего газа и стоков холодного и выяснить, каким образом это повлияет на общий поток. Можно сделать еще проще, предположив, что гидродинамические уравнения применяются к величинам, усредненным по более крупным объемам системы, чем обычно, или по ансамблю макроскопически подобных систем. Тогда впрыскивание газа в систему будет описываться введением в уравнение непрерывности члена, соответствующего источнику. Этот член может зависеть от пространственных и временной переменных, но особенно удобно взять его пропорциональным плотности звезд. В сферической системе координат, где через v обозначена радиальная скорость, получим

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \rho v) = a \rho_*, \quad (53.1)$$

Здесь $\rho(r, t)$ — плотность газа, а $a(t)$ — темп потери массы звездами.

Уравнение сохранения импульса также должно претерпеть изменения, поскольку средний импульс впрыснутого в систему газа в общем случае отличается от импульса окружающего его потока. Эти изменения опять-таки зависят от конкретных локальных взаимодействий, но их можно представить в среднем для простого случая, когда результирующая скорость впрыснутого газа равна нулю. Если при этом локальные взаимодействия быстро сообщают новому газу скорость окружающего потока, то общий поток должен потерять импульс эквивалентной величины. Поэтому уравнение (15.3) приобретает вид

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho v \frac{\partial v}{\partial r} = - \frac{\partial P}{\partial r} - \frac{GM(r)\rho}{r^2} - a\rho_* v. \quad (53.2)$$

Гравитационный член является сферическим решением уравнения Пуассона (15.4) и включает всю массу внутри области радиуса r независимо от того, принадлежит ли она звездам, газу, центральному массивному объекту или распределенному фону.

Чтобы замкнуть систему уравнений, давление и плотность можно связать либо политропным уравнением состояния (40.4), либо уравнением идеального газа. В последнем случае в уравнениях появится температура, так что для замыкания системы потребуются дополнительное уравнение — первый закон термодинамики (29.10). На этой стадии проявляются детали, связанные с механикой нагрева и охлаждения газа на атомном уровне, а также с поступающей от источников энергией и теми адиабатическими изменениями, которые вызваны только изменениями плотности. Система, наконец, замкнется, если выразить изменение тепловой энергии через локальные плотность, температуру, давление и скорость потока газа.

Продолжение темы галактического ветра быстро увело бы нас за рамки настоящей книги. Поэтому мы ограничимся здесь тем, что выясним, каким образом существенный эффект, определяемый наличием распределенного источника, изменяет ситуацию по сравнению с той, которая наблюдается при ветре от единственного источника, например от звезды. Первая важная аппроксимация состоит в рассмотрении стационарного ветра и соответственно приравнивании нулю производных по времени в уравнениях (53.1) и (53.2). С физической точки зрения это приближение вряд ли оправдано в случае активных галактик, хотя для достаточно спокойных звезд типа Солнца такая аппроксимация вполне разумна. Тем не менее остаются необъясненными изменения, связанные с процессами впрыскивания массы, а также тепловая и другие неустойчивости в ветре. Поэтому сложные модели, носящие частный характер, в действительности не могут быть точнее простых. Вторая важная аппроксимация состоит в предположении изотермичности ветра. Она позволяет обойтись без введения в уравнение состояния члена, ответственного за перенос излучения. Эта аппроксимация более оправдана, чем первая, если учитывать действие высокой плазменной проводимости и тот факт, что поступающая энергия усредняется по всей системе.

Таким образом, наш пример определяется уравнением состояния идеально-

го газа $P = kT\rho/\mu m_H$ с $\mu = 1/2$ для преимущественно водородной плазмы и постоянной T . Полезно ввести безразмерные скорость и радиус, записав (в обозначениях солнечного ветра)

$$\xi \equiv \frac{r}{r_0}, \psi \equiv \frac{v^2}{U^2}, U^2 = \frac{2kT}{m_H}. \quad (53.3)$$

Здесь r_0 — некоторый радиус сравнения, взятый в области начала истечения ветра (где a может быть принято равным нулю); этот радиус может быть связан с центральным массивным объектом, если такой объект имеется в данной модели. Скорость U — это наиболее вероятная (т. е. равная $(3/2)^{1/2}$ от среднеквадратичной) скорость протонов в распределении Максвелла — Больцмана. Для придания модели большей гибкости, запишем плотность звезд в виде

$$\rho_*(\xi) = \rho_*(1)\xi^{-\beta}, \quad (53.4)$$

хотя могут быть использованы и многие другие ее виды.

Эти предположения и обозначения приводят к простому дифференциальному уравнению для радиальной зависимости скорости ветра. Проинтегрируем сперва уравнение (53.1), выразив постоянную интегрирования через плотность газа $\rho_g(1)$ и скорость v_0 при значении радиуса r_0 . Результат вместе с уравнением состояния подставим в (53.2), что позволит избавиться от плотности и давления. (Читатель может в качестве упражнения найти отличия, к которым привело бы введение ненулевого градиента температуры.) В результате при $\rho_g(1)/\rho_*(1) \ll 1$ получим

$$\left(1 - \frac{1}{\psi}\right) \frac{d\psi}{d\xi} = \frac{4[1 + (\beta - 1)f/2]}{(1 + f)} \frac{1}{\xi} - \frac{2GM(\xi=1)}{r_0 U^2} \frac{1}{\xi^2} - \frac{2ar_0}{(1 + f)v_0 \rho_g(1)} \frac{\rho_*(\xi)}{\xi^2} \psi - \frac{2G[M(\xi) - M(1)]}{r_0 U^2} \frac{1}{\xi^2}, \quad (53.5)$$

где

$$f(\xi) \equiv \frac{a\rho_*(1)}{(3 - \beta)\rho_g(1)} \frac{r_0}{v_0} \xi^{3 - \beta}. \quad (53.6)$$

Физический смысл функции $f(\xi)$ виден из определения (53.6). Отвлекаясь от радиальной зависимости, можно сказать, что эта величина по существу представляет собой отношение времени прохождения ветра через объем радиуса r_0 к времени, необходимому для удвоения плотности газа внутри этого объема вследствие впрыскивания массы. (Радиальную зависимость можно выразить через полную массу внутри объемов радиуса r_0 и r .)

В пределе отсутствия впрыскивания массы $a = f = 0$, и первые три члена уравнения (53.5) дают основное уравнение теории солнечного ветра (Parker, 1963). Последний член соответствует гравитационному воздействию распределенной массы. Благодаря этому члену при $\psi < 1$ величина ψ увеличивается

быстрее с ростом радиуса, а при $\psi > 1$ быстрее уменьшается. Значение $\psi = 1$, или $v = U$, очевидно, является критической точкой уравнения. Поскольку скорость звука $(\gamma P / \rho)^{1/2} = (5kT / 3\mu m_H)^{1/2}$ приблизительно равна U , это значение иногда называется звуковой точкой (sonic point), хотя эти величины и не обязаны совпадать. Таким образом, распределенное гравитационное поле стремится удержать скорость потока вблизи значения критической скорости; его влияние зависит от конкретного вида функции $M(\xi)$.

Уравнение (53.5) можно проинтегрировать аналитически или численно и получить широкий спектр различных моделей. Некоторые их общие свойства, однако, следуют непосредственно уже из самого вида уравнения:

1. Обычно существует критическая точка, в которой $\psi = 1$ или $d\psi/d\xi = 0$. Ее положение можно найти, положив правую часть уравнения (53.5) равной нулю; оно зависит в основном от распределения массы и от мощности источников. В этой критической точке существует двойное решение, причем правильный поток следует выбирать исходя из граничных условий. Например, если при малых значениях радиуса в правой части уравнения преобладает второй член, то при $\psi < 1$, $d\psi/d\xi > 0$, так что с ростом радиуса скорость возрастает. Она сможет возрасти и далее, в критической точке, а затем стать и сверхзвуковой, только в том случае, когда используется ветвь, соответствующая $\psi = 1$. На ветви $d\psi/d\xi = 0$ при $\psi < 1$ скорость уменьшается при больших значениях радиуса, когда правая часть становится положительной, и поток не становится сверхзвуковым.

2. Если тепловая скорость U достаточно мала, то в правой части преобладают отрицательные гравитационные члены, и при $\psi > 1$ скорость с ростом радиуса уменьшается. При $\psi < 1$ она увеличивается с ростом радиуса. Это приводит к установлению приблизительного равенства между скоростью потока и дисперсией скоростей в газе и к предотвращению убегания, что обсуждалось в начале данной главы. Если величина U очень велика, то положение критической точки определяется в основном скоростью впрыскивания массы.

3. Точное значение β , характеризующее степень концентрации звезд, не играет большой роли, если только речь не идет о случае $f \gtrsim 1$. При существенном впрыскивании массы в приблизительно однородное скопление характер ветра меняется. Если правая часть всегда отрицательна, то критический радиус отсутствует и скорость истечения массы при $\psi > 1$ уменьшается, чтобы в конце концов упасть до нуля под действием увеличивающейся при больших значениях радиуса гравитационной силы.

4. Поведение ветра заметно меняется также в том случае, когда гравитационное поле определяется преимущественно центральной массой внутри области радиуса r_0 .

5. Такой подход позволяет легко ввести в рассмотрение как стоки, так и источники газа. С помощью стоков можно описать аккреционные потоки. Возможно существование внутренних областей падения массы и внешних областей ее истечения, разделенных радиусом застоя, при котором скорость равна нулю. В некоторых случаях чистого падения, которое становится сверхзвуковым, образуются ударные волны.

Реальные ветры могут оказаться подверженными тепловой неустойчивости; некоторые области охлаждаются, в них появляются более плотные облака. Будут ли облака двигаться к внешним областям под действием импульса ветра или же поддерживающее их давление исчезнет и они упадут на центр скопления — это зависит от точного вида каждой модели.

53.2. ЦЕНТРАЛЬНЫЙ ДИСК И ОБРАЗОВАНИЕ ЗВЕЗД

Падающий на центр скопления газ может скапливаться там, по крайней мере временно. Общий характер его распределения сильно зависит от его результирующего момента импульса. Газ, теряемый отдельными звездами в быстро вращающихся скоплениях, сохраняет большую часть своего момента импульса. Газ, потерянный в ходе столкновений звезд в ядрах галактик, может иметь удельный момент импульса ниже среднего, поскольку вероятность столкновения звезд с противоположно направленными моментами импульса несколько выше, чем звезд, движущихся в одном направлении.

Предположим, что мы хотим простым способом оценить по порядку величины радиус получившегося диска. Пусть потерянный звездами газ сохраняет свой результирующий момент импульса. Его удельный момент импульса (на единицу массы) составляет $J = Rv_\theta$, где R и v_θ — соответственно характерный радиус (например, среднеквадратичный) и скорость вращения скопления. Определим безразмерный параметр ε , который соотносит величину J с начальным радиусом (совпадающим с радиусом скопления R_0) и с начальной среднеквадратичной дисперсией скоростей звезд v_0 :

$$\varepsilon \equiv \frac{J}{R_0 v_0} = \frac{R v_\theta}{R_0 v_0} = \frac{v_{\theta 0}}{v_0} = \frac{R_d v_{\theta d}}{R_0 v_0}. \quad (53.7)$$

Здесь индексом “d” обозначены величины, относящиеся к сформировавшемуся диску газу.

Дисперсию v_0 можно определить из теоремы вириала, а относящееся к диску значение $v_{\theta d}$ — из приближенного условия равновесия центробежной и гравитационной сил:

$$v_{\theta d}^2 \approx \frac{GmN_d}{R_d}. \quad (53.8)$$

Здесь N_d — число звезд внутри области радиуса R_d , отсчитываемого от центра скопления. Итак, из последних двух уравнений получим

$$\frac{R_d}{R_0} \approx \varepsilon^2 \frac{N}{N_d}. \quad (53.9)$$

Если охлаждение и сжатие газа происходят намного быстрее, чем динамическая эволюция звезд, можно предположить, что справедливо приближенное равенство $N_d \approx NR_d^3/R^3$ и найти

$$\frac{R_d}{R_0} \approx \varepsilon^{1/2}. \quad (53.10)$$

Заметим, что содержание этой формулы не очень отличается от простого соотношения размерности. В ней не принимается во внимание форма диска, входящие в теорему вириала точные параметры и точный вид распределения плотности. Появившиеся таким образом погрешности до некоторой степени компенсируют друг друга, но точный результат могут дать только достаточно подробные модели. Основной вывод заключается в том, что слабое вращение скопления, например соответствующее $\varepsilon = 0,1$, может оказаться фактором, предотвращающим сжатие газового диска в направлении, перпендикулярном его моменту импульса.

В направлении, параллельном моменту импульса, диск поддерживается давлением газа, магнитным давлением и турбулентностью. Оценку шкалы высот диска по вертикали можно поэтому получить, комбинируя соотношения (15.3) и (15.4) для случая гидростатического равновесия:

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dz} \right) = \nabla^2 \phi = -4\pi G \rho_{\text{полн}}. \quad (53.11)$$

Здесь $\rho_{\text{полн}}$ — полная плотность, а ρ — плотность газа. Если можно ограничиться учетом одного только давления газа, то из уравнения состояния идеального газа следует, что $P = \rho c^2$, где c — скорость звука. Кроме того, если гравитационная сила определяется преимущественно звездами, то динамическое время пересечения составит $\tau_c = (4\pi G \rho_{\text{полн}})^{-1/2} = R/v_0$. Полагая оператор градиента равным величине z_g^{-1} , обратной шкале высот газа, видим, что

$$\frac{z_g}{R} \approx \frac{c}{v_0}. \quad (53.12)$$

Таким образом, толщина диска может быть очень незначительной по сравнению с радиусом звездной системы, даже если он состоит из горячих ионизованных облаков. Если же имеется еще давление магнитного поля и турбулентность, то приближенное соотношение (53.12) остается справедливым, но величину c^2 в этом случае следует заменить на соответствующую полному давлению энергию, приходящуюся на одну частицу. Такой диск является сильно идеализированным и, вероятно, неустойчив, поскольку существует возможность распада его на звезды.

Об образовании звезд в ядрах скоплений неизвестно практически ничего. Мы едва начинаем понимать такие процессы, происходящие в более нормальных условиях. Каким образом скорость звездообразования и получающийся в результате спектр масс зависят от плотности и химического состава вещества — ответ на этот вопрос должно дать будущее.

53.3 ЗВЕЗДЫ В ПЛОТНОМ ГАЗЕ

В обычных условиях звезда излучает в пустоту. А что произойдет со звездой, если она окружена облаком газа столь плотного, что оно перестает быть прозрачным? Ограничится ли дело тем, что звезда присоединит облако к своей атмосфере? Или, может быть, звезда потеряет устойчивость и попытается сбросить с себя это облако?

Эти вопросы, относящиеся к звездам в центре ядер галактик, возникают в связи с тем, что по мере эволюции в ядре скапливается все больше газа. Чтобы описать эволюцию звезды, погруженной в горячий газ или поле излучения, необходимо к уравнениям внутреннего строения звезды, рассмотренным в гл. 44, присоединить уравнения звездного ветра для ее внешней атмосферы. Уравнения звездного ветра — это не что иное, как частный случай уравнений (53.1) и (53.2), который отличается тем, что вся гравитирующая масса заключена внутри сферической границы звезды, а член, соответствующий источнику массы, равен нулю. Таким образом, эволюция погруженных (в газ или поле излучения) звезд связана (в какой-то степени) с проблемой галактического ветра.

Главный параметр, связывающий внутреннюю структуру звезды с ее внешним ветром, — это температура окружающего поля излучения. Излучение должно находиться в тепловом равновесии с оттекающим газом. Если звезду окружает только поле излучения, а вещество отсутствует, то применяется критическое решение уравнения звездного ветра [см. обсуждение после формулы (53.6)] с неограниченно возрастающей скоростью. В этом случае температура излучения определяет единственную величину самосогласованной скорости потери массы звезды. Точные численные модели (Kato, 1980) показывают, что скорость потери массы очень сильно зависит от внешней температуры. Если эта температура примерно в 100 раз превышает эффективную температуру поверхности звезды, то испарение звезды происходит приблизительно за характерное время Кельвина — Гельмгольца $\sim Gm^2/rL$, где m , r и L — соответственно масса, радиус и светимость звезды. Для звезды солнечной массы это время составляет около $3 \cdot 10^7$ лет.

В более реальном случае звезда окружена как плотным газом, так и излучением. Здесь применяется докритическое (дозвуковое) решение уравнения звездного ветра, в котором нулевая скорость достигается при конечном значении плотности. Это решение может быть обрезано при таком значении скорости или плотности, которое согласуется со свойствами окружающего газового облака. Такой параметр обрезания вместе с температурой дает граничные условия, определяющие скорость потери массы. Эта скорость заметно меньше, чем в случае, определяемом граничными условиями, которые соответствуют чистому излучению, и истечение может превратиться в аккреционный поток, если плотность облака окажется слишком высокой. Если же звезда быстро движется через облако, что соответствует еще более реальному случаю, на потерю массы могут повлиять сильные ударные волны (см. разд. 17.1).

Являются ли условия в квазарах и ядрах галактик достаточно экстремаль-

ными, чтобы обеспечить растворение звезд, — этот интригующий вопрос ждет своего разрешения в будущем. Возможно, это последнее взаимодействие в системе звезда — газ по характеру противоположно начальной конденсации звезд из газа.

54. ЗАДАЧИ И ПРИЛОЖЕНИЯ

54.1 ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ ПОЛИТРОПЫ

На основе рассмотрения гл. 46 или уравнения (43.1) покажите, что отрицательная гравитационная потенциальная энергия политропы с показателем n (гл. 40), полным радиусом R и массой M составляет

$$W = \frac{3}{5-n} \frac{GM^2}{R}. \quad (1)$$

Значение $n = 0$ дает результат для сферы с однородной плотностью. Более высокие значения n соответствуют сферам с более высокой плотностью в центре и с большей потенциальной энергией. На первый взгляд при $n = 5$ величина W бесконечна. Очевидно, это должно противоречить результатам разд. 18.2. Выход из этого противоречия состоит в том, что при $n = 5$ радиус также бесконечен и величина $(5 - n)R$ стремится к конечному пределу.

54.2 НЕСООТВЕТСТВИЕ МЕЖДУ ВИРИАЛЬНОЙ И СВЕТАЩЕЙСЯ МАССАМИ В СИСТЕМЕ С ПОТЕРЕЙ МАССЫ

Одно из возможных объяснений несоответствия между вириальной и светящейся массами в скоплении галактик заключается в расширении скопления. Это расширение может быть обусловлено потерей массы галактиками. Среди механизмов такой потери массы можно назвать выбросы из ядер галактик, гравитационное излучение образующихся черных дыр и испускание массивных частиц высоких энергий, но существуют и другие механизмы. Предположим, что потеря массы описывается уравнением $\dot{M} = -M/\tau_1$, где τ_1 — соответствующее характерное время. Покажите, что при $\tau_1 > \tau_c$, где τ_c — динамическое время пересечения, расширение является адиабатическим и теорема вириала выполняется, т. е. эволюцию системы можно представить как последовательность квазистатических состояний. Покажите также, что если $\tau_1 < \tau_c$, то наблюдается расхождение между вириальной и светящейся массами, которое описывается соотношением

$$\frac{M_v}{M} = \left(1 + \frac{t - t_0}{\tau_{co}}\right) \exp\left(\frac{t - t_0}{\tau_1}\right), \quad (1)$$

где индекс “0” соответствует начальному времени. [Ikeuchi, Publ. Astron. Soc. Japan, 31, 169 (1979).] Это расхождение может быть значительным.

54.3. ВЛИЯНИЕ МОМЕНТА ИМПУЛЬСА НА СЖАТИЕ ЗВЕЗДНОЙ СИСТЕМЫ

В гл. 44 и 45 мы рассмотрели сжатие ядра невращающейся звездной системы. В разд. 53.2 было показано, как вращение препятствует сжатию газового диска. Примените анализ разд. 53.2 к вращающейся звездной системе, эволюция которой происходит посредством испарения без изменения полной энергии и удельного момента импульса. Покажите, что она превращается в уплощенный диск, радиус которого равен приблизительно

$$\frac{R_d}{R_0} = \epsilon^{4/3}. \quad (1)$$

Поэтому момент импульса не столько препятствует сжатию звездной системы, сколько приводит к образованию газового диска. Исследуйте этот процесс при других видах сжатия. [Spitzer and Saslaw, *Aph. J.*, 143, 400 (1966).]

54.4 РАСЧЕТ РЕЗУЛЬТАТОВ РОГАТОЧНОГО ВЫБРОСА

Полуаналитическая статистическая теория позволяет понять многие важные результаты численных экспериментов по расчету рогаточного выброса из тройных систем. Она объясняет такие свойства, как распределение эксцентриситета и направление момента импульса остающейся двойной, а также распределение массы, скорости и телесного угла частицы, покидающей систему.

Основное приближение этой теории состоит в том, что после взаимодействия, приводящего к рогаточному выбросу, вероятность данного результата считается пропорциональной фазовому объему, который соответствует этому результату. Дальнейшие приближения заключаются в том, что полные энергия и момент импульса являются единственными сохраняющимися величинами и что приводящее к рогаточному выбросу взаимодействие происходит в ограниченном объеме конфигурационного пространства. На основе этих предположений покажите, что полный объем фазового пространства, соответствующий данному результату, составляет

$$\sigma = \int \delta(E_B + E_s - E_0) \delta(\mathbf{J}_B + \mathbf{J}_s - \mathbf{J}_0) d\mathbf{r} d\mathbf{p} d\mathbf{r}_s d\mathbf{p}_s. \quad (1)$$

Здесь полная энергия

$$E_0 = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m \dot{r}_s^2 - \frac{G m_a m_b}{|\mathbf{r}|} \quad (2)$$

и полный момент импульса

$$\mathbf{J}_0 = \mu(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) + m(\mathbf{r}_s \times \dot{\mathbf{r}}_s), \quad (3)$$

где

$$\mu = \frac{m_a m_b}{m_B}, \quad m = \frac{m_s \dot{m}_B}{M}. \quad (4)$$

Здесь индексы a, b, B и s обозначают соответственно частицы a и b , полную двойную и одиночный убегающий объект, M — полная масса, r — разность между координатами компонент двойной и r_s — координата одиночного убегающего объекта относительно центра масс двойной. Заметим, что δ -функция от векторного аргумента представляет собой произведение δ -функций от соответствующих скалярных координат.

Поскольку вероятность того, что конечная конфигурация в фазовом пространстве будет принадлежать данному набору конфигураций, пропорциональна занимаемой этим набором части фазового объема, необходимо вычислить 12-мерный интеграл (1). Соответствующая область интегрирования может оказаться очень сложной, так как пределы интегрирования по энергии и моменту импульса зависят друг от друга. Интегрирование можно выполнить с помощью сочетания аналитического метода и метода Монте-Карло. Результаты такого подхода хорошо согласуются с численными экспериментами с системой трех тел, описанными в гл. 49 [Nash and Monaghan, MNRAS, 184, 119 (1978)].

55. ЛИТЕРАТУРА

ГЛАВА 37

- Gunn J.E., Gott J.R., III. On the infall of matter into clusters of galaxies and some effects on their evolution, *Ap. J.*, 176, 1 (1972).
 Roxburgh I.W., Saffman P.G. The growth of condensations in a Newtonian model of the steady-state universe, *MNRAS*, 129, 181 (1965).
 Sandage A.R. The ability of the 200-inch telescope to discriminate between selected world models, *Ap. J.*, 133, 355 (1963).

ГЛАВА 38

- Aarseth S.J., Lecar M. Computer simulations of stellar systems, *Ann. Rev. Astron. and Astrophys.*, 13, 1 (1975).
 Aarseth S.J., Saslaw W.C. Virial mass determinations of bound and unstable groups of galaxies, *Ap. J.*, 172, 17 (1972).
 Hénon M. L' evolution initiale d' un amas spherique, *Annals. Astrophys.*, 27, 83 (1964).
 Kadomtsev B.B., Pogutse O.P. Collisionless relaxation in systems with Coulomb interactions, *Phys. Rev. Lett.*, 25, 1155 (1970).
 King I.R. The structure of star clusters, I. An empirical density law, *A. J.*, 67, 471 (1962).
 Lynden-Bell D. Statistical mechanics of violent relaxation in stellar systems, *MNRAS*, 136, 101 (1967).
 Saslaw W.C. Gravithermodynamics. II. Generalized statistical mechanics of violent agitation, *MNRAS*, 143, 437 (1969).
 Saslaw W.C. Violent relaxation in galaxies and stellar systems, *MNRAS*, 150, 299 (1970).
 Shu F.H. On the statistical mechanics of violent relaxation, *Ap. J.*, 225, 83 (1978).
 Zwicky F. The age of large globular clusters of galaxies, *PASP*, 72, 365 (1960).

ГЛАВА 40

- Bailey M.E., MacDonald J.* A comparison between velocity dispersion profiles of de Vaucouleurs and King galaxy models, *MNRAS*, **194**, 195 (1981).
- Chandrasekhar S.* An Introduction to the Study of Stellar Structure (Chicago: Chicago UP), 1939. [Имеется перевод: Введение в учение о строении звезд, — М.: ИЛ, 1950.]
- Huntley J.M., Saslaw W.C.* The distribution of stars in galactic nuclei: loaded polytropes, *Ap. J.*, **199**, 328 (1975).
- Kent S.M., Gunn J.E.* The dynamics of rich clusters of galaxies, I. The Coma cluster, *A. J.*, **87**, 945 (1982).
- King I.R.*, The structure of star clusters, II. Steady-state velocity distributions, *A.J.*, **70**, 376 (1965).
- King I.R.* The structure of star clusters, III. Some simple dynamical models, *A.J.*, **71**, 64 (1966).
- Spitzer L., Härm R.* Evaporation of stars from isolated clusters, *Ap. J.*, **127**, 544 (1958).

ГЛАВА 41

- Aarseth S.J., Saslaw W.C.* Virial mass determinations of bound and unstable groups of galaxies, *Ap. J.*, **172**, 17 (1972).
- Smith H., Jr.* The potential-estimation method of cluster mass determinations, *Ap.J.*, **259**, 423 (1982).

РАЗДЕЛ 42.1

- Bahcall N.A.* Clusters of galaxies, *Ann. Rev. Astron. and Astrophys.*, **15**, 505 (1977).
- Bahcall N.A.* Clusters of galaxies, Highlights of Astronomy, **5**, 699 (1980).
- Beers T.C., Geller M.J., Huchra J.P.* Galaxy clusters with multiple components, I. The dynamics of Abell 98, *Ap. J.*, **257**, 23 (1982).
- Bucknell M.J., Godwin J.G., Peach J.V.* Studies of rich clusters of galaxies-V. Photometry and luminosity functions for eight clusters, *MNRAS*, **188**, 579 (1979).
- Воронцов-Вельяминов Б.А., Досталь В.А., Метлов В.Г.* Самое компактное гнездо галактики VV 644. — Письма в Астрон. ж., 1980, т. 6, с. 394.
- Capelato H.V., Gerbal D., Mathez G., Mazura A., Salvador-Sole E., Sol H.* On the luminosity-segregation in rich clusters. Application to Coma, *Ap. J.*, **241**, 521 (1980).
- Dekel A., Shaham J.* Secondary peak in clusters of galaxies — a clue to their formation, *Astron. and Astrophys.*, **85**, 154 (1980).
- Dressler A.* The dynamics of the cluster of galaxies A2029, *Ap. J.*, **243**, 26 (1981).
- Faber S.M., Gallagher J.S.* Masses and mass of light ratios of galaxies, *Ann. Rev. Astron. and Astrophys.*, **17**, 135 (1979).
- Field G.B., Saslaw W.C.* Groups of galaxies: Hidden mass or quick disintegration? *Ap. J.*, **170**, 199 (1971).
- Godwin J.G., Peach J.V.* Brightest members of clusters of galaxies, *Nature*, **227**, 364 (1979).

- Hartwick F.D.A.* Groups of spiral galaxies around the Coma cluster and upper limits to its mass, *Ap. J.*, **248**, 423 (1981).
- Klinkhamer F.R.* Groups of galaxies with large crossing times, *Astron. and Astrophys.*, **91**, 365 (1980).
- Quintana H., Havlen R.J.* A detailed photometric and structural study of the southern cluster of galaxies CA 0340-538, *Astron. and Astrophys.*, **79**, 70 (1979).
- Quintana H.* Core radii and mass segregation in clusters of galaxies, *A.J.*, **84**, 15 (1979).
- Rose J.A., Graham J.A.* Mass-to-light ratios of two compact groups of galaxies, *Ap. J.*, **231**, 320 (1979).
- Struble M.F.* Velocity dispersion profiles of clusters of galaxies, *A.J.*, **84**, 27 (1979).
- Struble M.F., Rood H.J.* Binary-galaxy-rich clusters of galaxies, *Ap. J.*, **251**, 471 (1981).
- Thompson L.A., Gregory S.A.* The luminosity function of the Coma cluster galaxies, *Ap. J.*, **242**, 1 (1980).

РАЗДЕЛ 42.2

- Dressler A.* The spectrum of the central luminosity spike in M87, *Ap. J. Lett.*, **240**, L11 (1980).
- Faber S.M.* The structure of galactic nuclei: recent observations, *Highlights of Astronomy*, **5**, 135 (1980).
- Geller M.S., Turner E.L., Bruno M.S.* Night-to-night variations in the optical continuum of NGC 1275, *Ap. J. Lett.*, **230**, L141 (1979).
- Jones D.L., Sramek R.A., Terzian Y.* VLBI Observations galactic nuclei, *Ap. J.*, **246**, 28 (1981).
- Петросян А.Р., Саакян К.А., Хачикян Э.Е.* Галактики с UV-континуумом, имеющие двойные и кратные ядра, II. Астрофизика, 1978.
- Saslaw W.C.* Theory of galactic nuclei, in *IAU Symp.*, v.58, J.R.Shakeshaft (ed.) (Dordrecht: D.Reidel), 1974, p. 305—34.
- Tonry J.L., Davis M.* Velocity dispersion of elliptical and SO galaxies, I. Data and mass-to-light ratios, *Ap. J.*, **246**, 666 (1981).
- Tremaine S., Ostriker J.P.* The dynamics of the nucleus of M31, *Ap. J.*, **256**, 435 (1982).

РАЗДЕЛ 42.3

- Burbidge E.M., Sandage A.R.* Properties of two intergalactic globular clusters, *Ap. J.*, **127**, 527 (1958).
- Hanes D.* The luminosity distribution of globular clusters in the Virgo cluster of galaxies, *Mem. RAS*, **84**, 45 (1977).
- Hanes D., Madore B.* (eds.). Globular Clusters (Cambridge UP), 1980.
- Hodge P.W.* Radii, orbital properties, and relaxation times of dwarf elliptical galaxies, *Ap.J.*, **144**, 869 (1966).
- Madore B.F., Arp H.C.* Three new faint star clusters, *Ap. J. Lett.*, **277**, L103 (1979).

Sandage A.R., Hartwick F.D.A. Remote halo globular cluster Palomar 5, *A.J.*, 82, 459 (1977).

ГЛАВА 43

Антонов В.А. Решение задачи об устойчивости звездной системы с законом плотности Эмдена и сферическим распределением скоростей, *Вестник ЛГУ*, №19 (1962).

Bonnor W.B. Bolye' s law and gravitational instability, *MNRAS*, 116, 351 (1956).

Bonnor W.B. Stability of polytropic gas spheres, *MNRAS*, 118, 523 (1958).

Horwitz G., Katz J. Steepest descent technique and stellar equilibrium statistical mechanics, III. Stability of various ensembles, *Ap. J.*, 222, 941 (1978).

Katz J. On the number of unstable modes of an equilibrium, *MNRAS*, 183, 765 (1978).

Katz J. On the number of unstable modes of an equilibrium, II, *MNRAS*, 189, 817 (1979).

Lynden-Bell D., Wood R. The gravo-thermal catastrophe in isothermal spheres and the onset of red-giant structure for stellar systems, *MNRAS*, 138, 495 (1968).

Thirring W. Systems with negative specific heat, *Z. Physik*, 235, 339 (1970).

ГЛАВА 44

Aarseth S.J. Dynamical evolution of stars in clusters, I, *MNRAS*, 126, 233 (1963).

Cohn H. Late core collapse in star clusters and the gravothermal instability, *Ap. J.*, 292, 339 (1980).

Hachisu I., Nakada Y., Nomoto K., Sugimoto D. Gravothermal catastrophe of finite amplitude, *Prog. Theor. Phys.*, 60, 393 (1978).

Larson R.B. A method for computing the evolution of star clusters, *MNRAS*, 147, 323 (1970).

Lynden-Bell D., Eggleton P.P. On the consequences of the gravothermal catastrophe, *MNRAS*, 191, 483 (1980).

Sugimoto D., Eriguchi Y., Hachisu I. Gravothermal aspects in the evolution of the stars and the universe, *Prog. Theor. Phys. Supp.*, 70, 154 (1981).

ГЛАВА 45

Aarseth S.J. Dynamical evolution of simulated star clusters, I. Isolated models, *Astron. and Astrophys.*, 35, 237 (1974).

Hénon M. Rates of escape from isolated clucters with an arbitrary mass distribution, *Astron. and Astrophys.*, 2, 151 (1969).

Spitzer L., Jr., Thuan T.X. Random gravitational encounters and the evolution of spherical systems, IV. Isolated systems of identical stars, *Ap. J.*, 175, 31 (1972).

ГЛАВА 46

Inagaki S., Saslaw W.C. Equipartition in multi-component gravitational systems. *Ap. J.*, 292, 339 (1985).

- Katz J., Taff L.G. Stability limits for "Isothermal" cores in globular cluster models: two component systems, *Ap. J.*, **246**, 476 (1983).
- Merritt D. Two component systems in thermal and dynamical equilibrium, *A. J.*, **86**, 318 (1981).
- Spitzer L., Jr. Equipartition and the formation of compact nuclei in spherical stellar systems, *Ap. J.*, **158**, L139 (1969).
- Spitzer L., Jr. Dynamical theory of spherical stellar systems with large N , in *IAU Symp.*, v. 69, A. Hayli (ed.) (Dordrecht: D.Reidel), 1975, p. 3.

ГЛАВА 47

- Lecar M. Stellar orbits in a time-varying gravitational field, *A.J.*, **71**, 706 (1966).
- Saslaw W.C. Orbit segregation in evolving galaxies and clusters of galaxies, *Ap. J.*, **216**, 690 (1977).

ГЛАВА 48

- Fabian A.C., Pringle J.E., Rees M.J. Tidal capture formation of binary systems and X-ray sources in globular clusters, *MNRAS*, **172**, 150 (1975).
- Heggie D.C. Binary evolution in stellar dynamics, *MNRAS*, **173**, 729 (1975a).
- Heggie D.C. The dynamical evolution of binaries in clusters, in *IAU Symposium*, v. 69, *Dynamics of Stellar Systems*, A.Hayli (ed.) (Dordrecht: Holland), 1975b, p. 73.
- Heggie D.C. Dynamical theory of binaries in clusters, in *Globular Clusters*, D.Hanes, B.Madore (eds.) (Cambridge UP), 1980, p. 281.
- Inagaki S. The effects of binaries on the evolution of globular clusters, *MNRAS*, **206**, 149 (1984).
- Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Механика*, — М.: Наука, 1973.
- Press W.H., Teukolsky S.A. On formation of close binaries by two-body tidal capture, *Ap. J.*, **213**, 183 (1977).
- Spitzer L., Jr., Hart M.H. Random gravitational encounters and the evolution of spherical systems, I. Method, *Ap. J.*, **164**, 399 (1971).

ГЛАВА 49

- Арнольд В.И. *Математические методы классической механики*. — М.: Наука, 1979.
- Hut P., Bahcall J.N. Binary-single star scattering, I. Numerical experiments for equal masses, *Ap. J.*, **268**, 319 (1983).
- Hut P. Binary-single star scattering, II. Analytic approximations for high velocity, *Ap. J.*, **286**, 342 (1983).
- Lin D.N.C., Saslaw W.C. The dressed slingshot and the symmetry of double radio galaxies, *Ap. J.*, **217**, 958 (1977).
- Pars L.A. *A Treatise on Analytical Dynamics* (London: Heinemann), 1965. [Имеется перевод: Парс Л.А. *Аналитическая динамика*. — М.: Наука, 1971.]
- Saito T. Massive compact objects in elliptical galaxy and their dynamical relation to the halo formation, *PASJ*, **29**, 421 (1977).

- Saslaw W.C., Valtonen M.J., Aarseth S.J.* The gravitational slingshot and the structure of extragalactic radio sources, *Ap. J.*, **190**, 253 (1974).
Valtonen M.J. Statistics of three-body experiments: probability of escape and capture, *Mem. RAS*, **80**, 77 (1975).

ГЛАВА 50

- Bahcall J.N., Wolf R.A.* Star distribution around a massive black hole in a globular cluster, *Ap. J.*, **209**, 214 (1976).
Frank J., Rees M.J. Effects of massive central black holes on dense stellar systems, *MNRAS*, **176**, 633 (1976).
Hills J.G. Possible power source of Seyfert galaxies and QSOs, *Nature*, **254**, 295 (1975).
Shapiro S.L., Marchant A.B. Star clusters containing massive, central black holes: Monte Carlo simulations in two-dimensional phase space, *Ap. J.*, **225**, 603 (1978).

ГЛАВА 52

- Colgate S.A.* Stellar coalescence and the multiple supernova interpretation of quasi-stellar sources, *Ap. J.*, **150**, 163 (1967).
De Young D.S. Two-dimensional stellar collisions, *Ap. J.*, **153**, 633 (1968).
Mathis J.S. Nuclear reactions during stellar collisions, *Ap. J.*, **147**, 1050 (1967).
Sanders R.H. The effects of stellar collisions in dense stellar systems, *Ap. J.*, **162**, 791 (1970).
Seidel F.G.P., Cameron A.G.W. A numerical hydrodynamic study of coalescence in head-on collisions of identical stars, *Ap. and Space Sci.*, **15**, 44 (1972).
Spitzer L., Jr., Saslaw W.C. On the evolution of galactic nuclei, *Ap. J.*, **143**, 400 (1966).

ГЛАВА 53

- Mathews W.G., Baker J.C.* Galactic winds, *Ap. J.*, **170**, 241 (1971).
Parker E.N. *Interplanetary Dynamical Processes* (New York: Interscience), 1963.
 [Имеется перевод: *Паркер Е.Н.* Динамические процессы в межзвездной среде. — М.: Мир, 1966.]
Kato M. Structure and mass loss rate of stars immersed in hot radiation field, *Prog. Theor. Phys.*, **64**, 847 (1980).

КОНЕЧНЫЕ ПЛОСКИЕ СИСТЕМЫ — ГАЛАКТИКИ

По мере того как мы прокладываем путь от идеализированных положений математической физики к неупорядоченной реальности существования астрономических систем, сама природа наших представлений претерпевает изменения. От основных принципов мы переходим к моделям, а от моделей — к частным случаям. Наблюдаемые же примеры обычно дают лишь намеки на какие-то приближения, которые требуются нам для интерпретации. Все, чем мы можем руководствоваться, — это путаница идей и надежда на то, что между ними существует связь. Мы приходим к пониманию либо через интуитивные догадки, либо случайно.

56. НАБЛЮДАЕМАЯ ДИНАМИКА ГАЛАКТИК

.... исследуй этот край коротких расстояний и точных положений.

У.Оден

История показывает, что Вселенная сложна. Чем тщательнее мы исследуем астрономические системы, тем больше разделов физики нам приходится привлекать для понимания их поведения и происхождения и тем в большей степени мы должны конкретизировать общую теорию, изложенную в первых трех частях книги, чтобы применить ее к отдельным системам. На протяжении всей этой книги мы последовательно исследовали все менее симметрич-

ные системы. Во второй части мы отступили от требования однородности, которым руководствовались в первой части. В третьей части мы отказались от бесконечных границ, которые рассматривали во второй части. Теперь в четвертой части мы близки к тому, чтобы отказаться от сферической симметрии, которой требовали в третьей части. В результате мы все меньше можем сказать об общей природе явлений. В качестве компенсации возросло обилие деталей, которые нередко можно сравнивать с наблюдениями. Хотя такие сравнения выходят за рамки вопросов, рассматриваемых в этой книге, краткий обзор наблюдаемых динамических свойств несферических систем будет нам полезен в дальнейшем.

Составляя представление о структуре галактик, мы должны обращать особое внимание на эффекты селекции. Их влияние на результаты наблюдений может быть очень тонким. Информация о внегалактических объектах накапливается медленно, и естественное желание получить интересные результаты после длинных ночей наблюдений часто подсознательно влияет на выбор объектов и областей исследования. Здесь надежды на улучшение ситуации связаны с применением универсальных и чувствительных детекторов.

Наши возможности принципиально ограничены яркостью ночного неба. Даже в наиболее темных областях нашей Галактики, т. е. в окрестностях галактических полюсов, усредненная интенсивность диффузного свечения составляет приблизительно 23 визуальные звездные величин на квадратной секунды дуги. Это свет слабых звезд нашей Галактики и слабых галактик; дополнительный вклад вносят земная атмосфера и межпланетная пыль, отражающая солнечный свет. С помощью фотографической техники можно выделять сигналы, уровень которых составляет несколько процентов от уровня свечения ночного неба. Чувствительные фотометрические и спектроскопические приемники, снабженные фильтрами, позволяют обнаруживать слабые объекты на частотах, где ночное небо темнее обычного. Однако такие наблюдения очень сложны и эффективны лишь в тех случаях, когда известно, что именно ищется. Таким образом, очень трудно обнаруживать объекты или различать их детали, если они обладают низкой поверхностной яркостью. То, что мы видим, может оказаться только вершиной айсберга, и мы не имеем понятия, что лежит под ним.

Объектам с низкой поверхностной яркостью противостоят объекты столь малого углового размера, что они выглядят как звезды. Жизнь слишком коротка, чтобы исследовать каждую ничтожную искорку света на небе. Поэтому квазары ускользали из наших астрономических сетей вплоть до 60-х годов. Около 150 лет назад нас предостерегал от подобных эффектов селекции английский астроном Джон Гершель. Собравшись с семьей своими современниками в лондонской таверне в январе 1820 г., он основал Королевское астрономическое общество. После этой встречи он подготовил документ, где перечислялись цели и предметы, интересующие Общество. Первоначальный набросок этого документа содержал фразу, не вошедшую в окончательный вариант. Гершель писал: "Есть еще возможность, что некоторые небесные тела совершенно новой природы, обнаружение которых может в будущем привести к

раскрытию наиболее важных тайн мироздания, скрываются под видом очень маленьких одиночных звезд, не отличимых от других, менее интересных тел, иначе как тщательной проверкой и часто повторяющимися наблюдениями". Мы не знаем, что заставило Гершеля убрать это провидческое замечание из окончательного варианта. Ясно, однако, что внешняя простота наблюдаемой картины не сковывала его воображение!

Тем не менее в основном методе классификации галактик исходят из простых внешних характеристик. Такой подход приемлем, пока эти внешние характеристики коррелируют с физическими свойствами; к счастью, в большей или меньшей степени так и оказывается в действительности. В зависимости от вида фотографических изображений, полученных в синей области спектра, галактики прежде всего делятся на эллиптические, спиральные и неправильные. Спирали далее подразделяются на два типа в зависимости от того, имеют ли они в центре структуру, похожую на перемычку (*Sandage, 1961; de Vaucouleurs, 1959*). Некоторые галактики нельзя причислить ни к одной из этих категорий, поэтому их называют пекулярными. Пекулярность может выражаться в искажении спиральных рукавов в присутствии связанного с галактикой спутника, наличии струйных выбросов, петель и значительных внутренних искажений (*Arp, 1966*).

На рис. 50 показаны примеры классификации нормальных галактик. Спиральные галактики классифицируются главным образом по степени выраженности и закрученности их рукавов. Наша собственная Галактика, по видимому, относится к типу Sb или Sc. Эллиптические галактики подразделяются в основном в зависимости от соотношения размеров их главных осей (например, 0,4 для типа E6). Корреляции свойств галактик привели к другим, более сложным классификационным схемам, где учитывается степень концентрации излучения к центру, хотя эта характеристика может сильно меняться в зависимости от цвета. Примером может служить тип cD, включающий

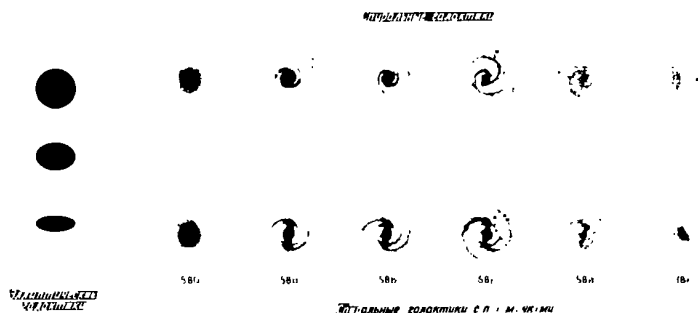


Рис. 50. Схематическое изображение объединенной схемы классификации галактик по Хабблу и де Вокулеру (*Roberts, 1972*).

массивные эллиптические галактики с диаметром более 100 кпс, большая часть излучения которых приходит из центра. Часто cD-галактики являются ярчайшими членами скоплений (см., например, *Thuan and Romanishin*, 1981). Основной вопрос, касающийся любой схемы классификации, состоит в том, что именно она характеризует — эволюционную последовательность или же начальные условия формирования звезд и галактик. Ответ на этот вопрос до сих пор не известен.

Физические свойства галактик варьируются в зависимости от формы. Рассмотрим сначала их размеры. Перед нами сразу же встает вопрос о том, как правильно определять размер галактики. Кажется разумным выбрать предельную поверхностную яркость, но если ее взять слишком большой, то останется лишь ядро галактики, если же ее взять слишком малой, то возникают проблемы с фоновой яркостью ночного неба. Существует и зависимость от цвета, а также от наклона плоскости галактики к лучу зрения, который влияет на изофоты. И почему следует ограничиваться только оптическим диапазоном? Радиоизлучение нейтрального водорода на волне 21 см или синхротронное рентгеновское излучение очень горячего газа также определяет размеры галактики, но снова другие. Ясно, что размеры галактики всегда зависят от способа их измерения. Имеется большое количество информации об оптических диаметрах для тысяч близких и ярких галактик (*de Vaucouleurs et al.*, 1976). Измерения основаны на предельной изофоте, соответствующей поверхностной яркости 25^m , 0 с квадратной секунды дуги, что составляет около 10% яркости ночного неба. Такие оптические диаметры равны примерно 1 кпс у карликовых галактик и 50 кпс у галактик-гигантов. Это, возможно, нижние пределы, если существуют еще слабо светящиеся гало. В радиодиапазоне видно, что некоторые галактики связаны с облаками нейтрального водорода, простирающимися на расстояния до 100 кпс, а другие выбрасывают релятивистские электроны на несколько мегапарсек.

Формы галактик более сложны, чем это схематически изображено на рис. 50. Наряду с существованием простых спиралей с двумя рукавами и совершенно правильной структурой, большинство спиралей имеет несколько рукавов или их куски. Они также содержат очень темные полосы и пятна, где свет звезд поглощается пылью. Спиральная галактика не всегда целиком лежит в одной плоскости. Многие из них искажены, изогнуты или скручены. Если такие детали преобладают, то галактику считают неправильной, и она попадает в конец классификационной последовательности. Многие неправильные галактики очень малы, и у некоторых из них есть какие-то намеки на спиральные рукава; для этих галактик характерна целая последовательность разнообразных форм.

Меняются ли формы галактик непрерывно от спиральных через S0 к эллиптическим — не ясно. Галактики типа S0 представляют собой довольно разнородную группу дискообразных галактик с огромным балджем (утолщением) в центре, иногда имеющих слабые спиральные рукава или перемычку. Вид перемычек может зависеть от цвета, в котором производится наблюдение.

Эллиптические галактики имеют более правильную форму, но при подробном исследовании также обнаруживаются искажения. Часто изофоты, если проследить их от центра к наружным областям, меняют свой эксцентриситет и ориентацию. На их вид может влиять проекция галактики, но это показывает, что галактики — не просто сплюснутые или вытянутые эллипсоиды. Их возможная трехосная структура исследуется дальше, в гл. 63. Нарушения эллиптичности могут иметь либо внутреннюю причину, либо вызываться приливным взаимодействием со спутниками.

Одной из полезных сторон простой классификации по форме является ее корреляция со спектральными свойствами звезд. Спектр и полная светимость звезды указывают на ее возраст и химический состав. На этой основе звезды галактик делятся на два типа населения с градиентами между ними. Население типа I состоит из звезд, богатых металлами, как молодых, так и старых ($\sim 10^8$ — 10^9 лет), тесно связанных с межзвездным газом. Они имеют почти круговые орбиты, лежащие в плоскости диска спиральных галактик; дисперсия их скоростей мала (примерно 20—60 км/с). Население типа II составляют очень старые звезды ($\sim 10^{10}$ лет), бедные металлами; их положения не связаны с межзвездным газом, а орбиты сильно наклонены и эксцентричны; дисперсия скоростей высока (примерно 150—200 км/с). Они находятся в гало спиральных галактик и в шаровых скоплениях. Если двигаться вдоль хаббловской последовательности от эллиптических галактик через все более раскрученные спирали к неправильным галактикам, то относительная роль звезд населения типа I возрастает. Вдоль этой последовательности излучение галактик становится в среднем все более голубым; они содержат все больше нейтрального водорода и ионизированного газа.

Довольно гладкие профили светимости эллиптических галактик часто можно представить эмпирическим соотношением (Reynolds, 1913; Hubble, 1930) вида

$$\frac{I}{I_0} = \left(\frac{r}{a} + 1 \right)^{-2}, \quad (56.1)$$

или (de Vaucouleurs, 1948)

$$\lg \left(\frac{I}{I_0} \right) = -3,33 \left[\left(\frac{r}{a} \right)^{1/4} - 1 \right]. \quad (56.2)$$

Здесь I — поверхностная яркость, I_0 — нормировка [в соотношении (56.2) — на радиус a области, внутри которой излучается половина всего света] и a — характерная длина. Эти соотношения часто хорошо согласуются с наблюдениями при изменении поверхностной яркости на несколько звездных величин и изменении радиуса в ~ 10 или 100 раз, но имеются и исключения. У этих соотношений нет достаточного физического обоснования. Обычно они дают лучшее приближение, чем модели Фоккера — Планка (гл. 40), физическую основу которых составляет предположение о постоянстве отношения масса — светимость. Это последнее предположение довольно сомнительно.

У спиральных галактик распределение светимости более сложное, но было предпринято много попыток обнаружить общность их структур (см., например, обзор *Kormendy*, 1982). Есть некоторые указания, что поверхностная яркость диска уменьшается вдоль радиуса в среднем по экспоненте. Наличие нерегулярностей, центрального балджа и эффектов селекции делают, однако, этот вывод очень ненадежным. Картина выглядит так, будто в интегральный свет вносят вклад несколько составляющих. Похоже, что дальнейшие измерения в различных цветах или даже для различных групп звезд с разными дисперсиями скоростей сделают эту картину более ясной. Естественно также задаться вопросом, не похожи ли свойства балджей в спиральных галактиках на свойства эллиптических галактик. Над этими вопросами много работали, но окончательных ответов пока нет.

Диапазон масс галактик простирается от $\sim 10^8 M_{\odot}$ для карликов до $\sim 10^{11} M_{\odot}$ для крупных спиральных галактик, таких, как Млечный Путь и Туманность Андромеды, и $\sim 5 \cdot 10^{12} M_{\odot}$ для гигантских эллиптических галактик, например M87. Массы оценивают несколькими методами. Зная дисперсию скоростей внутри отдельных галактик, можно применить теорему вириала. Орбиты двойных галактик можно использовать, чтобы оценить массу каждой из них. Возможно, что существует соотношение масса — светимость для галактик, но оно выражено не так ясно, как в случае звезд. Массы галактик можно также оценить по моделям кривых вращения. Все эти методы, однако, довольно неопределенны.

Как можно ожидать, учитывая различия внешнего вида, спиральным и эллиптическим галактикам свойственны совершенно различные типы вращения. Эллиптические галактики вращаются намного медленнее спиральных, причем многие из них вращаются так медленно, что их форма не соответствует наличию центробежного равновесия. Астрономы были немало удивлены, обнаружив эту особенность в конце 70-х годов.

Вращение галактики является хорошим ключом к пониманию ее происхождения и внешнего вида. Большинство прежних наблюдений анализировалось с помощью “кривой вращения” галактики. Это скорость вращения $v(r)$, осредненная по углу на данном проекционном радиальном расстоянии от центра. Для спиральных галактик, которые можно считать имеющими в проекции форму круга, наблюдаемый наклон используется для оценки истинной кривой вращения. По мере накопления информации стало ясно, что средние кривые вращения часто не отражают существа явления и поэтому позднее анализировать общее “поле вращения”, если это возможно. Легче всего это делать, используя радионаблюдения нейтрального водорода на волне 21 см, но возможно также применение оптической интерферометрии Фабри — Перо для ярких галактик (*Rubin*, 1982).

На рис. 51 показана схематическая кривая вращения спиральной галактики. Центральная область вращается приблизительно как твердое тело. Где-то, примерно на расстоянии 0,5—5 кпс, кривая меняет наклон и выходит на плато. Измерения на больших расстояниях трудны, поскольку здесь обнаруживаются лишь немногие ионизованные области или облака нейтрального водорода.

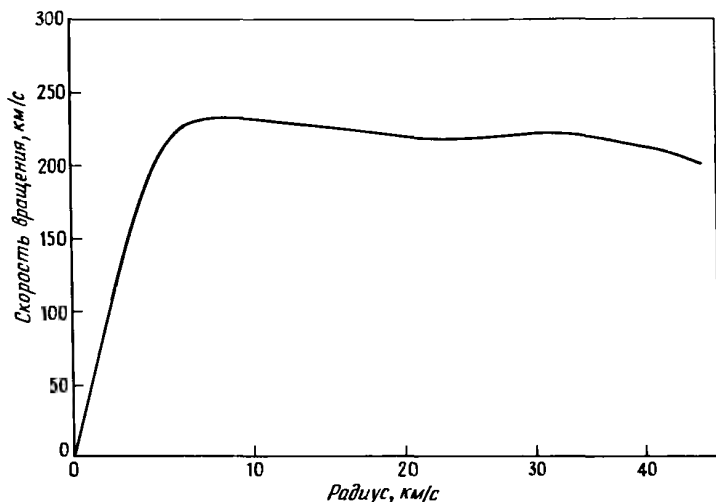


Рис. 51. Схематическая кривая вращения спиральной галактики.

да. Осреднение по углам становится очень грубым. Некоторые кривые вращения показывают признаки уменьшения кеплеровской скорости $v \propto r^{-1/2}$, но большинство остаются плоскими до предела наблюдений. Довольно примечательно, что, хотя радиус R , при котором вращение носит твердотельный характер, и соответствующая угловая скорость ω могут меняться в ~ 10 раз для различных спиралей, наибольшая скорость вращения $v_{\max} = R\omega$ в большинстве случаев заключена в узких пределах $\sim 200 \pm 50$ км/с (Saslaw, 1970). Это ключ к проблеме образования галактик.

Можно подумать, что эллиптические галактики должны становиться более плоскими при большей скорости вращения. Такое предположение кажется естественным, но оно не соответствует действительности. В истории астрофизики это еще один пример, когда, вопреки предостережению Гершеля, круг предположений ограничивается упрощенческим мышлением. У нас был ключ к объяснению, по крайней мере в ретроспективе, состоящий в учете большого времени релаксации τ_R у эллиптических галактик. Если они образовались посредством объединения меньших систем, то быстрая релаксация не должна быть полной, и в результате функция распределения может остаться анизотропной на протяжении хаббловского времени. Скорости вращения ярких эллиптических галактик часто (Kormendy, 1982) составляют лишь $1/2$ или $2/3$ от того значения, которое необходимо, чтобы поддержать сплюснутый сфероид с изотропными скоростями (хотя слабые эллиптические галактики и балджи в спиральных могут вращаться достаточно быстро). С учетом наблюдений искаженных изотоп создается впечатление, что многие эллиптические галактики находятся в состоянии меньшей релаксации, чем казалось на первый взгляд.

Галактики с перемычками содержат в центре плоские структуры с типичным отношением большой и малой осей около 5 к 1. Они могут быть трехосными. Вдоль малой оси профиль светимости обычно крутой, но вдоль большой оси он почти плоский. Внутри перемычек дисперсия звездных скоростей много выше, чем в окружающем диске. Таким образом, перемычки, вероятно, являются областями значительно повышенной плотности. Не ясно, привязаны ли орбиты звезд к перемычке или же перемычка представляет собой волну плотности вещества, проходящую через диск. Наблюдения нередко показывают наличие потока газа и звезд вдоль перемычки. Это позволяет предположить, что время существования перемычки довольно велико.

Многие, а возможно и большинство спиралей имеют перемычки, но их никогда (до сих пор) не находили в эллиптических галактиках. Очевидно, вращение очень важно для образования перемычки. В свою очередь перемычка воздействует на структуру диска галактики, либо давая начало спиральным рукавам, что очень вероятно, либо поддерживая их.

Линзоподобные структуры с почти постоянной поверхностной яркостью и эллиптической формой появляются в некоторых пересеченных галактиках между диском и балджем. Их динамическая роль не понятна. Также связаны с перемычками и, возможно, обязаны им своим происхождением кольца, окружающие внутренние или внешние части некоторых галактик. Найдено много разновидностей структур галактик. Не следует считать, что они подчинены единственно тяготению; процессы в газе и образование звезд могут быть не менее важными.

Очень сильные возмущения формы галактик могут также порождаться влиянием ближайших соседей. На галактики в группах иногда сильно влияют близкие прохождения, но те из них, которые имеют постоянных спутников, испытывают возмущения все время. Огромная туманность Воронка (NGC 5194/5195, *Sandage*, 1961) является наглядным примером того, как спутник галактики разрушает ее спиральную структуру.

57. КИНЕМАТИКА ДВИЖЕНИЯ

В наш мнр, неведомо Откуда и Почему
Втекающее, как вода, само собой.

Омар Хайям

57.1. ОБЩАЯ КИНЕМАТИКА

В названии этой главы содержится тавтология. Кинематика и есть движение. Чистое движение. Трех свойств — вращения, переноса и деформации — достаточно, чтобы описать локальные движения потоков, не касаясь причины их возникновения. Такое утверждение часто называют теоремой Гельмгольца, хотя оно восходит к более ранним временам, к Стоксу и далее к

Коши (Lamb, 1932). В “кинематическом” описании отсутствуют силы, место которых в “динамике”.

Движение можно описать, рассматривая изменение положения или скорости частицы (элемента жидкости). В любом случае мы исследуем, как векторное поле меняется на малых расстояниях. Вообще описание скоростей более удобно, если рассматривается система, состоящая из неплотно упакованных частиц, а координатное описание больше подходит для упругих тел. Поскольку скорости определяют изменение положений, их анализ характеризует вращение и деформацию.

Рассмотрим в любой заданный момент область вблизи точки с координатой $\mathbf{x}$, где средняя скорость звезд есть $\mathbf{u}(\mathbf{x})$. Соседняя с ней область вблизи $\mathbf{x} + \mathbf{r}$ содержит звезды со средними скоростями $\mathbf{u} + d\mathbf{u}$. Разложение в ряд Тейлора в декартовых координатах показывает, что в линейном приближении по $\mathbf{r}$

$$\delta u_i = r_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}. \quad (57.1)$$

Здесь действует обычное соглашение о том, что производится суммирование по индексам, повторяющимся дважды. При таком подходе вычитается скорость переноса, общая для всей системы. Теперь можно применить уже использовавшийся в гл. 9 прием, чтобы записать тензор второго порядка $\delta u_i / \delta x_j$ в виде суммы симметричного и антисимметричного тензоров. Находим их, как и раньше, меняя индексы:

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (57.2)$$

$$\xi_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (57.3)$$

так что

$$\delta u_i = r_j e_{ij} + r_j \xi_{ij}. \quad (57.4)$$

Симметричный тензор e_{ij} , как и все симметричные тензоры, можно диагонализировать поворотом системы координат. Тогда в системе координат, оси которой являются главными осями тензора,

$$e'_{ij} = \frac{\partial r_k}{\partial r'_i} \frac{\partial r_m}{\partial r'_j} e_{km}, \quad (57.5)$$

и только диагональные элементы ($i = j$) тензора e'_{ij} не равны нулю. Поскольку сумма диагональных составляющих тензора инвариантна по отношению к вращением системы координат,

$$e'_{ii} = e_{ii} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \nabla \cdot \mathbf{u}. \quad (57.6)$$

Физический смысл этого выражения состоит в том, что дивергенция потока не зависит от системы координат.

Типичная составляющая, скажем e'_{11} , измеряет величину, на которую меняется скорость, направленная вдоль главной оси r'_1 . Цепочка звезд вблизи x , параллельная оси r'_1 , деформируется со скоростью e'_{11} . Цепочки звезд вдоль других главных осей деформируются со скоростями e'_{22} и e'_{33} . Таким образом, e'_{ij} превращает первоначально сферическое распределение звезд вблизи x в эллипсоидальное, так как в общем случае $e'_{11} \neq e'_{22} \neq e'_{33}$. Это движение соответствует чистой деформации, и поэтому e'_{ij} называется тензором скорости деформации, а e'_{11} , e'_{22} , e'_{33} — это три главные скорости деформации. В произвольной декартовой системе отсчета составляющая e'_{ij} должна деформировать прямоугольное распределение в плоскости i, j , превращать его в параллелограмм и смещать с первоначального положения. В общем случае главные оси e'_{ij} , как и сам тензор e'_{ij} , будут меняться внутри системы и зависеть от особенностей течения.

Простой расчет показывает явную связь между тензором скорости деформации и изменением расстояния между звездами. Две соседние звезды разделены расстоянием δs , где

$$(\delta s)^2 = r_i r_i. \quad (57.7)$$

Расстояние между ними меняется со скоростью

$$\frac{D(\delta s)^2}{Dt} = 2r_i \frac{Dr_i}{Dt} = 2r_i \delta u_i = 2r_i r_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = 2r_i r_j e_{ij}. \quad (57.8)$$

Поэтому, если все симметричные комбинации e_{ij} градиентов скоростей равны нулю, то две звезды не движутся относительно друг друга. Если $r_2 = r_3 = 0$ вдоль главной оси, то скорость относительного изменения расстояния вдоль оси x_1 есть

$$\frac{1}{\delta s} \frac{D(\delta s)}{Dt} = \frac{1}{r_1} \frac{Dr_1}{Dt} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = e_{11}. \quad (57.9)$$

В более общем случае относительная скорость изменения локального объема δV есть

$$\frac{1}{\delta V} \frac{D(\delta V' - \delta V)}{Dt} = e_{ii}. \quad (57.10)$$

Это та скорость, с которой поток расходится. Подобно этому, сама по себе деформация есть только относительное изменение линейного масштаба.

Мы легко можем переписать e'_{ij} в еще одном поучительном с физической точки зрения виде. Сложение и вычитание средних величин диагональных членов, умноженных на δ_{ij} , дают тождество

$$e_{ij} = (e_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} e_{kk}) + \frac{1}{3} \delta_{ij} e_{kk}. \quad (57.11)$$

Сумма диагональных элементов из выражения в скобках равна нулю, так как $\delta_{ii} = 3$. Таким образом, она представляет собой чистый сдвиг поля локальных скоростей, меняющий его форму без какого-либо расширения (или сжатия). Последний член дает чистое расширение. Любая скорость деформации может быть разложена на скорость сдвига и изотропную скорость расширения.

При рассмотрении достаточно плоских вращающихся галактик часто удобно использовать тензор скорости деформации в цилиндрических координатах r, ϕ, z . Задача решается так же, как и в декартовых координатах, но выкладки много сложнее, поэтому мы выпишем здесь для справки только выражения для отдельных составляющих:

$$\begin{aligned} e_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad e_{\phi\phi} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{u_r}{r}, \quad e_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \\ 2e_{\phi z} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \phi} + \frac{\partial u_\phi}{\partial z}, \quad 2e_{rz} = \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}, \\ 2e_{r\phi} &= \frac{\partial u_\phi}{\partial r} - \frac{u_\phi}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \phi}. \end{aligned} \quad (57.12)$$

Для галактик, чья форма приближается к сфероидальной, или для неправильных галактик полезно написать тензор скорости деформации в сферических координатах r, θ, ϕ (где ϕ — азимутальный угол относительно оси $\theta = 0$):

$$\begin{aligned} e_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad e_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}, \quad e_{\phi\phi} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{u_\theta}{r} \cot \theta + \frac{u_r}{r}, \\ 2e_{\theta\phi} &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\phi}{\partial \theta} - u_\phi \cot \theta \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \phi}, \quad 2e_{r\theta} = \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta}, \\ 2e_{r\phi} &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} + \frac{\partial u_\phi}{\partial r} - \frac{u_\phi}{r}. \end{aligned} \quad (57.13)$$

Если вспомнить гл. 9, то можно ожидать, что антисимметричный вклад $r_j \xi_{ij}$ в поле локальных скоростей δu_i соответствует вращению. Заключение в целом правильное, но не совсем полное. Вращение более явно представляется угловой скоростью, которая является вектором. Поскольку антисимметричный тензор ξ_{ij} имеет только три независимых составляющих, мы можем получить вектор Ω_i из него, записав

$$\xi_{ij} = -\frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \Omega_k. \quad (57.14)$$

Здесь ε_{ijk} — единичный антисимметричный тензор; его компоненты равны 0, если какие-либо индексы совпадают, 1, если индексы образуют циклическую перестановку, и -1 в противном случае. Мы не знаем заранее, является ли Ω_k угловой скоростью, поскольку выражение (57.14) записано в общем виде. Что-

бы найти физическую интерпретацию, заметим, что

$$\delta u_i^{\text{анти}} = r_i \dot{\zeta}_{ij} = -\frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} r_j \Omega_k \quad (57.15)$$

является i -й составляющей вектора $\frac{1}{2}\Omega \times \mathbf{r}$. Таким образом, твердотельное вращение с угловой скоростью $\frac{1}{2}\Omega$ вокруг точки на расстоянии $\mathbf{r}$ дает скорость $\delta \mathbf{u}^{\text{(анти)}}$. Это позволяет понять, что такое Ω , но не проясняет всей проблемы.

В общем случае звезды не вращаются согласованно, подобно твердому телу, вокруг некоторой общей оси, так что Ω будет меняться от места к месту. Сравнивая выражения (57.14) и (57.3), мы видим, что

$$\Omega = \nabla \times \mathbf{u}. \quad (57.16)$$

Как и в динамике жидкостей, Ω называют локальным вихрем потока; системы, у которых $\Omega = 0$, являются безвихревыми. Множитель $\frac{1}{2}$ введен в выражение (57.14) для того, чтобы не вводить его в (57.16), где его появление могло бы удивить читателя.

Адекватная физическая интерпретация степени завихренности потока получится, если проинтегрировать ее по области dA малого круглого диска радиуса a с нормальным к нему единичным вектором $\mathbf{n}$ и элементом окружности $d\mathbf{r}$

$$\int (\nabla \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} dA = \oint \mathbf{u} \cdot d\mathbf{r} \approx \pi a^2 (\nabla \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}. \quad (57.17)$$

Второе равенство следует из теоремы Стокса, а третье записано на основании предположения, что величина $\nabla \times \mathbf{u}$ приблизительно постоянна в малой области. Таким образом, $\Omega \cdot \mathbf{n}$ есть усредненная тангенциальная составляющая скорости $\mathbf{u} \cdot d\mathbf{r}$ в малом диске. Это обобщает понятие локальной угловой скорости системы, движение которой включает также и деформации. В частном случае, когда движение описывается полностью твердотельным вращением с угловой скоростью ω , получаем $\mathbf{u} = \omega \times \mathbf{r}$, и вихрь $\Omega = \nabla \times (\omega \times \mathbf{r}) = 2\omega$ выражается всюду удвоенной угловой скоростью.

Нам не хотелось бы ограничивать понятие локального вихря движением группы звезд по круговой замкнутой траектории. Он может существовать, даже если звезды движутся по прямой. Примером может служить срез потока при $u_1 = u_1(x_2)$, $u_2 = u_3 = 0$ в декартовых координатах. Тогда $\Omega_1 = \Omega_2 = 0$ и $\Omega_3 = -\partial u_1 / \partial x_2$, что создает чистый вихрь. Если ввести в этот звездный поток гигантскую лопасть вдоль оси x_2 , то распределение скорости в срезе потока заставит ее вращаться. С другой стороны, группа звезд может участвовать в круговом движении по замкнутой траектории при отсутствии локального вихря, как это показано на рис. 52.

Результирующий момент импульса движений звезд в сферическом объеме с центром на оси x равен

$$L_x = \int \varepsilon_{ijk} r_j \left(u_k + r_m \frac{\partial u_k}{\partial x_m} \right) \rho dV \quad (57.18)$$

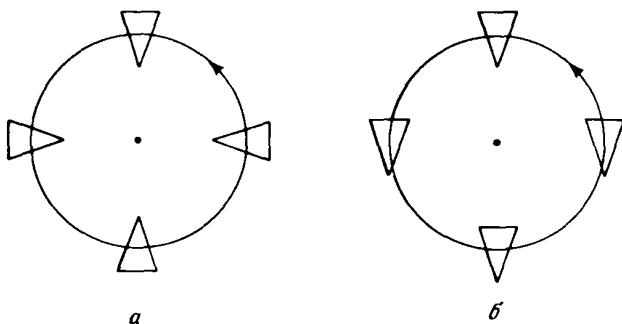


Рис. 52. Движение треугольной группы звезд. *а* — при твердотельном вращении; *б* — при обращении по круговой орбите без локального вращения или завихрений.

Объем настолько мал, что u_k и $\partial u_k / \partial x_m$ внутри его по существу постоянны. Поэтому первый член равен нулю и

$$L_i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial u_k}{\partial x_m} \int r_j r_m \rho dV = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial u_k}{\partial x_m} I \delta_{jm} = \frac{1}{2} \Omega_i I, \quad (57.19)$$

где I — момент инерции сферы относительно диаметра. Таким образом, сферический объем ведет себя подобно твердому телу, обладающему угловой скоростью $\Omega/2$. Поведение областей другой формы обычно более сложно, поскольку их главные оси деформации не совпадают с геометрическими осями. Однако соотношение (57.18) представляет собой удобное общее выражение для локального момента импульса.

Изложенный выше кинематический анализ можно повторить, включив в соотношение (57.1) члены второго и более высоких порядков. Это привело бы к пространственному искривлению поля скорости деформации. Расширение сферического объема, например, привело бы не к образованию эллипсоида, оси которого соответствуют главным осям деформации, а к образованию заметно перекошенной конфигурации. Расстояние, на котором становятся существенными члены второго порядка, определяется структурой потока. Считается, что в нашей Галактике это расстояние (от Солнца) составляет около 2 кпс.

111

57.2. ДВИЖЕНИЯ В ГАЛАКТИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ

При подробном рассмотрении оказывается, что большинству галактик свойственны очень сложные распределения положений и скоростей звезд, как отмечалось в гл. 56. Чтобы описать эти движения вблизи произвольного локального наблюдателя, перейдем в кинематических уравнениях к галактическим координатам, удобным для такого наблюдателя. Здесь мы не будем вво-

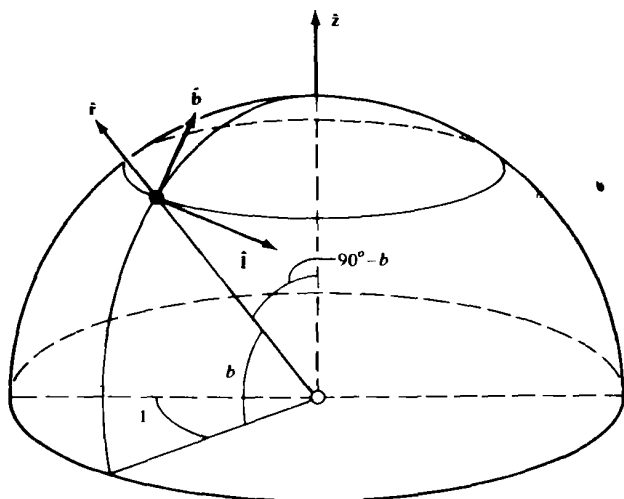


Рис. 53. Система координат, используемая наблюдателем, находящимся внутри галактики.

дить обычные упрощающие предположения о том, что движение происходит в плоскости, или что оно симметрично относительно плоскости, или же рассматривать только круговые скорости. Полезен самый общий подход, позволяющий оценить, какие ограничения сопряжены с упрощающими предположениями, а также увидеть, как можно описывать реальные галактики во всей их сложности.

Пусть наблюдатель располагается в начале системы координат (не обязательно в плоскости галактики, как это показано на рис. 53). Нам понадобятся две системы координат: декартова система с наблюдателем в ее начале и движущаяся система, в начале которой находится рассматриваемая им звезда. Пусть $\hat{z}$ — единичная ось, направленная в зенит, а $\hat{r}$ — единичный вектор, направленный вдоль вектора $\mathbf{r}$ на звезду. Чтобы задать ортогональную систему координат в том месте небесной сферы, где находится звезда, сначала определим вектор $\mathbf{l} = \hat{z} \times \hat{r}$, тангенциальный к кругу широты. Его длина $l = \sin(\pi/2 - b) = \cos b$, так как $\hat{z}$ и $\hat{r}$ — единичные векторы. Поэтому нормированный вектор $\hat{\mathbf{l}} = \mathbf{l} \sec b$. Это дает нам векторы $\hat{r}$ и $\hat{\mathbf{l}}$, привязанные к звезде. Чтобы получить третий базисный вектор, ортогональный к первым двум, возьмем $\hat{\mathbf{b}} = \hat{r} \times \hat{\mathbf{l}} = \sec b \hat{r} \times \mathbf{l} = \sec b \hat{r} \times (\hat{z} \times \hat{r}) = \sec b [\hat{z} - (\hat{r} \cdot \hat{z})\hat{r}] = \sec b \hat{z} - \text{tg } b \hat{r}$, используя векторное тождество $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$. Таким образом, ортонормальные координаты, привязанные к какой-либо наблюдаемой звезде, имеют вид

$$\begin{aligned} \hat{r} &= r^{-1}(x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{z}}), \quad \hat{\mathbf{l}} = \hat{z} \times \hat{r} \sec b = \left(-\frac{y}{r}\hat{\mathbf{i}} + \frac{x}{r}\hat{\mathbf{j}} \right) \sec b. \\ \hat{\mathbf{b}} &= \sec b \hat{z} - \text{tg } b \hat{r}. \end{aligned} \quad (57.20)$$

Три составляющие скорости заменили δu_i из выражения (57.1) и образовали дифференциальный вектор скорости в декартовой системе

$$\delta \mathbf{u} = \frac{\partial u_1}{\partial x_j} x_j \hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial u_2}{\partial x_j} x_j \hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial u_3}{\partial x_j} x_j \hat{\mathbf{k}}, \quad (57.21)$$

где $(x, y, z) = (x_1, x_2, x_3)$, поскольку наблюдатель расположен в начале координат. (Если это не так, потребовалось бы еще одно линейное преобразование, усложняющее выкладки, но не существенное для понимания физического смысла.)

Чтобы найти радиальную и тангенциальную составляющие скорости на небе, разложим $\delta \mathbf{u}$ по базису (57.20)

$$r_r = \delta \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{r}} = r^{-1} \left[\frac{\partial u_1}{\partial x_1} x_1^2 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} x_2^2 + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} x_3^2 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) x_1 x_2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) x_2 x_3 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) x_3 x_1 \right], \quad (57.22)$$

$$r_l = \delta \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{l}} = r^{-1} \sec b \left[\frac{\partial u_2}{\partial x_1} x_1^2 - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} x_2^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} - \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) x_1 x_2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} x_1 - \frac{\partial u_1}{\partial x_3} x_2 \right) x_3 \right], \quad (57.23)$$

$$r_b = \delta \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{b}} = -r_r \tan b + \frac{\partial u_3}{\partial x_j} x_j \sec b. \quad (57.24)$$

Тогда

Сферические координаты по сравнению с цилиндрическими более удобны для учета всех максимумов и неоднородностей в реальных распределениях. Поэтому мы полагаем $x = r \cos b \cos l$, $y = r \cos b \sin l$, $z = r \sin b$ и используем формулы для половинного угла $2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha$ и $2 \cos^2 \alpha = 1 + \cos 2\alpha$. Из производных, дающих скорости, можно непосредственно составить тензор скорости деформации (57.2) и вихревой тензор (57.3), что приводит к основному результату:

$$r_r = [e_{12} \sin 2l + \frac{1}{2}(e_{11} - e_{22}) \cos 2l + \frac{1}{2}(e_{11} + e_{22})] r \cos^2 b + e_{13} r \sin 2b \cos l + e_{23} r \sin 2b \sin l + \frac{1}{2} e_{33} r (1 - \cos 2b). \quad (57.25)$$

$$r_l = [e_{12} \cos 2l - \frac{1}{2}(e_{11} - e_{22}) \sin 2l + \xi_{21}] r \cos b + [(e_{23} + \xi_{23}) \cos l - (e_{13} + \xi_{13}) \sin l] r \sin b, \quad (57.26)$$

$$r_b = -r_r \tan b + (e_{31} + \xi_{31}) r \cos l + (e_{32} + \xi_{32}) r \sin l + e_{33} r \tan b. \quad (57.27)$$

Первые два члена соотношений (57.25) и (57.26) можно было бы записать более компактно, применив формулы сложения для $\sin(\alpha + \beta)$ и $\cos(\alpha + \beta)$, но тогда вклады деформаций и вращений были бы выражены менее четко.

Теперь видны следствия обычных упрощающих предположений, которые делают, применяя соотношения (57.25)—(57.27) к нашей Галактике. Пусть наблюдаются только движения в плоскости Галактики, где мы находимся. Тогда v_r сохраняет только члены, заключенные в скобки, v_t теряет члены, включающие $\sin b$, а v_b теряет первый и четвертый члены. Далее предположим, что наблюдаются области вне плоскости галактики, но движения симметричны относительно этой плоскости. Тогда среди членов, имеющих индекс 3, останутся только du_3/dx_1 и du_3/dx_2 , и они тоже могут исчезнуть, если движения параллельны плоскости.

В качестве третьего примера рассмотрим предположение, что движения вдоль оси z вообще отсутствуют, а движения в плоскости галактики имеют круговой характер. Тогда сумма $e_{11} + e_{22}$, выражающая дивергенцию потока в плоскости, должна равняться нулю. Это выражение часто называют K -членом галактической структуры. Остаются только члены e_{12} , ξ_{21} и $(e_{11} - e_{22})$. Деформация $e_{12} = e_{r\phi}$ получается из соотношений (57.12) при $du_r/d\phi = 0$, а $-e_{12}$ называется постоянной A Оорта, по имени голландского астронома, пионера кинематических исследований нашей Галактики. Вихревой член ξ_{21} является постоянной Оорта

$$B \equiv -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\phi}{\partial r} + \frac{u_\phi}{r} \right) \quad (57.28)$$

для этого частного случая. Другая интерпретация константы B следует из уравнения (59.16). Член $(e_{11} - e_{22})$, который формально можно объединить с e_{12} , как это отмечалось раньше, ответствен за эллиптичность, порождаемую различием скоростей деформации вдоль главных осей. Этот член зависит от положения наблюдателя относительно главных осей по долготе.

Оценке величин A и B для нашей Галактики было посвящено много работ (см. обзор наблюдений *Mihalas and Binney*, 1981). Наиболее приемлемыми представляются значения $A = 15$ км/(с · кпс) и $B = -10$ км/(с · кпс) наряду со связанными с ними значениями расстояния Солнца от центра Галактики 10 кпс и его скорости вращения внутри Галактики 250 км/с. Однако важно помнить, что в большинстве исследований галактическое вращение считается круговым и происходящим в одной плоскости. Поскольку мы находимся вблизи галактического экватора, b мало и наше положение не очень удобно для оценки влияния потоков, обладающих большими скоростями в направлении оси z . Может существовать также иррегулярное локальное расширение или сжатие в плоскости, которое, как можно заметить, оказывает влияние на A и B и приводит к появлению K -члена. Формальные погрешности оценок этих величин обычно не включают возможные погрешности, заложенные в начальных предположениях, на которых эти оценки основаны. Изменение этих основных предположений может существенно изменить картину локального потока звезд.

Нет особых причин, помимо нехватки информации, вынуждающих нас ограничиваться кинематическим анализом только нашей собственной Галактики. Когда будет накоплено достаточно данных о красных смещениях и расстояниях, мы узнаем, как ведет себя наше Местное скопление. Однако все кинематические исследования — эти лишь прелюдии к исследованию динамики.

58. ПЕРЕНОС МОМЕНТА ИМПУЛЬСА

Если бы кое-кто не совался в чужие дела, — хрипло проворчала Герцогиня, — земля бы вертелась быстрее!

Льюис Кэрролл

Это тот самый момент вращения, который заставляет вертеться мир, если перефразировать другое любимое высказывание Герцогини. Моменты вращения — это моменты сил, и они вводят нас в сферу динамики. Основная цель динамики — обосновать кинематику. Динамика вскрывает причины, по которым поток движется именно так, а не иначе, выражая их посредством уравнений движения с начальными и граничными условиями.

Вращение является одним из фундаментальных свойств вещества во всех масштабах, от молекул до скоплений галактик. (Считается, что элементарные частицы также обладают угловым моментом, хотя для них смысл этого термина иной, чем для классических объектов.) Вселенной в целом, возможно, свойственно глобальное вращение, хотя наблюдения позволяют предположить, что характерное время этого вращения больше характерного времени хаббловского расширения. Для любой области можно разделить гравитационный масштаб времени на характерное время вращательного движения и получить отношение

$$\sigma \equiv \frac{\omega}{(G\rho)^{1/2}}. \quad (58.1)$$

Простым примером является пробная частица на устойчивой круговой орбите радиуса r с массивным центральным телом. Условие равновесия гравитационной и центробежной сил (т. е. условие выполнения теоремы вириала) дает $\sigma = 2(1/3\pi)^{1/2}$. Здесь ρ означает плотность, полученную, если распределить массу центрального тела внутри сферической области радиуса r ; когда r соответствует поверхности тела, ρ является его средней плотностью. Таким образом, в области, где вращение не настолько быстрое, чтобы гравитационно связанное вещество разлеталось, в общем случае будет выполняться условие $0 < \sigma \leq 2$. В определение (58.1) не входят числовые множители, потому что они сильно зависят от локальной геометрии.

Чтобы обобщить отношение (58.1) для локальной области, где существует такая деформация, заменим ω на $\frac{1}{2}\Omega_k$ [см. соотношения (57.14)—(57.17)] или

на $\frac{1}{2}\Omega$, если информация о направлении не требуется. Таким образом, σ будет постоянна во всей системе, если плотность распределена в ней однородно и она вращается как твердое тело.

Мы не знаем, как возникло вращение крупномасштабных объектов, таких, как галактики и скопления галактик. На малых масштабах, соответствующих звездам и планетам, кажется разумным предположение, что вращение возникло из начальных неоднородностей плотности, которые создали вращательный момент, и из начальных неоднородностей в распределении скоростей, которые вносят прямой вклад во вращение. Начальные неоднородности наблюдаются всюду, где звезды образуются в настоящее время.

Условия образования галактик, однако, гораздо менее ясны. Мы не наблюдали формирование галактик. Мы можем только задать вопрос, достаточно ли одних гравитационных вращательных моментов, чтобы обеспечить галактикам то вращение, которое мы наблюдаем, или нужны также начальные вихри. Если бы можно было бы ответить на этот вопрос, мы пришли бы к глубокому пониманию процессов образования галактик, даже если они очень сложны.

Независимо от того, существовали или нет начальные вихри, ничто не может избежать действия приливных сил.

Выше в гл. 48 и 51, мы исследовали приливные взаимодействия сферических систем. Они настолько симметричны, что не способны создавать результирующий момент вращения и обеспечивают лишь передачу энергии. Теперь, когда мы отказались от условия сферической симметрии, можно показать, как приливные вращательные моменты передают момент импульса орбитального движения двух тел их внутреннему вращению. Как обычно, мы рассмотрим простую задачу, иллюстрирующую физическую суть процесса, которую затем можно будет применить в более сложных случаях.

Предположим, что есть два тела, и одно из них представляет собой материальную точку, а другое обладает неправильной структурой. Материальная точка воздействует на протяженное тело с силой, которая неодинакова в разных областях тела; см. рис. 54. Зависящий от положения момент этой силы является внешним моментом вращения

$$\mathbf{N} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i, \quad (58.2)$$

где индекс указывает номер частицы или элемента массы протяженного тела. В случае непрерывного распределения суммирование по массам, вносящим вклад в $\mathbf{F}_i = \mathbf{F}(m_i)$, заменяется интегралом по плотности с использованием функции $\mathbf{F}(\rho)$ внутри объема, занимаемого телом. Внешний момент вращения создает результирующий момент импульса, поскольку

$$\mathbf{N} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = \sum_i (\mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{p}}_i) = \sum_i \frac{d}{dt} (\mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i) = \frac{d\mathbf{L}}{dt} \quad (58.3)$$

(напомним, что внутренние моменты вращения попарно сокращаются и что $\mathbf{p}_i = m \dot{\mathbf{r}}_i$).

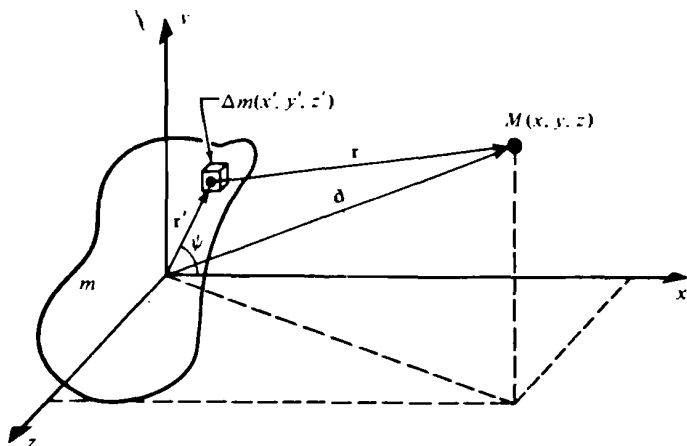


Рис. 54. Расположение точечной массы M , передающей вращающий момент протяженному телу массой m .

В руководствах по механике показано, что момент импульса связан с тензором инерции [заметим, что $(x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$] соотношением

$$I_{jk} = \int_V \rho(r)(r^2 \delta_{jk} - x_j x_k) dV, \quad (58.4)$$

а с угловой скоростью ω соотношением

$$L_x = I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z \quad (58.5)$$

для составляющей x момента импульса; циклическая перестановка $x \rightarrow y$, $y \rightarrow z$, $z \rightarrow x$ дает две другие составляющие. Диагональные компоненты I_{jk} являются «моментами инерции», а недиагональные — «произведениями инерции». Оси x, y, z , которыми мы будем пользоваться, неподвижны в пространстве. Однако если нам придется использовать оси, неподвижные относительно галактики, то момент импульса относительно этих осей должен меняться со скоростью, определяемой уравнением

$$\left(\frac{d\mathbf{L}}{dt} \right)_{\text{гал}} + \omega \times \mathbf{L} = \mathbf{N}, \quad (58.6)$$

и после подстановки соотношения (58.5) в (58.6) должны получиться уравнения Эйлера.

Чтобы вычислить результирующий момент вращения, которым материальная точка M воздействует на галактику, поместим начало системы координат с осями x, y, z в центр масс галактики. Момент вращения, действующий

на малый элемент массы $dm = \rho(\mathbf{r}')dV'$ на расстоянии $\mathbf{r}'$, равен

$$d\mathbf{N} = \frac{GM\rho dV'}{r^3} \mathbf{r}' \times \mathbf{r}. \quad (58.7)$$

Здесь удобнее всего использовать декартовы координаты, рассматривая единственную составляющую момента импульса, скажем L_z , а затем получить другие составляющие посредством циклической перестановки индексов. Интегрирование $d\mathbf{N}$ по всему объему протяженного тела и использование соотношения (58.3) показывает, что

$$\frac{dL_z}{dt} = GM \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{r^3} (x'y - y'x) dx' dy' dz'. \quad (58.8)$$

Это выражение очень сильно упрощается, когда $r' < d$ для всех значений $\mathbf{r}'$. Из геометрических соображений (рис. 54) получаем $r^2 = d^2 + r'^2 - 2\mathbf{d} \cdot \mathbf{r}'$, так что, когда точка M сильно удалена от протяженного тела,

$$r^{-3} = d^{-3} \left[1 - \frac{3r'^2}{2d^2} + 3\frac{\mathbf{d} \cdot \mathbf{r}'}{d^2} + \dots \right] \quad (58.9)$$

Подставляя выражение (58.9) в (58.8) и вспоминая, что центр масс совпадает с началом координат, а затем интегрируя, находим

$$\frac{dL_z}{dt} = \frac{3GMxy}{d^5} \int \rho(x'^2 - y'^2) dx' dy' dz' = \frac{3GMxy}{d^5} (I_{yy} - I_{xx}). \quad (58.10)$$

Другие составляющие, L_x и L_y , получаются так же или после циклической перестановки индексов.

Выполнить эти вычисления также напрямую, но несколько менее строго можно в сферической системе координат, используя мультипольное разложение для поля, создаваемого протяженным телом (упражнение для читателя). После этого становится более ясным физический смысл: монопольный член влияет только на движение центра масс и не вносит вклад в момент вращения. Дипольный член равен нулю, поскольку центр масс совпадает с началом координат. Квадрупольный момент остается вкладом самого низкого порядка в момент вращения, и результат эквивалентен соотношению (58.10).

Момент импульса, приобретенный протяженным телом, должен компенсироваться изменением момента импульса его орбиты относительно материальной точки M . Поэтому можно решить обратную задачу и увидеть, как меняется орбита. Наиболее общим примером может служить орбита спутника массы M относительно несферической планеты. Аналогичный расчет для гравитационного потенциала ϕ планеты приводит к формуле Мак-Кулафа

$$\phi = -\frac{GMm}{r} + \frac{GM}{2r^3} [3I_r - (I_x + I_y + I_z)]. \quad (58.11)$$

Здесь I_r — момент инерции планеты относительно оси r . Члены, заключенные в скобки, вызывают прецессию связанных орбит, обусловленную моментом вращения несферической планеты.

Чтобы правильно применять формулу (58.10), важно помнить, что все величины в правой части могут существенно зависеть от времени, когда орбита и внутренняя структура тела меняются. Однако, если эти изменения медленны по сравнению с изменениями отношения (58.1), мы можем аппроксимировать величины в правой части их средними значениями. Используя выражение (58.5) для L_z в случае, когда член $I_{zz}\omega_z$ доминирует, формулу (58.10) можно записать в виде

$$\frac{d\omega_z}{dt} = (G\rho)^{1/2} \frac{d\sigma_z}{dt} \simeq \frac{3GM\langle\eta_z\rangle}{d^3}, \quad (58.12)$$

где

$$\eta_z \equiv \frac{xy(I_{yy} - I_{xx})}{d^2 I_{zz}}. \quad (58.13)$$

Первые множители в выражении для η_z являются направляющими косинусами и они лишь немного меньше единицы при $r' \ll d$. В общем случае второй множитель будет также порядка единицы, пока распределение масс близко к сферическому. Например, вдоль главных осей эллипсоида с однородной плотностью массы m и полуосями R_x, R_y, R_z

$$I_{xx} = \frac{m}{5}(R_y^2 + R_z^2); \quad (58.14)$$

а для получения других моментов инерции надо сделать циклическую перестановку индексов. Таким образом,

$$\eta_z = \frac{xy}{d^2} \frac{R_x^2 - R_y^2}{R_x^2 + R_y^2}, \quad (58.15)$$

и если $R_y = R_x/2$, то $\eta_z = 3xy/5d^2$. Поэтому во многих случаях нам следует ожидать, что η_z имеет величину порядка единицы. Подобные соотношения выполняются и для других составляющих угловой скорости, и обычно одна из них, скажем ω_z , будет существенно больше остальных.

Величина $d\sigma/dt$ из соотношения (58.12) возрастает как

$$\frac{d\sigma}{dt} \approx 4\pi\langle\eta\rangle \frac{\tau_m}{\tau_M^2}. \quad (58.16)$$

В общем случае $\tau = (G\rho)^{-1/2}$ и, в частности, τ_m определяет среднюю динамическую шкалу времени внутри протяженного тела m . Подобным же образом τ_M определяет динамическую шкалу времени для пробной частицы на круговой орбите радиуса d с центром в M ; именно такая величина τ должна получиться, если масса M распределена однородно в сферической области радиуса

d. Поэтому необходимым критерием для усреднения правой части соотношения (58.10) по времени является условие

$$4\pi\langle\eta\rangle\frac{\tau_m}{\tau_M}=4\pi\langle\eta\rangle\left(\frac{MR^3}{m\bar{d}^3}\right)^{1/2}>1, \quad (58.17)$$

где $R^3 = 3m/4\pi\bar{\rho}_m$. Достаточное условие, которое можно всегда проверить впоследствии, состоит в том, что σ возрастает быстрее, чем меняется неусредненная правая часть соотношения (58.16). После того как σ возрастает от 0 до ~ 1 , вызванное приливными силами вращение играет главную роль в равновесии сил, которое определяет внутреннюю равновесную структуру. Таким образом, мы можем определить характерное время роста σ в виде

$$\tau_\sigma = \frac{1}{4\pi\langle\eta\rangle} \left(\frac{m\bar{d}^3}{MR^3}\right)^{1/2} \tau_M. \quad (58.18)$$

Приливная передача момента импульса между протогалактиками впервые была рассчитана Хойлом (*Hoyle*, 1949), который сделал вывод, что она должна быть существенной. Легко видеть, что это следует из выражения (58.18), потому что τ_M есть приблизительно динамический масштаб времени для сглаженной плотности в области, где находятся протогалактики. Он также почти равен хаббловскому масштабу времени расширения в космологических моделях Эйнштейна — Фридмана [см. уравнение (21.31)]. Большая часть момента импульса передается, когда протогалактики близки друг к другу, и контраст плотности велик. При оптимальных условиях $\langle\eta\rangle \approx m/M \approx 1$ и $d \leq 3R$, что дает $\tau_\sigma \approx \tau_{\text{Хаббл}}$. Поскольку $\dot{\sigma} \propto d^{-3}$, большая часть момента импульса будет передаваться под воздействием ближайшей массивной протогалактики, хотя сложение случайных вкладов от более далеких протогалактик может в несколько раз увеличить $\dot{\sigma}$. Другой вклад может возникнуть вследствие крупномасштабной неоднородности протоскоплений протогалактик. Ясно, что более точные выводы будут зависеть от деталей образования галактик и, в частности, от изменения контраста плотности протогалактик, когда они отделяются друг от друга. [Чтобы познакомиться с примерами более подробных вычислений, см. работы *Harrison*, 1971; *Efstathiou and Jones*, 1980 и ссылки в них.] После образования и сгущивания галактик случайные близкие прохождения могут обеспечивать большую, чем в среднем, передачу суммарного момента импульса. (Могут ли наша Галактика и Туманность Андромеды служить примером?) Хотя есть возможность сделать эти оценки передачи полного момента импульса, результирующее распределение его внутри галактики исследовано плохо.

Мы до сих пор не знаем, можно ли одним приливным моментом вращения объяснить происхождение наблюдаемого момента импульса галактик. При формулировке астрофизических выводов важно, чтобы недостатки и даже успехи отдельных моделей не затемняли логику наших суждений. Многие реальные эффекты трудно моделировать иначе, как детальными численными экспериментами, которые становятся настолько узкими, что их невозможно сопо-

ставить с конкретными наблюдениями. Например, в реальной ситуации вещество, которое закручивается по пути к данной галактике, может в итоге вовсе не войти в ее состав. Те же самые сильные приливные воздействия, которые вызывают вращение, перепутывают линии тока вещества. В этих сложных условиях неприменима, например, теорема Кельвина о сохранении вихрей (см. учебник по механике жидкостей). Если происходит столкновение газовых масс или взаимопроникновение звездных потоков, то теорема Кельвина не выполняется на малых масштабах. Если происходит обмен веществом между протогалактиками, эта теорема становится несправедливой на больших масштабах, которые соответствуют наблюдаемым в настоящее время моментам импульса галактик.

Приливные моменты вращения — это далеко не единственный фактор, обеспечивающий передачу момента импульса. Другие процессы исследованы в еще меньшей степени. Пожалуй, наиболее простой из них — это реальное объединение галактик или протогалактик. Предположим, что N субгалактик, каждая с массой m и средней случайной скоростью v , объединяются, образуя галактику радиуса R . Тогда можно ожидать, что средний результирующий момент импульса будет порядка $L \approx NmRv/\sqrt{N} = mRv\sqrt{N}$. Внутренний момент импульса каждой составляющей также вносит вклад в общую величину. Если эти составляющие находятся в вириальном равновесии, то каждая из них может обладать максимальным внутренним моментом импульса порядка $L_i = (GM^3r)^{1/2}$. Их общий вклад может достигать $\sim L_i N$, если оси вращения имеют сильную тенденцию к параллельной ориентации, или $\sim L_i \sqrt{N}$, если эта тенденция отсутствует, и они могут иметь любое направление относительно плоскостей орбит.

Если протогалактики вначале состоят из газа и формируются в турбулентных областях, то турбулентная вязкость также может обеспечивать передачу момента импульса. Здесь снова необходимо повторить, что мы плохо понимаем основы физики турбулентной вязкости, поэтому единственное, что возможно, — это конструировать феноменологические модели (например, *Saslaw*, 1971) в качестве иллюстраций. Магнитные поля, воздействие которых может быть эффективным, даже если преобладающая часть газа нейтральна, также должны создавать дополнительные механизмы передачи момента импульса.

Все факторы, обеспечивающие передачу импульса — приливный момент вращения, объединение, турбулентная вязкость, магнитные поля, — рассматриваются применительно к галактикам, которые образуются либо путем объединения субгалактик, либо путем фрагментации большого газового облака. Формируются ли сначала протогалактики, испытывая затем сгущивание, или же первыми образуются протоскопления, а затем они фрагментируют на отдельные галактики — это до сих пор первостепенный вопрос в космологии. Если бы мы могли обнаружить определенные различия в распределении моментов импульса, которые можно приписать либо сгущиванию, либо фрагментации, мы сделали бы огромный шаг вперед.

59. КРИВЫЕ ВРАЩЕНИЯ И МАССА ГАЛАКТИКИ.

Здесь тонкий поворот дела, и нам понадобилась ловкость, чтобы это заметить.

Шекспир

Чтобы сравнивать выводы теории передачи момента импульса со свойствами наблюдаемых галактик, необходимо знать, как наблюдаемые кривые вращения связаны с распределениями массы и момента импульса внутри галактики. Прямая связь существует только в случае, если равновесие между силой тяготения и центробежной силой преобладает над движениями внутри галактики. Почти без сомнения, это условие выполняется внутри плоского диска спиральной галактики. Однако во внешних деформированных областях и в центральных балджах спиралей, а также в эллиптических и неправильных галактиках ситуация менее ясна. Внутри этих менее плоских образований неотрелаксировавшие потоки и хаотические движения звезд, магнитные силы и силы давления в газе могут вносить большой вклад в наблюдаемые скорости. В моделях, конечно, можно учесть все эффекты, но пока они не определены независимо, их учет будет увеличивать степень неуверенности результата.

Здесь рассматриваются только гравитационные эффекты, потому что они обеспечивают качественное объяснение типичной кривой вращения, изображенной на рис. 51. До сих пор такие кривые были самыми надежными результатами, поэтому они заслуживают, чтобы им была посвящена особая глава. Чтобы увидеть, как тяготение определяет общую форму кривых вращения у спиральных галактик, начнем с равновесия между гравитационным и центробежным ускорениями в плоскости вращения:

$$\frac{v^2(r)}{r} = - \left. \frac{\partial \phi}{\partial r} \right|_{z=0}, \quad (59.1)$$

где $v(r)$ — линейная скорость вращения [обозначенная через u_ϕ в выражении (57.28)], а гравитационный потенциал ϕ следует из уравнения Пуассона (15.4):

$$\nabla^2 \phi = -4\pi G \rho. \quad (59.2)$$

Здесь положительный градиент потенциала представляет собой силу на единицу массы. Таким образом, если тяготение — единственная действующая сила, то распределение плотности полностью определяет кривую вращения.

Простейшее решение имеет задача о пробных частицах, вращающихся вокруг материальной точки с массой M . Это решение дает $\phi = GM/r$ и $v^2 = GM/r$. Такое круговое кеплеровское движение следует также из теоремы вириала, как отмечалось в конце гл. 9. Достаточно удаленные от любых распределений масс для того чтобы их мультипольные моменты можно было бы не учитывать, такие траектории должны быть кеплеровскими. Применение этой формулы к наблюдаемой скорости $v(r)$ внутри галактики дает оценку по порядку величины для массы внутри области данного радиуса и, таким образом, грубое ограничение на полную массу галактики.

Другое простейшее решение существует у задачи о пробных частицах, вращающихся внутри сферы, в которой распределена масса. Переменная часть потенциала, которая определяет силу, есть $\phi = GM(r')/r$ и $v^2(r') = GM(r')/r'$. Если плотность распределена однородно, $M(r') \propto r'^3$ и $v \propto r'$, т. е. вращение твердотельное. Любое лишенное особенностей распределение плотности можно разложить в ряд Тейлора вокруг центральной точки. Поскольку первый член этого ряда постоянен (центральная плотность), нас не должно удивлять, что в центре галактики есть область, вращающаяся как твердое тело, по крайней мере если усреднены локальные неоднородности. Что действительно должно нас удивлять, так это протяженность такой области. В случае спиральных галактик действует успокаивающе тот факт, что эта область приблизительно совпадает с центральным балджем. Более трудная задача — понять динамическое происхождение центрального балджа. Дальше от центра над сферическим распределением преобладает зависимость $\rho \propto r^{-2}$, создающая область с постоянной скоростью вращения, что также часто подтверждается наблюдениями. Это распределение плотности характерно для изотермической сферы большого радиуса (гл. 40), что позволяет предполагать, по мнению некоторых астрономов, существование массивных сферических гало вокруг галактик. Конечные несферические распределения могут также иметь постоянную скорость вращения (как мы вскоре увидим), поэтому изотермические гало не являются единственной интерпретацией.

Хотя рассмотрение точек и сфер передает физическую суть проблемы, нетрудно построить более совершенные модели распределений с вращательной симметрией, такие, как эллипсоиды и сфероиды. Их потенциалы можно получить из уравнения Пуассона или найти в книге Мак-Миллана (*MacMillan*, 1958). Находить результаты в учебниках, возможно, проще, но более достойный путь — получать их самостоятельно. Общий вывод о том, что конечные диски при прочих равных условиях дают более плоские кривые вращения, чем идеализированные бесконечные диски, физически легко объяснить. Силы, действующие на круговой орбите в бесконечном диске, складываются из притяжения внутренней массы, центробежной силы и притяжения внешней массы. Уберите внешнюю массу, и траектория потеряет составляющую, обусловленную внешней силой. Для сохранения равновесия движение должно ускориться, и возросшая центробежная сила скомпенсирует потерю.

Чтобы построить более реальные модели вращения галактики, следует принять во внимание, что в распределение плотности входит много компонент. Это можно сделать различными способами, например представить галактику состоящей из ряда тонких сфероидальных оболочек, чтобы каждая из них имела постоянную плотность (они называются гомоидами). Основное достоинство такого подхода (*Burbidge et al.*, 1959) состоит в том, что внутри гомоида результирующая гравитационная сила отсутствует; сила на поверхности данного радиуса зависит только от массы внутри нее. Это упрощает интегральную форму уравнения (59.2). Если $U(r, a)$ — потенциал однородного сфероидальной единичной плотности с главной полуосью a , то

$$\phi(r) = - \int_0^r \rho(a) \frac{dU}{da} da. \quad (59.3)$$

Здесь мы пренебрегли внешней массой, которая вносит вклад в потенциал, но не в его градиент. Плотности $\rho(a)$ различных оболочек могут быть разными. Интегрирование производится по всей массе внутри поверхности радиуса r . Подстановка выражения (59.3) в (59.1) дает интегральное уравнение для скорости вращения

$$v^2(r) = r \int_0^r \rho(a) \frac{\partial^2 U(r, a)}{\partial r \partial a} da. \quad (59.4)$$

Теперь разложим выражения справа и слева в степенные ряды по r . Коэффициенты слева выбираются так, чтобы наилучшим образом представить наблюдаемую кривую вращения. Поскольку мы знаем функцию $U(r, a)$, то в разложении правой части неизвестны только коэффициенты разложения плотности. Их можно определить приравниванием коэффициентов при одинаковых степенях r с обеих сторон, что дает $\rho(r)$.

На практике такой подход сопряжен с очень серьезными затруднениями. Во-первых, приписывая галактике форму гомоида, мы вводим погрешности, величина которых не известна. Исходные структуры различной формы обеспечивают одинаково хорошие приближения к реальному распределению плотности, хотя это и усложняет интегральное уравнение. Во-вторых, результаты будут зависеть от эксцентricитеты сфероидов. О ее величине можно только догадываться, исходя из отношения главных осей галактики и общей структуры; здесь не удастся получить согласованных оценок. В-третьих, не всегда можно достаточно хорошо аппроксимировать наблюдаемую кривую скоростей с помощью полинома. Когда испытывают полиномы различных порядков, часто оказывается, что выражение для плотности сходится медленно и нерегулярно. В-четвертых, даже если приближение оказывается удовлетворительным для основной части галактики, его нельзя точно экстраполировать на большие расстояния. Момент импульса сосредоточен в основном на больших радиусах. Таким образом, хотя часто внутреннюю массу можно определить довольно точно, полный момент импульса определяется очень неуверенно.

При альтернативном подходе используется отношение главных осей спиральных галактик. Если мы запишем уравнение Пуассона (59.2) в цилиндрических координатах (r, θ, z) , то

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = -4\pi G \rho. \quad (59.5)$$

Благодаря осевой симметрии ρ не зависит от θ , поэтому третий член равен нулю. Однородная форма этого уравнения ($\rho = 0$) есть не что иное, как уравнение Лапласа, и его обычно решают, разделяя переменные. При подстановке $\phi(r, z) = R(r)Z(z)$ в уравнение (59.5) при $\rho = 0$ и делении всего уравнения на RZ получается, что часть членов зависит только от z , а другая зависит толь-

ко от r . Так как изменение одной переменной не может влиять на члены, зависящие от другой переменной, каждая из этих двух групп должна быть равной постоянной величине, чтобы равенство сохранилось. Обозначив эту постоянную через k^2 , получаем два простых дифференциальных уравнения:

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} - k^2 Z = 0, \quad (59.6)$$

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + k^2 R = 0. \quad (59.7)$$

Решение уравнения (59.6), симметричного относительно плоскости галактики, есть

$$Z(z) = e^{-k|z|}. \quad (59.8)$$

Уравнение (59.7) — это элементарная форма уравнения Бесселя и его решения, которые остаются конечными в начале координат, являются функциями Бесселя нулевого порядка $J_0(kr)$. (Функции Бесселя более высокого порядка необходимы, если нарушается азимутальная симметрия.) Таким образом, собственные функции однородного уравнения есть $e^{-k|z|} J_0(kr)$ для различных собственных значений k .

Эти простые собственные функции будут также давать решения неоднородного осесимметричного уравнения Пуассона для частных случаев распределения плотности, когда масса на единицу площади поверхности тонкого диска пропорциональна $J_0(kr)$. В более общем случае осесимметричная поверхностная плотность может быть выражена интегралом Бесселя от $J_0(kr) k dk$ (аналогично интегралу Фурье от $\exp(ikr) dk$) и (59.5) дает потенциал. Уравнение (59.1) затем связывает распределение плотности с профилем скоростей.

Такая процедура применялась Тумре (Toomre, 1963) в случае тонких дисков. Поверхностная плотность $\mu(r)$ диска связана с его кривой вращения следующим образом:

$$\mu(r) = 2 \int_0^\infty \rho dz = \frac{1}{2\pi G} \int_{s=0}^\infty \frac{dv^2(s)}{ds} \int_{k=0}^\infty J_0(rk) J_0(sk) dk ds. \quad (59.9)$$

Здесь s — записанный в виде переменной постоянный радиус, и внутренний интеграл может также быть выражен в виде гипергеометрической функции или эллиптического интеграла. Простейший пример — это профиль квадрата скорости

$$v_0^2(r) = c_0^2 (1 + r^2/a^2)^{-1/2}, \quad (59.10)$$

которому соответствует поверхностная плотность

$$\mu_0(r) = \frac{c_0^2}{2\pi G} \left[\frac{1}{r} - (a^2 + r^2)^{-1/2} \right], \quad (59.11)$$

где c_0 и a — произвольные постоянные. Поскольку соотношение (59.9) показывает, что $\mu(r)$ и $v^2(r)$ линейно связаны, то любая сумма, разность или производная от (59.10) по параметру a имеет сходную с ней сумму, разность или производную от соответствующей поверхностной плотности. Таким образом, Тумре строит классы моделей, подобные следующим:

$$v_n^2(r) = c_n^2 \left\{ -\frac{\partial}{\partial a^2} \right\}^{n-1} \left[\frac{r^2}{a} (a^2 + r^2)^{-3/2} \right], \quad (59.12)$$

$$\mu_n(r) = \frac{c_n^2}{2\pi G} \left\{ -\frac{\partial}{\partial a^2} \right\}^{n-1} [(a^2 + r^2)^{-3/2}]. \quad (59.13)$$

Это удобные схематические представления наблюдаемых кривых вращения с их предполагаемыми поверхностными плотностями. Примеры дальнейшего анализа в этом направлении разработаны Нордсиком (*Nordsiek*, 1973, а также следующая статья, в которой теория применяется к результатам наблюдений). Более сложная задача о некруговых движениях исследована хуже.

Нахождение поверхностной плотности галактики в действительности есть лишь первый шаг к пониманию происхождения ее вращения. Следующий шаг состоит в том, чтобы найти для нее распределение момента импульса. В гл. 58 лишь вскользь говорится о деталях внутреннего распределения момента импульса, который создается приливным моментом вращения, поскольку об этом, как и о последующей передаче момента, известно слишком мало. Теперь же мы в состоянии посмотреть, к чему может привести простейшая картина коллапса вращающейся протогалактики и разобраться в подробностях сохранения момента импульса (*Mestel*, 1963; *Crampin and Hoyle*, 1964).

Зная поверхностную плотность, в принципе легко найти распределение момента импульса. На практике это сделать сложнее, потому что погрешности построения кривой вращения влияют как на оценку поверхностной плотности, так и скорости, определяющих момент импульса. Рассмотрим снова тонкий диск и положим, что $h(r) = rv(r)$ есть момент импульса на единицу массы на расстоянии r от оси вращения. Масса вещества в кольце между радиусами r и $r + dr$ есть

$$dm(r) = 2\pi\mu(r)rdr. \quad (59.14)$$

Из соотношения

$$dh = \left(r + r \frac{dr}{dr} \right) dr \quad (59.15)$$

получается количество вещества с удельным моментом импульса между h и $h + dh$

$$dm(h) = 2\pi\mu(r) \left(\frac{r}{r} + \frac{dr}{dr} \right)^{-1} dh = -\frac{\pi\mu(r)}{B(r)} dh, \quad (59.16)$$

где $B(r)$ — постоянная Оорта, представленная выражением (57.28). Поэтому B можно интерпретировать не только как численный коэффициент, но и как якобиан преобразования между моментом импульса на единицу площади и удельным моментом импульса в случае кругового вращения. Расстояние по радиусу может быть выражено через h из соотношения $h = rv(r)$, пока h монотонно возрастает вместе с r . Тогда $dm(h)$ можно проинтегрировать по всему интервалу измерения h , чтобы получить полный момент импульса галактики. Для диска нашей Галактики получаются оценки момента импульса порядка $10^{74} \text{ г} \cdot \text{см}^2/\text{с}$, которым соответствует масса около $10^{11} M_{\odot}$.

Теперь рассмотрим сфероидальную протогалактику, закрученную гравитационным моментом вращения, как было описано в последней главе. Уравнение сфероида в цилиндрических координатах имеет вид: $a^2 z^2 + b^2 r^2 = a^2 b^2$, где a и b — большая и малая полуоси. Примем простейшую модель, в которой плотность ρ распределена однородно внутри всей системы, и система вращается как твердое тело. Тогда $h = r^2 \omega$, или

$$dh = 2\omega r dr. \quad (59.17)$$

Чтобы найти массу вещества, заключенного между r и $r + dr$, с моментом импульса от h до $h + dh$, заметим, что объем, ограниченный сфероидом на расстоянии r от оси z , есть

$$V(r) = \int_0^{2\pi} \int_0^r 2 \int_0^{b(a^2 - r^2)^{1/2}/a} s dz ds d\theta = 4\pi \int_0^r s(a^2 - s^2)^{1/2} ds. \quad (59.18)$$

Последний интеграл тривиален и его даже не требуется вычислять, поскольку нас интересует оболочка между r и $r + dr$, которая задается выражением dV/ds . Поэтому

$$dm(h) = \frac{4\pi b \rho}{a} (a^2 - r^2)^{1/2} r dr = \frac{2\pi b \rho}{\omega} \left(1 - \frac{h}{a^2 \omega}\right)^{1/2} dh, \quad (59.19)$$

если использовать (59.7).

Такая протогалактика, в которой нет уравновешивающей центробежной силы (или давления), должна сжиматься. Проще всего сжатие протекает при сохранении каждым элементом вещества своего момента импульса: нет ни турбулентного перемешивания, ни внутренних моментов вращения. Сфероид сжимается, сохраняя распределение (59.19), пока не образуется тонкий диск, находящийся в центробежном равновесии (причем давление газа или хаотические скорости звезд определяют конечный размер диска по вертикали). Хотя как v , так и r будут меняться по мере сжатия, $h = h' = rv(r) = r'v'(r')$ остается без изменений (штрихами обозначены величины, получившиеся после сжатия). Когда сжатие закончится, соотношение (59.16) останется справедливым для нештрихованных величин. Поскольку $dm(h) = dm'(h')$, можно приравнять правые части соотношений (59.16) и (59.19), опустив теперь для простоты штрихи. Более того, большая полуось сфероида a сжимается до значения R радиуса равновесного диска. Результат, нормированный на централь-

ную поверхностную плотность, имеет вид

$$\mu(r) = \mu(0) \left(\frac{v}{r} + \frac{dr}{dr} \right)^{-1}_{r=0} \left(\frac{v}{r} + \frac{dr}{dr} \right) \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right)^{1/2} \quad (59.20)$$

Эта формула связывает поверхностную плотность с кривой вращения в диске, образованном сжавшимся сфероидом с первоначально однородными распределениями плотности и угловой скорости, и сохраняющимся моментом импульса. В частном случае, когда образовавшийся диск тоже вращается как твердое тело, получается простое выражение для поверхностной плотности $\mu(r) = \mu_0(1 - r^2/R^2)^{1/2}$ всего диска (Mestel, 1963).

Чтобы выяснить, не образуются ли также просто и реальные галактики, можно использовать их наблюдаемые кривые вращения, чтобы вычислить $\mu(r)$ по общей формуле (59.9), а затем сделать то же самое для особого космогонического случая, представленного формулой (59.20). Согласие результатов покажет, что простая космогоническая модель по крайней мере не противоречит наблюдениям, хотя и не обязательно с неизбежностью вытекает из них. Другие, более сложные модели могут быть построены подобным же образом и так же проверены наблюдениями.

Общие принципы, изложенные в этой главе, можно использовать, чтобы получить интересные оценки по порядку величины, характеризующие связь между полной массой спиральной галактики, максимальной скоростью вращения, светимостью и полным моментом импульса. Это дает немногим больше, чем оценки из соображений размерности, но позволяет почувствовать, чего следует ожидать. Предположим, что все физические величины представляют собой средние или характерные для данной галактики значения. Полный момент импульса спиральной галактики $H \approx MRv$ и при равновесии $GM \approx Rv^2$, так что

$$H \approx \frac{GM^2}{v} \approx \frac{R^2 v^3}{G} \approx \frac{R^5 \omega^3}{G}. \quad (59.21)$$

Из соотношений (59.13) и (59.20) следует, что допустимые зависимости для поверхностной плотности можно разложить в ряд в форме $\mu = \mu_0(1 - r^2/R^2 + \dots)$. Поэтому в центральной части диска спиральной галактики вплоть до некоторого характерного масштаба R характерная масса есть $M \approx \pi\mu_0 R^2$. Объединяя этот результат с условием равновесия, получаем, что

$$r^2 \approx \pi G \mu_0 R \approx G(\pi\mu_0 M)^{1/2}. \quad (59.22)$$

Поэтому момент импульса

$$H \approx \left(\frac{G^2}{\pi\mu_0} \right)^{1/4} M^{7/4} \propto R^{7/2}. \quad (59.23)$$

Эти зависимости можно выразить через светимость центральной области (составляющую, пожалуй, основную часть полной светимости), если сделать дополнительное предположение, что $L \propto M$. Это предположение означает,

что характерный масштаб изменений светимости в центральных областях галактики соответствует характерному масштабу изменений поверхностной плотности. Другими словами, это значит, что соотношение масса — светимость мало меняется вблизи центра. Тогда $v^4 \propto M \propto L$. Более того, если мы повторим приведенные выше рассуждения, заменяя условие центростремительного равновесия теоремой вириала с дисперсией скоростей σ и полагая, что $L \propto M \propto R^2$, то придем к соотношению

$$\sigma \propto L^{1/4}. \quad (59.24)$$

Чтобы обобщить этот вывод на многие галактики, необходимо, чтобы коэффициент пропорциональности (учитывающий соотношение масса — светимость, поверхностную плотность в центре и различные характерные длины) был общим для всех галактик. Имеются определенные, хотя и не вполне однозначные свидетельства, что так и есть на самом деле.

60. ОРБИТЫ И ТРЕТЬИ ИНТЕГРАЛЫ

Если вы спросите об особом значении
Нашего безостановочного движения,
То мы ответим без тени смущения,
Что не имеем ни малейшего представления!

Гилберт и Салливан

Лишь немногие орбиты в сглаженных осесимметричных галактиках являются строго круговыми, а в несимметричных силовых полях совсем отсутствуют правильные траектории. Некоторые орбиты, подобно обитателям Аркадии, перемешаются эргодически в разных направлениях и их нельзя описать специальными функциями. Движения других, более связанных, в какой-то степени предсказуемы.

В этой главе мы исследуем некоторые общие свойства орбит в сглаженном силовом поле плоской галактики. После того как галактика образовалась, характерное время парной релаксации τ_R обычно становится очень большим по сравнению с динамическим временем пересечения τ_c или даже со временем Хаббла. Поэтому бесстолкновительное уравнение Больцмана хорошо описывает внутренние динамические процессы. Как показывает соотношение (7.15), это описание эквивалентно полной информации об орбитах звезд в сглаженном усредненном поле. Таким образом, есть возможность пойти путем, обратным тому, который рассмотрен в гл. 7, и, исходя из формы орбит, построить самосогласованную функцию распределения (см. гл. 63). Естественно, что в несимметричных системах орбиты очень сложны. Чтобы найти их, обычно требуется громоздкое численное интегрирование, очень специфичное для каждой модели. Однако некоторые типы орбит являются общими для разумного диапазона идеализированных моделей, и мы можем здесь рассмотреть их.

После круговых орбит простейшими являются движения по траекториям, пересекающим плоскость симметрии $z = 0$. Если эти орбиты не теряются вдали от плоскости, они зависят в первую очередь от локальной плотности $\rho(r, z)$, а не от общего поля галактики. Чтобы получить общие уравнения движения звезды во вращающейся осесимметричной галактике, начнем выражения для кинетической энергии в цилиндрической системе координат для звезды единичной массы

$$T = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2). \quad (60.1)$$

Таким образом, канонические выражения для составляющих импульсов

$$p_k = \frac{\partial T(\dot{q}_k)}{\partial \dot{q}_k} \quad (60.2)$$

есть

$$p_r = \dot{r}, \quad p_\theta = r^2\dot{\theta}, \quad p_z = \dot{z}. \quad (60.3)$$

Гамильтониан (с отрицательной потенциальной энергией, $-\phi$, на единицу массы) имеет вид

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{1}{2}(p_r^2 + r^{-2}p_\theta^2 + p_z^2) - \phi(r, \theta, z). \quad (60.4)$$

Подстановка соотношений (60.3) и (60.4) в канонические уравнения (7.16) дает уравнения движения в невращающейся системе координат:

$$\ddot{r} = r\dot{\theta}^2 + \frac{\partial \phi}{\partial r} \quad (60.5)$$

[что обобщает уравнение (59.1)],

$$r\ddot{\theta} = -2\dot{r}\dot{\theta} + \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta} \quad (60.6)$$

(куда включена сила Кориолиса),

$$\ddot{z} = \frac{\partial \phi}{\partial z}, \quad (60.7)$$

где $\partial \phi / \partial \theta = 0$ из-за наличия осевой симметрии. Между прочим, подставляя канонические формулы (60.3) и (60.4) в (7.17), можно легко найти уравнение Больцмана для системы с цилиндрической геометрией.

Можно сразу же заметить, что движение по вертикальной оси описывается отдельным уравнением, поскольку оно зависит только от $\phi(r, z)$. Причина состоит в том, что в направлении z отсутствуют центробежные силы. Из физических соображений легко найти вид силового члена F_z из правой части уравнения (60.7) для звезды вблизи плоскости галактики. Постоянная в разложении F_z по степеням z должна быть равна нулю, чтобы соблюдалось равновесие при $z = 0$. Следующий член разложения, пропорциональный $-z$, который обеспечивает устойчивость равновесия, вероятно, доминирует и порождает обычные гармонические колебания. Чтобы определить их частоту более точ-

но, используем уравнение Пуассона (59.5). На протяжении большей части сильно уплощенного диска, за исключением областей вблизи его края, радиальный градиент потенциала много меньше вертикального. Из-за наличия осевой симметрии угловой градиент полностью исчезает. Поэтому соотношение (59.5) можно аппроксимировать выражением

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = -4\pi G \rho. \quad (60.8)$$

Если распределение плотности симметрично относительно плоскости $z = 0$, то оно имеет вид: $\rho = \rho_0 - \text{const } z^2 + \dots$. Поэтому в главном приближении по z сила равна

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = -4\pi G \rho_0 z. \quad (60.9)$$

Если подставить соотношение (60.9) в (60.7) и решить получившееся уравнение гармонического осциллятора, то

$$z = z_0 \cos [\alpha(t - t_\alpha)], \quad (60.10)$$

где угловая частота

$$\alpha = (4\pi G \rho_0)^{1/2}, \quad (60.11)$$

а t_α — начальный момент времени. Эти простые колебания происходят только в том случае, если r много меньше радиуса сглаженного диска и z также много меньше характерного масштаба изменения плотности по вертикали. Если это не так, то необходимы более подробные модели для ρ и ϕ (см. пример в гл. 66). Более того, подробные модели необходимы также, если распределение плотности вблизи плоскости настолько нерегулярно, что это нарушает устойчивость орбит в этой области; примером служат деформированные диски.

Если поле тяготения в высокой степени симметрично вблизи $z = 0$, можно воспользоваться уравнением (60.9), чтобы оценить локальную плотность ρ_0 вблизи плоскости галактики из наблюдений. Для этого требуется дополнительное уравнение, описывающее силу. Простейшая оценка получается для модели, в которой движение объектов, составляющих диск, описывается бесстолкновительным уравнением Больцмана (гл. 7 и 8). Уравнение передачи импульса (8.20) упрощается еще больше и принимает вид

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} = \langle v^2 \rangle \frac{\partial \ln \rho}{\partial z} \quad (60.12)$$

при изотропном давлении в стационарных условиях, когда $P = \rho \langle v^2 \rangle$ [на основании уравнения (8.18)] и дисперсия скоростей не зависит от координат. Здесь снова важен только градиент по вертикали.

Ясно, что при рассмотрении этой задачи уже введено много упрощающих предположений. Однако их требуется еще больше. Градиент плотности в уравнении (60.12) нельзя определить прямо из наблюдений, поскольку невоз-

можно наблюдать все составляющие диска. По этой причине необходим ряд дополнительных упрощающих предположений. Допустим, что объекты данного типа, составляющие диск (скажем, звезды данного спектрального класса или облака газа с определенными свойствами), можно рассматривать как пробные частицы, движущиеся в усредненном силовом поле, созданном остальными составляющими. Объекты данного типа не должны ни взаимодействовать с остальными объектами, ни проявлять корреляции, оставшиеся с более ранних стадий формирования галактики. Они должны быть хорошо перемешаны внутри всего диска. Если эти условия выполняются, то по градиенту данной составляющей при некотором значении z можно оценить величину силы в уравнении (60.12) и среднюю плотность ρ_0 вблизи плоскости диска согласно выражению (60.9).

Применение этого метода к нашей Галактике дает довольно неопределенный результат. В обзоре Блау и Шмидта (*Blaauw and Schmidt*, 1965; см., в частности, главы, написанные Оортом и Шмидтом) представлены многие стороны проблемы. Для окрестностей Солнца получена средняя плотность $\rho_0 \approx 10^{-23}$ г/см³. Найдено, что если использовать независимо оцененное соотношение масса — светимость, то вклад светимости всех наблюдаемых звезд соответствует почти половине этого значения. Оставшаяся доля (которую иногда называют пределом Оорта) представляет собой максимальное количество несветящегося вещества или межзвездного газа, которое может присутствовать в окрестности Солнца. Если учесть все теоретические упрощения, введенные в анализ, и трудность наблюдений, то в результате можно легко ошибиться по крайней мере вдвое. В локальной структуре нашей Галактики еще многое остается неясным.

Обращаясь теперь к орбитам, лежащим в плоскости, мы в общем случае должны решить уравнения (60.5) и (60.6), приняв конкретные модели распределения массы. При угловой симметрии уравнение (60.6) выражает давно знакомое нам условие сохранения момента импульса: $h = r^2\dot{\theta} = \text{const}$. Если в начале орбиты круговые, мы возвращаемся к моделям, описанным в гл. 59. Теперь можно сделать следующий шаг и посмотреть, как эти круговые орбиты реагируют на малые возмущения. Записав малое отклонение от произвольной орбиты в виде

$$r = r_0 + r_1, \quad \theta = \theta_0 + \theta_1 \quad (60.13)$$

и подставляя эти выражения в (60.5), получаем

$$\ddot{r}_0 + \ddot{r}_1 = \frac{h^2}{(r_0 + r_1)^3} + \frac{c}{dr} \phi(r_0 + r_1). \quad (60.14)$$

Орбита возмущается при постоянном моменте импульса, хотя возможно обобщение на системы с малым внешним вращающим моментом. В качестве невозмущенной орбиты $r_0(t)$ можно взять любую устойчивую орбиту, но круговая орбита — самый простой случай. После разложения $\phi(r)$ в ряд Тейлора в окрестности r_0 и вычитания невозмущенной составляющей орбиты уравнение (60.14) в линейном приближении принимает вид

$$\ddot{r}_1 = -\kappa^2 r_1, \quad (60.15)$$

где

$$\kappa^2 = - \left[\frac{3}{r_0} \left(\frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \right) \right]_{r_0}. \quad (60.16)$$

Решение снова записывается в форме

$$r_1 = r_1(t_k) \cos \kappa(t - t_k), \quad (60.17)$$

что дает гармонические колебания при $\kappa^2 > 0$. Частота κ называется эпициклической частотой. Когда $\kappa^2 < 0$, возмущение r_1 экспоненциально растет и орбита неустойчива. Возникают отклонения от первоначальной формы, существовавшей в момент t_k , и они растут до тех пор, пока члены более высокого порядка не начнут либо гасить, либо ускорять это отклонение.

Чтобы получить представление о законах изменения сил, при которых может сохраняться устойчивость круговых орбит, рассмотрим простой потенциал

$$\phi = ar^{-m} + b, \quad (60.18)$$

где m , a и b постоянны. Для силы притяжения $\partial\phi/\partial r$ величина $ma > 0$ и легко проверить, что при выполнении требования устойчивости $\kappa^2 > 0$ величина $m < 2$. Таким образом, силы, которые уменьшаются с расстоянием быстрее, чем r^{-3} , слишком слабы, чтобы помещать отклонениям от потерявших устойчивость круговых орбит. В качестве упражнения читатель может продолжить наш анализ, чтобы найти наиболее эффективный способ разрушения некруговых орбит.

Возмущение (60.13) может также влиять на угловую координату орбиты. В некоторый заданный момент времени угловая координата звезды может быть изменена относительно своего невозмущенного значения, а скорость и радиус орбиты изменяются соответственно. У круговой орбиты с постоянным моментом импульса эти возмущения должны быть связаны с членами первого порядка следующим образом:

$$h = r_0^2 \dot{\theta}_0 = r^2 \dot{\theta} = (r_0 + r_1)^2 \frac{d}{dt} (\theta_0 + \theta_1) = r_0^2 \dot{\theta}_0 + 2r_0 \dot{\theta}_0 r_1 + r_0^2 \dot{\theta}_1, \quad (60.19)$$

или

$$\dot{\theta}_1 = -\frac{2\dot{\theta}_0}{r_0} r_1 = -\frac{2\omega}{r_0} r_1. \quad (60.20)$$

Подстановка решения (60.17) и интегрирование дают затем

$$\theta_1 = -\frac{2\omega r_1(t_0)}{r_0 \kappa} \sin \kappa(t - t_0). \quad (60.21)$$

Отметим, что при положительном начальном радиальном возмущении $\dot{\theta}_1$ уменьшается со временем, так что возмущение движется вспять относительно ω . Это эквивалентно утверждению, что угловая скорость должна уменьшаться

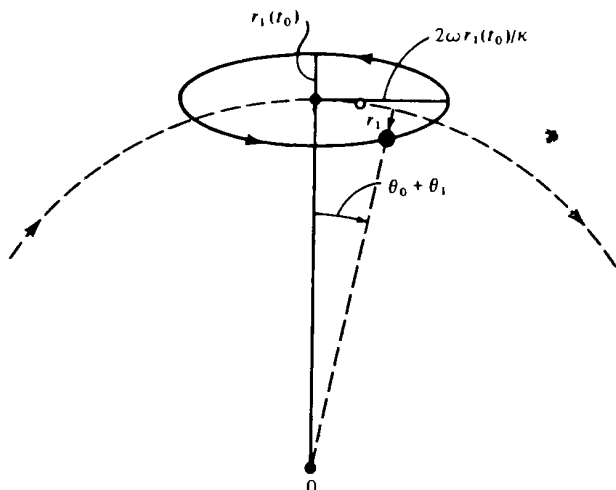


Рис. 55. Эпициклическая частота κ во вращающейся системе отсчета, связанной с возмущенной круговой орбитой, имеющей частоту ω . Кружком обозначено положение звезды в случае отсутствия возмущения; большой закрашенный кружок отмечает действительное положение звезды.

с возрастанием r для сохранения момента импульса. Аналогично во второй половине эписикла координата r_1 отрицательна, а θ_1 положительна, так что возмущение движется быстрее, чем ω . Таким образом, возмущение угловой скорости имеет направление, противоположное угловой скорости невозмущенной орбиты, т. е. происходит движение в обратном направлении. Возмущение описывает эллипс с осями $r_1(t_0)$ и $2\omega r_1(t_0)/\kappa$ во вращающейся системе отсчета, как показано на рис. 55. Такое движение называется эпициклическим.

Ясно, что эпициклическая частота является основной характеристикой простых орбит. Круговые кеплеровские орбиты с $\phi = GM/r$ имеют $\kappa^2 = GM/r^3 = \omega^2$. Эти потенциалы быстрее всего сходятся к центру и дают скорость вращения $v \propto r^{-1/2}$. Плоские кривые вращения с $v = \text{const}$ характеризуются потенциалом $\phi = -c \ln r$, где c — положительная константа и, таким образом, $\kappa^2 = 2c/r^2 = 2\omega^2$. Кривые твердотельного вращения с $v \propto r$ характеризуются потенциалом $\phi = -cr^2/2$ и для них $\kappa^2 = 4c = 4\omega^2$. Все это показывает, что здесь имеется очень широкий диапазон возможностей. Связи между эпициклическими частотами вращения особенно важны для понимания коллективных возмущений орбит, приводящих к образованию спиральной структуры галактик.

Иногда полезно связать эпициклическую частоту с постоянными Оорта A и B для круговых орбит. Во-первых, подставляя уравнение (60.5) в форму (59.1) в (60.16), находим, используя выражение $v = r\omega$, что

$$\kappa^2 = 4\omega^2 \left(1 + \frac{r}{2\omega} \frac{d\omega}{dr} \right) = \frac{1}{r^3} \frac{d}{dr} (r^2 \omega)^2. \quad (60.22)$$

Таким образом, эпициклическая частота тесно связана с градиентом квадрата момента импульса. Затем из (57.28) и (57.12) (см. сказанное перед (57.28)) получаем

$$\omega = A - B \quad (60.23)$$

и, следовательно,

$$\kappa^2 = -4B(A - B), \quad (60.24)$$

или

$$\left(\frac{\kappa}{\omega} \right)^2 = -\frac{4B}{A - B}. \quad (60.25)$$

Использование приведенных в гл. 57 значений A и B для окрестностей Солнца в нашей Галактике дает $\omega = 25$ км/(с·кпс) и $\kappa = 31,6$ км/(с·кпс). Эти значения соответствуют периоду обращения вокруг центра Галактики по орбитам, проходящим в окрестности Солнца, $2\pi r / r\omega = 2\pi / (A - B) = 2,5 \cdot 10^8$ лет и эпициклическому периоду для них $2\pi / \kappa = 2 \cdot 10^8$ лет.

До сих пор мы довольствовались рассмотрением простых орбит. Теперь мы оказываемся лицом к лицу с реальными орбитами во всей их сложности. Помимо особенностей любой индивидуальной орбиты, существуют классы орбит с очень интересными общими свойствами. Наша точка зрения сближается с позицией статистической механики, и распределение орбит становится для нас важнее, чем детальная форма отдельной орбиты.

Рассмотрим упрощенный вариант фазового пространства: фазовую плоскость. Фазовая плоскость — это двумерное сечение фазового пространства, в котором расположены две любые ортогональные оси. Здесь мы обсудим две простейшие и наиболее информативные фазовые плоскости: плоскость $z - r$, которая характеризует орбиты, лежащие внутри и проходящие через осесимметричный диск, и плоскость $y - \dot{y}$ (обычно называемую фазовой плоскостью простых дифференциальных уравнений), которая характеризует положение и скорость для какого-либо одного измерения орбиты. Эти фазовые плоскости иногда называют поверхностями сечения, потому что они являются сечениями фазового пространства по выбранным значениям остальных координат. Дополнительные типы фазовых диаграмм, оси которых являются функциями координат фазового пространства, также информативны в отношении отдельных систем, и читатель может придумать несколько таких примеров.

На рис. 56 показано несколько основных классов орбит на плоскости $z - r$. Кривая нулевой скорости представляет собой геометрическое место точек, соответствующих предельным координатам любой связанной орбиты, обладающей заданной полной энергией при заданном потенциале. В предельном случае связанной орбиты скорость равна нулю. Таким образом, кривая нулевой скорости находится путем задания полной энергии орбиты

$$E = T + \phi, \quad (60.26)$$

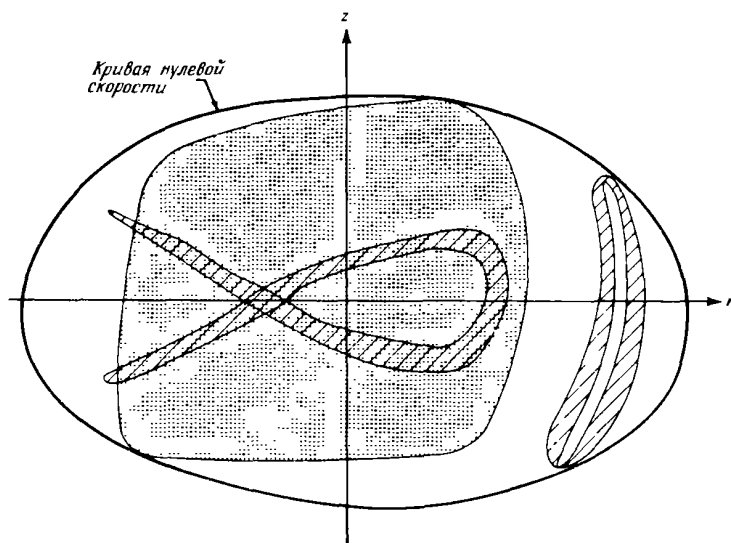


Рис. 56. Схематические границы расположения различных классов орбит на фазовой плоскости $z - r$. Звезды могут двигаться все время и всюду в покрытых точками («ящичные» орбиты) или заштрихованных («трубочные» и «оболочечные орбиты») областях.

равной ее потенциальной энергии: $E = \phi(r, z)$. Например, эписциклические орбиты, проходящие через плоскость и представленные выражениями (60.10) и (60.17), имеют постоянную энергию

$$E = \frac{1}{2}\dot{z}^2 + \frac{1}{2}\dot{r}_1^2 + \frac{1}{2}\alpha^2 z^2 + \frac{1}{2}\kappa^2 r_1^2. \quad (60.27)$$

Таким образом, кривая нулевой скорости есть эллипс $\alpha^2 z^2 + \kappa^2 r_1^2 = 2E$. Эллипсы являются кривыми нулевой скорости для любых двумерных гармонических осцилляторов.

Данное значение E изолирует связанные орбиты внутри системы, т. е. те из них, которые находятся внутри кривой нулевой скорости, от всех остальных возможных орбит внутри системы. Это характерное свойство изолирующего интеграла, и мы уже видели в гл. 39, что энергия является таким интегралом. Если бы энергия была единственным изолирующим интегралом, то орбиты могли бы проходить всюду внутри кривой нулевой скорости, заполняя случайным образом всю ограниченную ею площадь. Однако численное интегрирование орбит при определенных потенциалах показывает, что они часто привязаны к подобластям внутри кривой нулевой скорости, по крайней мере, в течение долгого времени. Для таких подобластей бывают характерны формы, напоминающие «ящики», удлинённые трубки и соприкасающиеся в двух местах оболочки. Все они показаны на рис. 56.

Орбитам внутри «ящика» соответствует движение по сложным траекториям, которые размещаются по всей показанной на рисунке области, иногда достигая ее границ. Орбиты с одинаковой энергией, но различными начальными координатами и скоростями покрывают всю область целиком. Орбиты, заключенные в трубки, вычерчивают длинные петли внутри узкой замкнутой области, которая заштрихована на рисунке. При строго периодической устойчивой замкнутой орбите трубка должна сжиматься в линию. Орбиты внутри оболочек проходят вверх и вниз сквозь плоскость, причем направление обращения сохраняется постоянным. На рисунке область в виде оболочки показана справа от «ящика», но они могут располагаться где угодно. Если запрещенная область между двумя частями оболочки становится исчезающе малой, в результате возникает «ящичная» орбита; бесконечно тонкая оболочка переходит в линейную орбиту.

Что заставляет орбиты, лежащие вблизи диска, располагаться внутри таких живописных подобластей? Конечно же, еще один изолирующий интеграл. В гл. 39 показано, что стационарная бесстолкновительная система может иметь пять изолирующих интегралов. В исследованиях галактической структуры с диском интеграл, дополнительный к энергии и моменту импульса, обычно называется третьим интегралом. Является ли он изолирующим, зависит как от энергии орбиты, так и от детальной формы потенциала.

Рассмотрим некоторые примеры. Простейший из них — замкнутая периодическая орбита. В этом случае третьим интегралом является сама орбита, постоянная во времени. Любой вектор, амплитуда которого зависит только от констант орбиты и направление которого (скажем, от начала до точки, ближайшей к центру) является инвариантом орбиты, может быть взят в качестве интеграла движения. Например, вектор Лапласа — Рунге — Ленца

$$\mathbf{A} = \mathbf{p} \times \mathbf{L} - \frac{Gm^3}{r} \mathbf{r} \quad (60.28)$$

является третьим интегралом кеплеровских орбит (48.3) и задает их эксцентриситет $e = |\mathbf{A}|/Gm^3$ и направление на перигелий (см. *Goldstein*, 1980); уравнение $\mathbf{L} \cdot \mathbf{r} = 0$ задает плоскость орбиты. Орбиты, заключенные в трубку, имеют тенденцию располагаться вблизи замкнутых периодических орбит.

Чтобы рассмотреть второй пример, снова обратимся к гармоническим эпикам (60.10) и (60.17) в координатах z и r_1 . Поскольку силы по этим двум координатам не связаны друг с другом, т. е. переменные в потенциале $\phi(r_1, z)$ можно разделить, то движения по z и r_1 не зависят друг от друга. Поэтому энергия сохраняется раздельно по двум измерениям:

$$E_z = \frac{1}{2} \dot{z}^2 + \frac{1}{2} \kappa^2 z^2 \quad (60.29)$$

$$E_{r_1} = \frac{1}{2} \dot{r}_1^2 + \frac{1}{2} \kappa^2 r_1^2. \quad (60.30)$$

Мы уже использовали полную энергию (60.27), чтобы найти эллипс нулевой скорости. Но теперь ясно, что в действительности существуют два независи-

мых изолирующих интеграла энергии среди величин E_z , E_{r_1} и E . Приняв, что это есть E_z и E_{r_1} , мы видим, что орбиты попадают внутрь «ящика» с прямоугольными стенками $r_1 = \pm (2E_{r_1})^{1/2}/\kappa$ и $z = \pm (2E_z)^{1/2}/\alpha$, вписанного в эллипс. В общем случае потенциалы ϕ разделяющимися переменными приводят к ограничениям типа «ящика», а потенциалы, обладающие таким свойством лишь приближенно (т.е. потенциалы, члены взаимодействия которых относительно малы в течение долгого времени), ведут к ограничениям, близким к типу «ящика», границы которого могут быть искривленными, как показано на рис. 56.

Существует ли третий интеграл для гармонических эпициклов? На примере кеплеровских орбит выше было показано, что сама замкнутая периодическая орбита является третьим интегралом, поэтому мы задаемся вопросом, могут ли гармонические эпициклы перемещаться по таким орбитам. Если исключить время из уравнений (60.10) и (60.17), то получается орбита

$$I_3 \equiv t_x - t_\kappa = \frac{1}{\kappa} \arccos\left(\frac{r_1}{r_{10}}\right) - \frac{1}{\alpha} \arccos\left(\frac{z}{z_0}\right), \quad (60.31)$$

где $r_{10} \equiv r_1(t_\kappa)$. Решение этого уравнения относительно r_1 при определенных значениях z и третьего интеграла I_3 дает соотношение

$$r_1 = r_{10} \cos \left[\kappa I_3 + \frac{\kappa}{\alpha} \text{Arccos}\left(\frac{z}{z_0}\right) + \frac{\kappa}{\alpha} 2n\pi \right], \quad (60.32)$$

где n — любое целое число, а Arccos — главное значение. Данное значение z получается только для конечного числа радиусов r_1 , если отношение κ/α рационально. Тогда орбита будет периодической и в дальнейшем сведется к одной линии внутри «ящика». Рациональность величин κ/α есть, таким образом, условие того, что I_3 является изолирующим интегралом. Если, с другой стороны, соотношение эпициклической и угловой частоты иррационально, то I_3 имеет бесконечное множество значений и не ограничивает орбиту. Звезда может двигаться всюду внутри «ящика» случайным образом, приближаясь сколь угодно близко к любому допустимому значению E_{r_1} и E_z . Поскольку рациональных дробей много меньше, чем иррациональных (рациональные составляют менее мощное множество), то существование точного третьего изолирующего интеграла — довольно редкое и специфическое обстоятельство. Оно отражает наличие локальной и глобальной симметрий и возможность разделить переменные в выражении для потенциала.

В реальном потенциале энергия и момент импульса обычно являются единственными очевидными изолирующими интегралами. Момент импульса влияет на кривую нулевой скорости, появляясь в выражении для «центробежного» вклада в потенциальную энергию в уравнении (60.5). Для двумерных орбит в четырехмерном фазовом пространстве $(r, z, \dot{r}, \dot{z})$ энергия и момент импульса дают уже два соотношения между $r, z, \dot{r}$ и $\dot{z}$, ограничивая расположение всех точек орбиты двухпараметрической поверхностью. Третий изолирующий интеграл должен ограничивать (периодическую) орбиту однопараметри-

ческой поверхностью, т. е. линией. Четвертый изолирующий интеграл должен свести орбиту к точке, что едва ли вообще является орбитой! Таким образом, могут существовать, самое большее, три изолирующих интеграла. Это частный случай общего решения, описанного в гл. 39, которое может иметь пять изолирующих интегралов. В трехмерных орбитах четыре из этих интегралов уже отвечают энергии и моменту импульса, и поэтому снова в стационарной бесстолкновительной системе может существовать, самое большее, один дополнительный изолирующий интеграл.

Что мы можем сказать о существовании третьего изолирующего интеграла для распределения массы в нашей Галактике? Ответ могут дать наблюдения. Вспомним сказанное в гл. 39, что если энергия и момент импульса являются единственными изолирующими интегралами осесимметричной системы, то ее функция распределения должна иметь форму

$$f = f(E, L_z) = f(v_r^2 + v_\theta^2 + v_z^2 - 2\phi, rv_\theta). \quad (60.33)$$

Это выражение может быть непосредственно применено к интерпретации наблюдений, хотя осуществить прямые наблюдения невозможно. Во-первых, дисперсии скоростей звезд по направлениям r и z должны быть одинаковыми: $\sigma_{rr} = \sigma_{zz}$. Во-вторых, не должно быть потока наружу вдоль радиуса или убегающие звезд из плоскости, поскольку $\bar{v}_r = \bar{v}_z = 0$. В-третьих, не должно быть корреляции между радиальными и угловыми скоростями, т. е. $\sigma_{r\theta} = 0$. Ни одно из этих условий, по-видимому, не соблюдается для звезд в окрестности Солнца. Объяснить это может существование третьего интеграла. Но это объяснение не единственное. Другая возможность состоит в том, что локальное распределение масс не является осесимметричным; большие сгущения звезд или облака газа, возможно, искажают поток. Далее можно предположить, что локальный поток не стационарен либо из-за общей неустойчивости галактики, либо из-за того, что движение некоторых звезд до сих пор отражает начальные условия их образования, либо по какой-то другой причине.

Поскольку прямые наблюдательные доказательства существования третьего интеграла являются довольно шаткими, много усилий было приложено, чтобы решить обратную задачу, задавшись вопросом, имеют ли совместимые с данными наблюдений модели галактического потенциала третий изолирующий интеграл. Здесь, как и в большинстве задач, связанных с гравитационными системами, для достижения адекватного понимания необходимы и аналитические, и численные методы расчета орбит. Контопулус (*Contopoulos*, 1963) обобщил многие аналитические исследования. Новые методы вычислений стимулировали появление современных результатов (см. *Astronomy and Astrophysics Abstracts*), но аналитическая задача остается очень трудной.

Численное интегрирование показывает чрезвычайную сложность орбит и третьих интегралов для модели Галактики (*Aarseth*, 1966). Орбиты с малой энергией скорее могут обладать изолирующим третьим интегралом, чем орбиты с высокой энергией, возможно, из-за того, что при малой энергии орбиты в основном чувствительны к локальным, более симметричным частям потенциала. При заданной энергии существование изолирующего третьего инте-

гала сильно зависит от начального положения и скорости звезды. В частности, те орбиты, которые имеют настолько малый начальный момент импульса, что проходят вблизи ядра Галактики (как правило, ближе, чем в ~ 1 кпс от центра), могут сильно рассеиваться ядром. Это может превратить радиальное движение в движение, перпендикулярное плоскости, всего лишь после одного или двух пересечений системы звездой, на что требуется обычно несколько сотен миллионов лет. Мощный рассеивающий центр разрушает изолирующие интегралы. Малые изменения начальной орбиты приводят к огромному различию рассеянных орбит. В результате рассеянные орбиты теряют память о своем начальном состоянии. Мы можем узнать лишь немного о ранней структуре нашей Галактики по орбитам звезд, которым случилось в настоящее время проходить поблизости от Солнца, если они хотя бы раз подверглись сильному рассеянию.

Теперь оставим плоскость $r - z$ и возьмем другое сечение фазового пространства. Энергия $E(r, z, \dot{r}, \dot{z})$ всегда является изолирующим интегралом, обеспечивающим одну связь между четырьмя координатами. Любые три координаты могут рассматриваться независимо и ими можно пользоваться для описания траектории. Предположим, что мы используем координаты r, z и $\dot{r}$ и следим за точками, в которых орбиты, обладающие одинаковой энергией, но различными начальными условиями, проходят сквозь плоскость $z = 0$. (Для простоты мы сохраним условие осесимметричности системы.) Каждое прохождение звезды сквозь плоскость $z = 0$ характеризуется определенным значением r и $\dot{r}$. На рис. 57 показаны схематически различные прохождения.

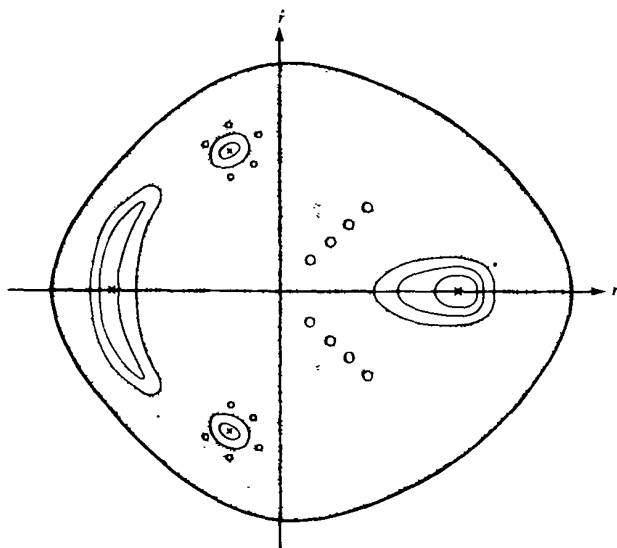


Рис. 57. Схематическое представление различных классов орбит на фазовой плоскости $r - \dot{r}$.

Простые устойчивые периодические орбиты всегда пересекают плоскость $z = 0$ в одном и том же месте и с одной и той же скоростью. На рис. 57 такие неизменные точки, соответствующие этим линейным орбитам, обозначены крестиком. Каждый крестик отмечает пересечение одной траекторией. Неизменные точки окружены замкнутыми кривыми, каждая из которых представляет все точки пересечения одной орбиты, заключенной в трубку. Неизменная точка может быть одинокой, либо ее может окружать множество таких орбит. Цепочки замкнутых кривых без неизменных точек располагаются подобно островам вблизи орбит, заключенных в трубки, либо без какой-либо связи с другими структурами. Каждая цепочка островов отмечает точки пересечения одной квазиустойчивой орбиты. Такая орбита пересекает плоскость $z = 0$, перепрыгивая скачком с одного острова на другой. Наконец, каждая из беспорядочно разбросанных точек соответствует одной неустойчивой орбите из числа тех, которые движутся эргодически внутри разрешенной области.

В эргодическом море могут встречаться острова различного вида на все меньших и меньших масштабах, если рассматривать фазовую плоскость со все большим разрешением. Возникает красивый узор, который чувствителен к энергии и форме потенциала (*Hénon and Heiles*, 1964; *Mandelbrot*, 1982). Эти узоры указывают долю орбит, имеющих третий изолирующий потенциал, по отношению к оставшимся эргодическим орбитам. В общем случае с возрастанием энергии при данном потенциале эргодичность все шире распространяется по фазовой плоскости.

61. НЕУСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ С ОСЕВОЙ СИММЕТРИЕЙ И СИСТЕМ С ПЕРЕМЫЧКОЙ

Миры находятся в вечном кружении
От сотворения до распада,
Подобно пузырям на поверхности реки
Вспыхивая, взрываясь и уносясь прочь.

П. Шелли

Мы уже знаем примеры расчетов вращательного равновесия дисков (см. гл. 59) и теперь можем начать интересоваться их устойчивостью. Если сделать вмятину в каком-то месте диска или увеличить там скорость движения звезд по орбитам, то будет ли его первоначальная форма постепенно восстанавливаться, или же диск перейдет в состояние с меньшей энергией и совершенно иной конфигурацией? Эти вопросы более сложны, чем может показаться на первый взгляд, особенно в случае реальных систем. В случае дисков, состоящих из одних только звезд, трудности возникают из-за сильной связи между положениями и скоростями звезд в силу гравитационного характера взаимодействия. В газовых дисках (которые здесь не рассматриваются) к усложняющим факторам относятся радиационный перенос, столкновения и звезд-

дообразование. В реальных дисках, конечно, происходят многочисленные взаимодействия между звездами и газом.

Неустойчивости могут быть либо глобальными, включающими в себя изменения, когерентные в больших областях системы, либо локальными, касающимися главным образом отдельных резонансных орбит в малых областях. Граница между этими двумя категориями по необходимости довольно неопределенна. Локальные неустойчивости могут служить спусковым механизмом для глобальных неустойчивостей. В сложной галактической структуре обычно бывают важны нелинейные эффекты обратной связи между различными типами неустойчивостей.

Используются два основных метода классификации неустойчивостей. Первый — это анализ линейной моды. В шестимерную функцию распределения (или в интеграл от нее, который описывает распределение плотности в системах, состоящих из газа) вводятся бесконечно малые возмущения, а линеаризованные уравнения движения Больцмана показывают, растут ли возмущения. По существу такой же способ использовался, например, в гл. 15, 16, 21. Применять его к конечным плоским системам труднее, так как только очень узкий класс возмущений не нарушает начальную симметрию. Возмущения, разрушающие симметрию либо в координатном пространстве, либо в пространстве скоростей, обычно более существенны, но следить за ними труднее. При модификации этого способа вводятся возмущения в усредненные уравнения движения, например в тензорные вириальные уравнения (гл. 9). Этот подход может быть полезным для обнаружения глобальных неустойчивостей и нахождения усредненного энергетического критерия изменений глобальных конфигураций.

Во втором из основных методов исследования эволюции неустойчивых систем используется моделирование задачи N тел. Преимущества его весьма существенны, поскольку таким методом можно хорошо проследивать начальные возмущения в широком диапазоне до их перехода в нелинейный режим. Быстродействие и память вычислительных машин все более возрастают, поэтому такое моделирование все больше приближается к действительности. Рискованные аппроксимации, такие, например, как грубые сетки, малое число частиц, искусственно смягченные гравитационные силы или расчеты для двумерных случаев, — все это уже меньше осложняет дело. Можно также избегать ошибок, если исследовать одну и ту же фундаментальную задачу, применяя разные методы вычислений (см. гл. 26).

К сожалению, области применимости аналитических методов и численных экспериментов довольно редко перекрываются. Линейный анализ обычно дает более ясные и информативные результаты до тех пор, пока он применим, но он редко бывает применимым в достаточно широкой области. Наиболее интересными оказываются результаты, полученные для нелинейного режима; теория возмущений может только обратить наше внимание на вещи, за которыми интересно было бы проследить. С другой стороны, нередко оказывается необходимым проделать много численных экспериментов, чтобы достичь хотя бы той степени понимания, при которой можно поставить вопрос о пра-

вильных нелинейных уравнениях. Ответы, которые дают эти уравнения, возникают в умозрительной конструкции, которая является весьма шаткой. Хорошее ощущение исторически сложившегося букета этих трудностей можно получить из превосходного обзора Тумре (Toomre, 1977).

Исследования неустойчивостей в спиральных перемычках и связанные с ними наблюдения структуры галактик породили обширную и быстро обновляющуюся литературу, так что самой этой теме можно было бы посвятить объемистую монографию. В этой и следующей главах просто описываются некоторые динамические принципы, лежащие в основе общего рассмотрения. Обзоры на эту тему составляются каждые два года и публикуются либо в материалах симпозиумов МАС, либо в других местах.

Начнем с простейшей неустойчивости в диске, который остается полностью осесимметричным. Если равномерно сжать диск по его периферии, как показано на рис. 58, то самые внешние звезды сдвинутся из положения R в положение $R - \delta R$. Возвратятся ли орбиты на прежнее место или станут неустойчивыми, зависит от относительных изменений сил тяготения, давления и центробежной силы (на единицу массы). По порядку величины сила тяготения в диске (если пренебречь геометрическими мультипольными множителями) равна $F_d \approx -GM_d/r^2$. Ее изменение, оцененное для $r = R$, есть $\delta F_d \approx 2GM_d \delta R / R^3$, поскольку M_d сохраняется. Не представляет значительных трудностей исследовать возможность того, что в диске содержится значительное центральное сгущение, а также независимая сферическая составляющая, и таким образом добавить их влияние.

В том приближении, которое мы рассматриваем, вклад от центральной массы в изменение силы тяготения имеет ту же форму, что и вклад от диска: $\delta F_0 \approx 2GM_0 \delta R / R^3$. Вклад от сферической составляющей, которая может представлять собой внутреннюю часть массивного гало, зависит от характера хода ее плотности $\rho(r)$. В случае простой степенной зависимости

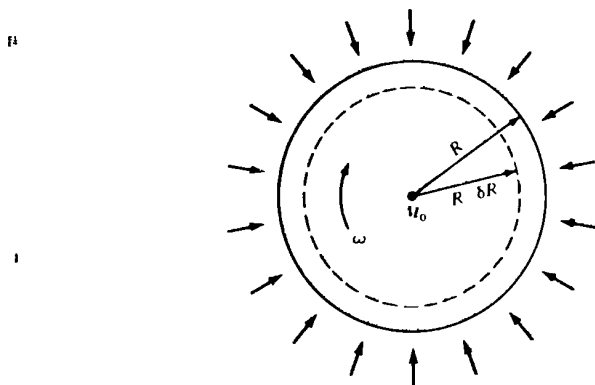


Рис. 58. Геометрия простейшей моды сжатия диска.

$\rho = \rho_0/(r_0/r)^n$ получается, что изменение силы тяготения составляет $\delta F_h = (n-1)GM_h\delta R/R^3$, где M_h — масса сферического гало радиуса R . Заметим, что при $n < 1$ сила тяготения уменьшается, когда орбита сдвигается внутрь, потому что потенциал не имеет особенностей и остается близок к гармоническому. Значения $n = 0$ для однородного гало и $n = 2$, дающее приближение к изотермическому распределению (гл. 40), представляют особый интерес.

Центробежная сила поддерживает равновесие орбит при отсутствии хаотических движений. Такие системы известны как холодные диски. Мы знаем из первой части книги, что холодные диски конечной толщины не должны быть самосогласованными состояниями, потому что перемешивание фаз и мягкая парная релаксация должны в конце концов вызвать значительное тепловое движение. Этот вывод остается справедливым даже для тонких дисков. Однако если время релаксации много больше периода вращения и если не существует крупных неоднородностей, на которых рассеиваются звезды, то холодный диск является хорошим приближением. Изменение центробежной силы $F_c = r\omega^2 = r^4\omega^2/r^3$ есть $\delta F_c = -3\omega^2\delta R$, поскольку момент импульса $r^2\omega$ при осесимметричных возмущениях сохраняется. (Представьте себе пульсирующую центральную силу, которая возмущает движение каждой звезды.)

Если возмущенная полная сила тяготения вынуждает звезды двигаться из положения R в направлении к центру сильнее, чем возмущенная центробежная сила выталкивает их наружу (величина δR в нашем примере отрицательна), то итоговое возмущение неустойчиво. Поэтому приблизительный критерий неустойчивости осесимметричных мод есть

$$R^3 \lesssim \frac{2G}{3\omega^2} \left[M_0 + M_d + \frac{(n-1)}{2} M_h \right]. \quad (61.1)$$

Отметим, что добавление влияния центральной массы M_0 при данной угловой скорости делает большие радиусы неустойчивыми. В этом приближении не важно, как данная масса распределена между M_0 и M_d , но важно, как учитывается форма диска в выражении для F_d . Добавочный вклад гало может влиять как в сторону стабилизации возмущений данного масштаба, так и в противоположную сторону, — это зависит от распределения плотности в гало и от степени увеличения ω . Записав соотношение (61.1) через среднюю поверхностную плотность $\sigma = M_d/\pi R^2$, эпизиклическую частоту $\kappa(r)$ (60.22) и постоянные Оорта (60.23) для $M_0 = M_h = 0$, получаем

$$R \lesssim \frac{2\pi G\sigma}{3(A-B)^2}, \quad (61.2)$$

что выражает более непосредственную связь с наблюдаемыми величинами. Важный общий вывод состоит в том, что вращение стабилизирует крупномасштабные возмущения.

С другой стороны, давление, создаваемое тепловым движением, придает устойчивость мелкомасштабным возмущениям. Аналогичный эффект был обнаружен в случае джинсовской неустойчивости (гл. 15). Может быть, добавле-

ние скоростей хаотического движения звезд стабилизирует возмущения всех масштабов во вращающемся диске? Мы видели, что джинсовскую неустойчивость можно рассматривать попросту как избыток в возмущенной области гравитационной энергии по сравнению с тепловой. Аналогичные соображения, касающиеся энергии вращения, дают приблизительный критерий устойчивости для теплого диска. Хаотические движения делают диск толще. При шкале высот z и радиусе R гравитационная энергия в нем (на единицу массы) равна $\sim 4\pi G\rho/(R^{-2} + z^{-2})$ в соответствии с уравнением Пуассона (59.5). Энергия вращения равна $\sim R^2\omega^2$, а тепловая энергия — $\sim \langle V^2 \rangle$. В неустойчивом состоянии гравитационная энергия возмущения должна быть больше суммы тепловой энергии и энергии вращения:

$$\frac{4\pi G\rho}{(R^{-2} + z^{-2})} \gtrsim R^2\omega^2 + \langle V^2 \rangle. \quad (61.3)$$

Подробный анализ нормальных мод бесконечного однородного изотермического газа с равномерным вращением, аналогичный приведенному в гл. 15.2, но с добавлением центробежной силы, дает дисперсионное соотношение, показывающее, что волны $\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega} = 0$ неустойчивы, если

$$4\pi G\rho > k^2 c^2 + 4\omega^2 \quad (61.4)$$

(упражнение для читателя). За исключением численных множителей, это есть по существу предельный случай соотношения (61.3), когда $z \rightarrow \infty$. Таким образом, энергетические соображения снова приводят нас к этому фундаментальному результату.

Критерий неустойчивости (61.3) показывает, что в случае, когда либо ω^2 , либо $\langle V^2 \rangle$ очень велики, устойчивость имеется на всех масштабах, т. е. существует перекрытие между малыми масштабами, стабилизированными дав-

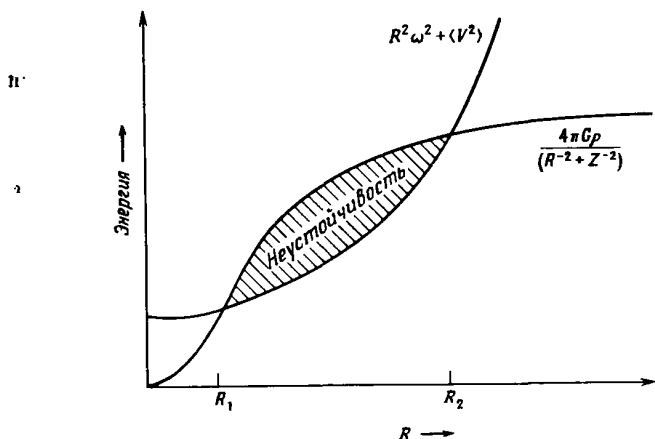


Рис. 59. Схематическая иллюстрация критерия неустойчивости (61.3).

лением, и большими, стабилизированными вращением. Более того, при больших значениях R конечная толщина диска z ограничивает гравитационную энергию возмущения, помогая давлению и вращению обеспечивать устойчивость. Эти выводы иллюстрируются на рис. 59, где показаны графики функций, стоящих справа и слева в соотношении (61.3). При угловой скорости ω , имеющей величину меньше критической, т. е. порядка $(4\pi G \rho)^{1/2}$, кривые дважды пересекаются и возмущения с характерными масштабами больше R_1 и меньше R_2 неустойчивы.

Теперь нетрудно заметить, что в случае гравитационных систем, находящихся в равновесии благодаря центробежной силе или силе давления, правая и левая части соотношения (61.3) одинаковы по порядку величины. Это значит, что устойчивость равновесия данной моды (даже при изотропном распределении скоростей) будет решающим образом зависеть от точных значений числовых коэффициентов. Они определяются главным образом геометрическими свойствами равновесной системы и возмущения, а также функцией распределения скоростей. Соответствующий анализ может быть очень сложным даже в простых случаях однородных газовых дисков (*Goldreich and Lynden-Bell, 1965*) и тонких дисков, состоящих из звезд (*Toomre, 1964*). При подобных обстоятельствах обычно есть возможность найти некоторые неустойчивые моды, особенно если ослабить требования, касающиеся осевой симметрии.

Хотя существуют локальные неоднородности, не являющиеся осесимметричными, простейшие несимметричные относительно осей возмущения — это глобальные моды. Круговая мода, которая рассматривалась выше, — это предельный случай, являющийся по существу и локальным, и глобальным: локальным, потому что исследование любой малой области эквивалентно исследованию всей круговой моды; глобальным, потому что мода охватывает полностью всю систему. В несимметричных относительно оси модах глобальные свойства преобладают, поскольку локальные свойства меняются от места к месту по всей системе когерентно.

Перемычки обычно являются наиболее ярко выраженными несимметричными относительно осей неустойчивостями. Когда амплитуда возмущения перемычки $e^{im\phi}$ мала, то ее обычно можно представить модой $m = 2$. Сильно нелинейные перемычки можно представить изолированными эллипсоидами или трехосными конфигурациями. Все эти представления являются очень абстрактными идеализациями; границы реальных перемычек редко определяются точно.

Условия, в которых формируется перемычка, понятны не до конца. Численное моделирование задачи N тел (*Sellwood, 1981*) показывает, что тонкий холодный диск, состоящий из звезд и находящийся первоначально в состоянии центробежного равновесия, может деформироваться за несколько периодов обращения. В нем развивается массивная перемычка, которая медленно вращается внутри остатков диска. Сама перемычка является более устойчивой структурой; орбиты, образующие потоки, преобладают в ее внутренних движениях (и делают наблюдаемую кривую вращения сильно зависящей от проекции). Между перемычкой и диском происходят сложные процессы передачи

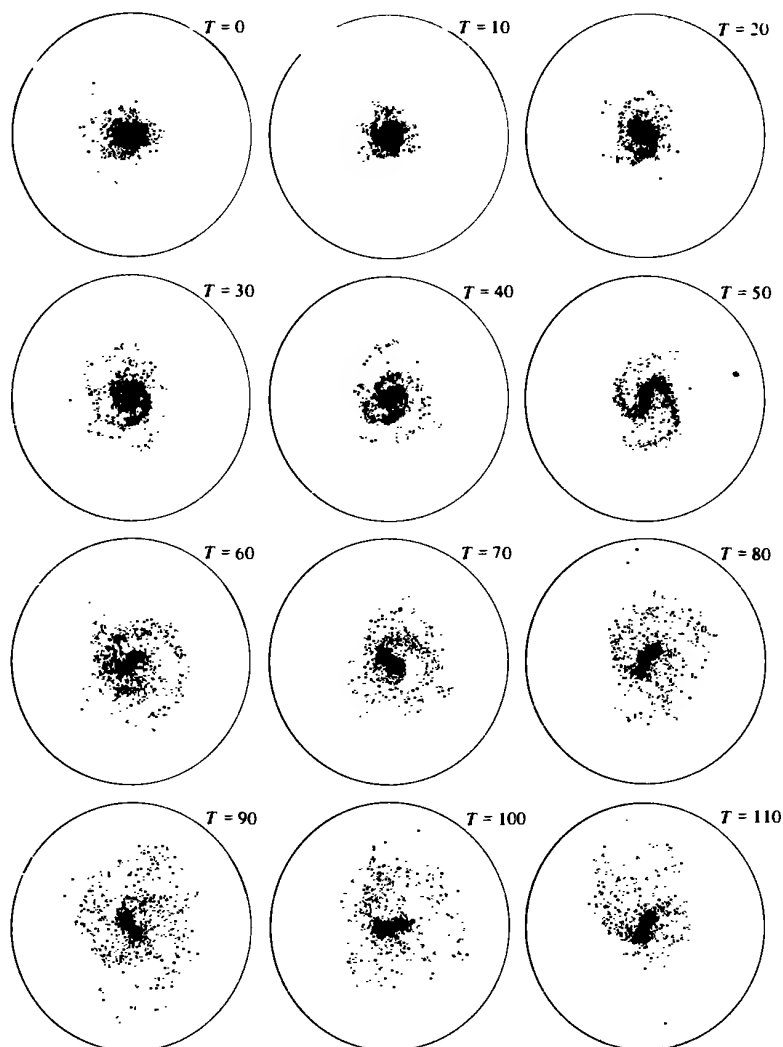


Рис. 60. Численное моделирование, иллюстрирующее образование глобальных неустойчивостей во вращающихся дисках (рисунок предоставлен д-ром Дж. Селлвудом).

импульса, отчего могут возникать прерывистые спиральные узоры. Размер перемычки зависит главным образом от начальной кривой вращения и распределения массы в диске. Упрощая можно сказать, что перемычка соответствует твердотельной части кривой вращения.

Рис. 60 (любезно предоставленный д-ром Дж. Селлвудом для нашей книги) иллюстрирует развитие перемычки в эксперименте с 50 000 точек, которые образуют диск с балджем. Все звезды имеют одинаковую массу, и начальная поверхностная плотность диска имеет вид

$$\mu(r) = \frac{fM}{2\pi a^2} \left(1 + \frac{r^2}{a^2}\right)^{-3/2}, \quad (61.5)$$

что соответствует случаю $n = 1$ для распределения (59.13). Величина f — это доля (в данном случае равная 0,7) полной массы M , содержащаяся в диске. Начальная круговая скорость соответствует выражению (59.12), измененному введением искусственно смягченного гравитационного потенциала $\phi(r) = -Gm(r^2 + \varepsilon^2)^{-1/2}$ путем замены a на $a + \varepsilon$. Здесь $\varepsilon = 0,2a$ (см. гл. 22). Малая хаотическая скорость, усредняющая выражение $3,36 QG\mu(r)/\kappa(r)$ при $Q = 1$, добавлена, чтобы подавить локальную осесимметричную неустойчивость (Toomre, 1964). Снова $\kappa(r)$ — это эпидиклическая частота (60.22).

Балдж, твердый и невосприимчивый к влияниям, имеет сферическое распределение плотности

$$\rho(r) = \frac{3M(1-f)}{4\pi b^3} \left(1 + \frac{r^2}{b^2}\right)^{-5/2}. \quad (61.6)$$

Его характерный размер $b = 0,2a$ и 90% его массы заключено внутри сферы радиуса $4b$. Единицей времени служит величина $T = (Gm/a^3)^{-1/2}$. При вычислениях использовался фурье-анализ сил тяготения для двумерных ячеек (Sellwood, 1981). На диаграмму нанесено 10% общего числа звезд, причем они выбирались случайно.

Очевидно, что неустойчивости становятся существенными по прошествии нескольких динамических периодов. Неоднородности выглядят как отчетливые, но недолговечные спиральные узоры. В течение всего процесса хаотического движения скорости растут; диск нагревается. В конце концов нагревание разрушает большую часть спиральной структуры, оставляя только ее неплотно закрученную центральную часть в виде чрезвычайно устойчивого похожего на перемычку остатка. Перемычка имеет примерно тот же характерный размер, что и первоначальный балдж. Легко представить себе ударные волны и звездообразование, усиливающие эти спиральные узоры так, чтобы они очень напоминали наблюдаемые галактики.

Горячие начальные состояния препятствуют образованию перемычки, как и следовало ожидать после обсуждения осесимметричной неустойчивости. Отношение $T_{\text{вращ}}/|W|$ кинетической энергии вращения к гравитационной энергии дает грубую оценку степени «охлажденности» диска. Уравнение (9.16) показывает, что этим отношением определяется важность кинетической энергии среднего движения по сравнению с давлением, создаваемым тепловым движением, в глобальной теореме вириала. Проведенные ранее численные эксперименты с системами N тел и идеализированный анализ линейных мод позволяют предположить, что эмпирическое соотношение $T_{\text{вращ}}/|W| \geq 0,15$ должно

давать достаточный (но не необходимый) критерий глобальной неустойчивости перемычки (Kalnajs, 1972; Ostriker and Peebles, 1973). Линейное возмущение тензорных вириальных уравнений также приводит нас к пониманию сущности этого критерия (Vandervoort, 1982). К сожалению, этому критерию не хватает общности, и найден ряд дискообразных систем, устойчивых даже при $T_{\text{вращ}}/|W| \geq 0,15$ (см. обсуждение в работе Athanassoula, 1983 и ссылки в ней). Теоретический анализ и численное моделирование, проведенные ранее, не были слишком рискованными в отношении выбора начальных условий; они обычно сводились к сглаженным равномерно вращающимся дискам. Однако учет дифференциального вращения, анизотропных скоростей и распределения массы в диске очень важен при анализе устойчивости.

Стабилизировать диск можно совершенно иным способом, помещая его внутрь гало примерно равной или большей массы. Сглаженное, почти нечувствительное к возмущениям гравитационное поле, создаваемое частью гало, находящейся внутри области, ограниченной внешним радиусом диска, подавляет глобальные неустойчивости. Важный, но еще не решенный вопрос — имеются ли такие гало вокруг плоских галактик без перемычек.

На рис. 60 показано, что образование и поддержание перемычки могут быть тесно связаны с потоками и сдвигами, когда такие движения охватывают весь диск целиком. Как только сформировалась массивная перемычка, влияние ее приливного поля становится решающим для формирования орбит и процесса передачи импульса ближайшим звездам. Орбитальные резонансы определяют районы устойчивости и изменения плотности. Таким образом, приближение, представляющее перемычки как изолированные объекты, не будет очень хорошим. Тем не менее такие модели все-таки полезны. Чтобы построить такую модель, сначала задают бесстолкновительное уравнение Больцмана (7.2) для стационарной перемычки. В системе отсчета, вращающейся с угловой скоростью $-\omega\hat{z}$, следует учесть центробежную и кориолисову силы, и, таким образом, уравнение (7.2) принимает вид

$$\mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{r}} + (\mathbf{V}\phi + \omega^2 \mathbf{R} + 2\omega \hat{z} \times \mathbf{v}) \cdot \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{v}} = 0, \quad (61.7)$$

при $\mathbf{R} \equiv (x, y, 0)$. Уравнение Пуассона имеет форму

$$\nabla^2 \phi = -4\pi G \rho = -4\pi G \int f d^3v. \quad (61.8)$$

Известны лишь немногие самосогласованные решения этих уравнений. Одно из них дает эллипсоид с однородной плотностью, в котором центробежная и гравитационная силы уравновешены вдоль главной оси (Freeman, 1966). Эллипсоид вращается с равномерной угловой скоростью $-\omega\hat{z}$. В нем нет дисперсии скоростей σ_{xx} вдоль главной оси, но σ_{yy} и σ_{zz} отличны от нуля, и поэтому давление сильно анизотропно. Внутри эллипсоида существуют очень мощные потоки, они настолько сильны, что при некоторых соотношениях осей полный момент импульса имеет направление $+\hat{z}$ и противоположен

угловой скорости. Средняя скорость вращения может также иметь в определенных областях эллипсоида направление, противоположное ω . Силы Кориолиса очень важны в областях быстрого вращения. В другой своей работе Фримен получил решение для равномерно вращающегося эллипсоидального диска с поверхностной плотностью, заданной в форме $\mu(r) = \mu_0(1 - \eta)^{1/2}$ для $\eta \leq 1$ и $\mu = 0$ для $\eta \geq 1$, где $\eta = (x/a)^2 + (y/b)^2$ и ось $a > b$. В нем существует дисперсия скоростей по обоим направлениям в плоскости. Ни одна из этих моделей не имеет достаточного сгущения в центре, чтобы обеспечивать хорошее приближение к реальным системам, но эти модели показывают, что сложности появляются уже на самых ранних стадиях анализа.

Между достаточно запутанным математическим анализом уравнения Больцмана и подробно заданных орбит, с одной стороны, и нелинейным моделированием с помощью вычислительных машин, с другой — существует большой разрыв. Именно он замедляет наше продвижение к пониманию процессов в гравитирующих дисках. Чтобы заполнить этот разрыв, нужны новые физические подходы и концепции. Их связь с более фундаментальными подходами может быть сначала неясной, но их одинаково легко проверить как сопоставлением с результатами численного моделирования, так в конце концов и на основе наблюдений.

В лабиринт галактической структуры ведет много путей. Некоторые из них обрываются после короткого исследования; другие ведут нас дальше, но в конце концов приводят к глухой стене. Достигнув такой стены, можно попытаться сделать в ней проход, чтобы выйти на другой путь; в надежде достигнуть успеха проломать стены лабиринта, если прямые подходы заводят в тупик. После многих таких взломов мы можем обнаружить, что в действительности лабиринта вообще никогда не было.

62. СПИРАЛЬНЫЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

Водовороты и смерчи неистово кружение
Наделено всей мощью, которой славлю тяготение.

Александр Поуп

62.1. ВВЕДЕНИЕ

Спиральная структура — это глазировка на пироге галактического вращения. Подобно глазировке, она очень привлекательна, и ею можно любоваться. Самогравитирующие диски, состоящие из звезд, — это объекты, полные жизни; множество процессов участвует в создании наблюдаемых спиральных узоров галактик. Наши представления об этом предмете, сильно углубившиеся за последние десять лет, до сих пор быстро меняются. В этой главе рассматриваются только некоторые основные гравитационные принципы и самые общие вопросы.

Какие силы управляют спиральной структурой? Ответ: «дифференциальное

вращение» будет правильным, ио ненамного более информативным, чем ответ древних врачей, объяснявших причину сна, вызываемого морфием, тем, что в нем содержится «снотворный принцип». Спиральные неустойчивости, являющиеся результатом дифференциального вращения, похожи друг на друга как в магнитных, так и в жидких системах, как при наличии тяготения, так и без него. Узоры закрученных силовых линий магнитного поля до такой степени характерны, что на протяжении многих лет они привлекались для объяснения спиральной структуры либо непосредственно, либо через их влияние на звездообразование. Такие объяснения были отклонены, когда более точные измерения напряженности галактического магнитного поля показали, что она много меньше, чем ожидалось. Даже сейчас такие измерения недостаточно надежны, поскольку топология поля не ясна и мы не уверены в том, как нужно правильно осреднять его на больших масштабах. В современных оценках предполагается, что «типичная» напряженность поля вблизи галактической плоскости составляет около $5 \cdot 10^{-6}$ Гс, что дает плотность энергии $B^2/8\pi \approx 10^{-12}$ эрг/см³. Это значение сравнимо с плотностями энергии космических лучей, излучения звезд и хаотических движений газа. Однако оно на несколько порядков величины меньше, чем полная плотность кинетической энергии вращения. При обычной полной плотности вещества в галактической плоскости $\sim 10^{-23}$ г/см³ и скорости вращения ~ 200 км/с плотность энергии вращения составляет $\sim 10^{-9}$ эрг/см³. Магнитное поле должно быть в несколько раз сильнее наблюдаемого, чтобы создать возмущение энергии вращения около 1%. На основе аргументов такого рода мы не можем сделать заключение (как это иногда делается), что магнитные поля не имеют существенного значения. Они могут все же создавать неустойчивости, которые в результате сдвига превращаются в спиральную структуру. На большем масштабе они могут обеспечивать «спусковую неустойчивость», которая должна действовать подобно клапану, высвобождающему много большее количество запертой гравитационной энергии. Эти возможные процессы понятны не до конца. Тем не менее кажется уместным посмотреть, позволяют ли неустойчивости в резервуаре с доминирующей гравитационной энергией объяснить наличие спиральных структур.

Основная проблема, которую должна решить любая теория спиральной структуры, это проблема закручивания. Когда локальные неустойчивости создают области высокой плотности или текущего звездообразования, дифференциальное вращение, конечно, придает им спиральную форму. Однако подобно ученику чародея, оно не может остановиться, закручивая спирали все туже и туже, пока их витки не соединятся друг с другом, и спиральная структура постепенно не исчезнет. Поскольку спиральные рукава часто располагаются в областях, где угловая скорость меняется, скажем, на 30%, следовало бы ожидать, что они сильно деформируются уже после нескольких оборотов. Характерный период обращения составляет $\sim 2 \cdot 10^8$ лет, поэтому спирали могут разрушиться меньше, чем за одну десятую времени жизни галактики. Тем не менее почти во всех дискообразных галактиках видна спиральная структура. Либо она обладает очень большим временем жизни, либо должны формироваться новые рукава, когда старые отмирают.

Возможно, дилемме закручивания придавалось слишком важное значение. Ее существование вынуждает относить каждый теоретический подход либо к одной, либо к другой категории, тогда как теперь стало ясно, что для создания спиральной структуры необходимы как когерентность в течение длительного времени, так и регенерация рукавов. В прежних дискуссиях предполагалось, что длительная когерентность обеспечивается магнитными полями — это теперь представляется неверным, — или мощными потоками вещества из центра галактики наружу, — их трудно поддерживать в течение десяти миллиардов лет. С другой стороны, в теориях, предполагающих восстановление структуры, зависящей от сдвиговых локальных неустойчивостей, трудно объяснить, почему во многих галактиках столь симметричен общий вид спиральной структуры.

Новый путь в этом лабиринте был проложен, когда удалось осознать, что спиральные рукава не должны всегда содержать одно и то же вещество. Рукава могут быть просто узором, местом, где звезды задерживаются в своем движении по орбитам. Ранее, до середины шестидесятых годов, пионерские работы, выдвигающие это новое гравитационное толкование, не привели к большому успеху. Они опирались в основном на теорию орбит, так что в них было трудно подойти вплотную к проблеме коллективных неустойчивостей. И снова именно методы, развитые в физике плазмы, привели к новому пониманию эффекта гравитационного взаимодействия. Спиральные рукава можно рассматривать как волны плотности в диске галактики. Их следует описывать бесстолкновительным уравнением Больцмана. Дилемма закручивания, которая по большей части относится к рукавам, вещество которых объединено общим движением, должна быть заменена проблемой формирования и поддержания волн плотности. Отдельные волны, взаимодействующие между собой, могут образовать моды, которые обеспечивают установление картины спиральной структуры. Энергия для поддержания этих мод должна поставляться галактическим вращением, возможно, через посредство звездообразования, больших неоднородностей плотности, турбулентности и орбитальных резонансов. Многие из этих общих идей были успешно развиты в рамках концепции волн плотности, хотя результаты часто оказывались не такими, какие ожидалось вначале. Теория дала критерии, показывающие, как сложна на самом деле реальность, и мысль о том, что спирали представляют собой проявление картины распределения плотности, была чрезвычайно плодотворной, хотя и не привела к исчерпывающему пониманию проблемы.

62.2. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА СПИРАЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ

Сначала нам следует понять, как описывать спиральную структуру и как, сформировавшись, она взаимодействует со звездами в диске. В цилиндрической системе координат с азимутальным углом θ сглаженная монотонная зависимость $r(\theta)$, или обратная ей зависимость $\theta(r)$, определяет форму спирали. Даже если эта зависимость не очень гладкая, она будет производить впечатле-

ние спиральной, особенно если ее усреднить. Тангенс угла закручивания ι — это отношение приращений по радиальному и азимутальному направлениям:

$$\operatorname{tg} \iota = \frac{dr}{r d\theta} = \left(r \frac{d\theta}{dr} \right)^{-1} = (rk)^{-1}, \quad (62.1)$$

где

$$k = \frac{d\theta}{dr}. \quad (62.2)$$

Логарифмическая спираль $r = r_0 \exp(a\theta)$ служит примером, и соотношение (62.1) показывает, почему она называется также равноугольной спиралью. Другой простой пример — это спираль Архимеда $\theta = kr$.

В общем случае рисунок спиральной структуры $\theta(r, t)$ является также функцией времени. Например, если

$$\theta = \theta_0(r) + \omega(r)t, \quad (62.3)$$

то он будет вращаться с угловой скоростью $\omega(r)$, причем при $\omega = \text{const}$ вращение будет твердотельным. Эта угловая скорость, как правило, не будет совпадать с угловой скоростью, следующей из кривой вращения диска, особенно если спиральная структура образована волной плотности малой амплитуды.

Чтобы описать спиральную структуру, состоящую более чем из одного рукава, нам нужна функция, соответствующим образом периодическая по θ . Из многих возможных вариантов наиболее простыми и хорошо изученными оказались тригонометрические функции. Поэтому мы представляем возмущенную величину (например, плотность или скорость) действительной частью функциональной формы

$$f(r, \theta, t) = f_0(r) \exp \{ i(\omega t - m\theta + P(r)) \}. \quad (62.4)$$

Фаза (с постоянной χ_0 , определяющей начало спиралей) есть

$$\chi \equiv \chi_0 + \omega t - m\theta + P(r), \quad (62.5)$$

а амплитуда есть $f_0(r)$. Возрастание θ на величину $2\pi/m$ оставляет значение $f(r, \theta, t)$ неизменным, таким образом, спираль имеет m симметричных рукавов. В системе отсчета, вращающейся с угловой скоростью

$$\omega_p = \frac{\omega}{m}, \quad (62.6)$$

так что $\theta = \omega_p t$, фаза остается постоянной и рисунок спиральной структуры выглядит стационарным. Таким образом, ω_p — это угловая скорость спиральной структуры для частного случая твердотельного вращения. Обычно принимается, что угол θ возрастает в направлении вращения. Если r уменьшается с возрастанием θ , так что $k < 0$, то спиральный рукав является отстающим, в противном случае лидирующим, как показано на рис. 61. Спирали с данной

фазой χ имеют угол закручивания

$$\operatorname{tg} i = \frac{m}{rP'(r)} = \frac{1}{rk(r)}, \quad (62.7)$$

где P' означает производную по радиусу.

Каждый рукав спиральной структуры может иметь много витков. Чтобы оценить расстояние λ вдоль радиуса между рукавами, мы можем предположить, что все рукава имеют одну и ту же фазу χ . Если существует рукав при (θ_0, r_0) , то следующий будет проходить вблизи $(\theta_0 + 2\pi/m, r_0 + \lambda)$, а его фаза не изменится:

$$\chi = -m\theta_0 + P(r_0) = -m\theta_0 - 2\pi + P(r_0 + \lambda). \quad (62.8)$$

Разложение $P(r_0 + \lambda)$ в ряд Тейлора вблизи r_0 показывает, что в первом приближении

$$\lambda = \frac{2\pi}{m|k|}, \quad (62.9)$$

так что $mk(r)$ — это радиальное волновое число спиральной структуры.

Как только в диск вводится спиральная структура, для описания основ его динамики становятся особенно важны пять новых радиусов. Эти радиусы возникают как в случае структур, в которых доминирует самогравитация, так и в случае волн плотности малой амплитуды, и они являются общими для очень широкого класса моделей. Два первых радиуса определяют положение центральной части и края диска — они так очевидны, что кажутся тривиальными, но играют решающую роль в качестве граничных условий для спиральной структуры. В центре находится область с особенностью, где большие хаотиче-

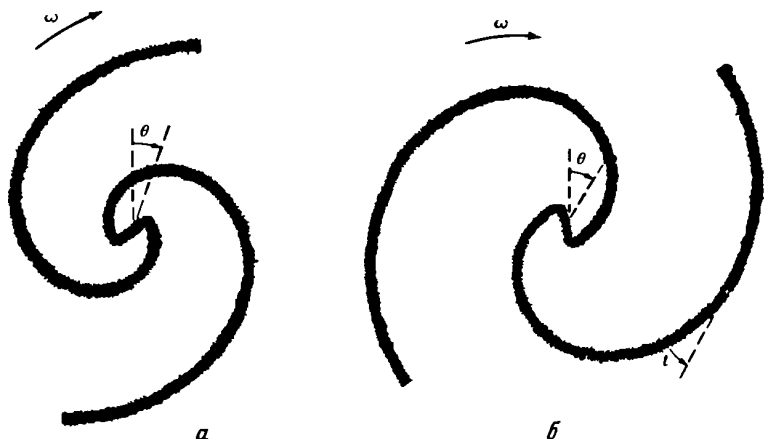


Рис. 61. Схематическое изображение лидирующей (a) и отстающей (b) спиралей с углом закручивания i .

ские скорости звезд разрушают спиральную структуру. Это дает самый внутренний характерный радиус, который может соответствовать размеру балджа галактики. На краю диска рисунок спиральной структуры очень сильно зависит от того, насколько резко обрывается гравитационное поле. При медленном уменьшении плотности диска волны плотности, которые распространяются наружу, могут поглощаться, в то время как резкий край может отражать некоторые волны назад, внутрь узора, и менять его структуру. Процессы на границах еще не вполне ясны.

Три других радиуса появляются в связи с динамическими резонансами. Поскольку спиральная структура вращается, должны существовать особые радиусы, при которых звезды, составляющие волну плотности, сильно взаимодействуют с остальными звездами диска. *Радиус коротации* определяет место, где угловая скорость спиральной структуры равна угловой скорости движения звезд в диске

$$\omega_p = \omega_s(r). \quad (62.10)$$

У многих галактик во внешних областях кривые вращения почти плоские, так что $\omega_s(r) \propto r^{-1}$ там уменьшается. За пределами радиуса коротации скорость спиральной структуры поэтому больше, чем ω_s , а внутри — меньше. Немонотонные кривые вращения галактик могут иметь большее число радиусов коротации в том случае, если может поддерживаться существование устойчивой глобальной спиральной структуры. В областях, соответствующих коротационному радиусу, волнам плотности легко обмениваться энергией и моментом импульса со звездами диска в течение длительного времени. Здесь в сложном нелинейном режиме взаимодействует много процессов, происходящих между волной плотности и звездами: затухание Ландау, резонансный захват, отражение, перенос и вынужденное излучение. Все эти процессы еще мало исследованы, но могут оказывать решающее влияние на поддержание спиральной структуры.

В отсутствие радиуса коротации разность между скоростями движения спиральной структуры и звезд также может вызывать сильные резонансы. Спиральный рукав вместе со связанным с ним гравитационным возмущением будет двигаться вслед за звездой диска с частотой $|\omega_p - \omega_s|$. Если в спиральной структуре m рукавов, звезда испытывает возмущение с частотой $m|\omega_p - \omega_s|$. Как следует из формулы (60.17), звездные орбиты особенно чувствительны к возмущениям, имеющим частоту, близкую к их эпитциклической частоте κ . Непрерывные возмущения с этой частотой могут происходить внутри области коротационного радиуса, где $\omega_p < \omega_s$ и

$$\kappa = -m(\omega_p - \omega_s), \quad (62.11)$$

а также вне области коротационного радиуса, где $\omega_p > \omega_s$ и

$$\kappa = m(\omega_p - \omega_s). \quad (62.12)$$

Нелинейные резонансы, которые развиваются на этих радиусах, называются внутренним и внешним *линдбладовскими резонансами*, по имени шведского

астронома Б. Линдблада, автора пионерских работ по гравитационной теории спиральной структуры. Резонансы присутствуют не во всех кривых вращения, и иногда внешний резонанс Линдблада появляется в области с очень низкой плотностью в зависимости от модели.

Подобно центральному, краевому и коротационному радиусам диска, два линдбладовских резонанса с их взаимодействием между волнами плотности и звездами определяют судьбу самосогласованной спиральной структуры.

62.3. САМОСОГЛАСОВАННЫЕ СПИРАЛЬНЫЕ СТРУКТУРЫ

Гравитационно самосогласованные структуры — это, по-видимому, единственные образования в диске, живущие в течение длительного времени. Случайные структуры, возникающие под действием проходящих приливных волн, т. е. вынужденно, либо разрушаются, либо перерастают в другие, более устойчивые формы. Найти самосогласованные структуры — сложная задача; известны лишь немногие из них. Можно начать с выбора равновесной модели диска, основанной обычно либо на бесстолкновительном уравнении Больцмана, либо на уравнениях звездной гидродинамики (8.14), (8.15). Если выбраны гидродинамические уравнения, то они должны быть где-то оборваны. Проще всего это можно сделать, предположив, что диск целиком состоит из газа, и тогда уравнения превращаются в обычные уравнения газовой динамики. Хотя этот подход не соответствует реальности в случае галактик, где звездная составляющая доминирует над полем тяготения, он имеет большое преимущество, состоящее в простоте. Он приводит также ко многим важным результатам, распространяющимся на звездные диски (см. подробный обзор *Lin and Lau*, 1979; работу *Toomre*, 1977, ссылка на которую приведена в гл. 61; *Bertin*, 1980).

В частности, модели газовых дисков показали, что спиральная структура может быть квазистационарной интерференционной модой, содержащей отдельные бегущие волны, которые описываются выражениями, аналогичными (62.4). Лидирующие и отстающие волны, которые движутся внутрь и наружу, могут сосуществовать в моде в любой момент времени. Квазистационарные моды определяются передачей, отражением и поглощением этих волн на пяти критических радиусах, упоминавшихся выше. Именно на этих радиусах основные недостатки газовых моделей становятся особенно существенными. Сглаживая детали функций распределения скоростей, газовые модели не дают возможности изучить, как ведут себя волны на этих радиусах в действительности, когда существенны нелинейные эффекты.

Более основательный подход состоит в том, чтобы использовать уравнения моментов звездной гидродинамики и оборвать их, вводя предположения относительно скоростей звезд. Например, Хантер (*Hunter*, 1970) предположил, что большинство звезд лишь слегка отклоняется от круговых орбит. Возмущенные радиальные скорости имеют величину порядка εc_r , а скорости вращения $r\omega(r) + \varepsilon c_\theta$. Если взять моменты бесстолкновительного уравне-

ния Больцмана в соответствии со степенями εs_θ (в цилиндрических координатах), то процедуры, рассмотренные в гл. 8, снова дадут цепочку связанных моментов. Теперь, однако, каждый момент порядка n заведомо меньше, чем моменты $(n-1)$ -го порядка, примерно в ε раз. Таким образом, перекрестные члены в цепочке уравнений могут быть последовательно опущены. Чтобы замкнуть систему самосогласованным образом на уровне моментов третьего порядка, можно использовать уравнение Пуассона.

Оба эти подхода быстро становятся слишком сложными для аналитического исследования, если не прибегнуть к дальнейшим (но менее фундаментальным) упрощениям. Основное из них — это приближение для малых длин волн $kr \gg 1$. Из соотношения (62.1) видно, что при этом угол закручивания $i \ll 1$, так что спираль закручена очень туго. При этих условиях азимутальные производные много меньше радиальных, и к уравнениям для жидкости или уравнению Больцмана применима аппроксимация типа ВКБД. Соответствующие ограниченные моды позволяют достичь более глубокого понимания сути задачи, но они редко бывают применимы непосредственно к наблюдаемым галактикам.

Чтобы рассказать о методе нахождения самосогласованных мод немного более подробно, примем приближение с наименьшим количеством фундаментальных ограничений. В нем прямо используется бесстолкновительное уравнение Больцмана (Kahn, 1971). Если нарушение, вызванное спиральной структурой, мало, можно записать функцию распределения и гамильтониан, введя в них линейное возмущение:

$$f = f_0 + f_1, \quad (62.13)$$

$$H = H_0 + H_1, \quad (62.14)$$

где $H_1 = \phi_1$ — потенциальная энергия (на единицу массы) возмущенной поверхностной плотности. Подставляя выражения (62.13), (62.14) в бесстолкновительное уравнение Больцмана (7.17) и полагая равновесные члены нулевого порядка равными нулю, получаем линеаризованное уравнение

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} - \{H_0, f_1\} = \{H_1, f_0\}. \quad (62.15)$$

Подобным же образом линеаризованное уравнение Пуассона (7.13) приобретает вид

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi_1(\mathbf{r}, t) &= -4\pi G \int f_1(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} \\ &= -4\pi G \delta(z) \iint f_1(r, \theta, v_r, v_\theta, t) dv_r dv_\theta \\ &= -4\pi G \sigma_1. \end{aligned} \quad (62.16)$$

Второе равенство в формуле (62.16) применимо к бесконечно тонким дискам с возмущенной поверхностной плотностью σ_1 . Такая аппроксимация является

обычной в теории спиральной структуры. Введение движений по оси z привело бы ко многим новым интересным явлениям, особенно в неоднородностях плотности вблизи резонансов, но они еще не достаточно изучены.

Теперь предположим, что мы избрали общую формулу для $\phi_1(r, \theta)$, которая описывает некоторую структуру, такую, как спираль. Из уравнения Пуассона получим соответствующую поверхностную плотность σ_1 (избранная). Система должна эволюционировать, откликаясь на это возмущение согласно уравнению (62.15). Поскольку H_0 и f_0 известны из равновесной модели, а H_1 задается через ϕ_1 , мы в принципе можем решить уравнение (62.15) относительно f_1 (отклик). В общем случае f_1 (отклик) будет сложным функционалом от ϕ_1 (избранный) и поэтому от σ_1 (избранная). Интегрирование f_1 (отклик) по скоростям дает соответствующую ей поверхностную плотность σ_1 (отклик), которая будет еще более сложным функционалом от σ_1 (избранная); мы можем записать это условие как σ_1 (отклик) = $Q[\sigma_1$ (избранная)]. Чтобы получить решение объединенных уравнений Пуассона и Больцмана, мы должны иметь самосогласованное условие σ_1 (отклик) = σ_1 (избранная), или

$$\sigma_1(r, \theta, t) = Q[\sigma_1(r, \theta, t)], \quad (62.17)$$

где Q — сложный интегральный оператор.

Условию самосогласованности будут удовлетворять только специальные формы σ_1 . Чтобы найти самосогласованную пространственную зависимость σ_1 , мы можем либо анализировать временную зависимость f_1 и ϕ_1 (и, следовательно, σ_1) в фурье-представлении, либо рассматривать уравнение (62.17) как задачу на собственные значения. Эти методы взаимосвязаны, потому что решения задачи на собственные значения легче всего выражаются через фурье-моды. После затухания кратковременных откликов остаются обычно те нормальные моды, которые стоят слева. Метод решения задачи на собственные значения по существу тот же, что и метод анализа затухания Ландау путем применения преобразования Лапласа. Моды, которые появляются при различных обстоятельствах и предположениях, характеризуются их дисперсионными соотношениями $\omega(k, r)$. Эти дисперсионные соотношения в общем случае имеют особенности на линдбладовских радиусах и радиусах коротации, и это показывает, что линейная теория здесь неприменима. Тот факт, что ω зависит от r для структур более общей формы, чем (62.4), означает, что в дифференциально вращающейся галактике ω будет меняться со временем. Лишь немногие возмущения, тщательно подогнанные к кривой вращения, имеют шансы остаться стационарными.

62.4. ПОДДЕРЖАНИЕ СПИРАЛИ

Одна Фурье-компонента не может создать реального возмущения, как это отмечалось в разд. 15.2, содержание которого связано с предметом данной главы, но отличается большей простотой. Близкие к реальности структуры с

малой амплитудой будут в общем случае суперпозициями волн, каждая из которых является решением уравнения (62.17). Этот волновой пакет распространяется с групповой скоростью $V_g = (\partial\omega/\partial k)$, согласно соотношению (14.51). Поэтому спиральная структура будет в общем случае двигаться по радиусу галактики. Поскольку она перемещается в областях, скорость вращения которых различна, ее групповая скорость также меняется. Различные части спиральной структуры могут двигаться с неодинаковыми скоростями и по-разному искажаться дифференциальным вращением.

Тумре (Toomre, 1969) первым исследовал упомянутые групповые скорости применительно к модам в дисковой модели нашей Галактики. Туго закрученные отстающие спирали вблизи Солнца должны иметь $V_g \approx -10$ км/с и двигаться по радиусу внутрь системы. При такой скорости структура должна достигать центра примерно за 10^9 лет. Этот интервал времени соответствует всего лишь нескольким галактическим оборотам и существенно меньше возраста Галактики; таким образом, простые спиральные структуры плотности ненадолго решают дилемму закручивания. Другие волны также распространяются по направлению либо к области коротации, либо от нее, причем это направление зависит в основном от того, велика или мала их радиальная длина волны (62.9), а также от того, являются ли они лидирующими или отстающими. Когда эти структуры достигают центра галактики или области линдбладовского резонанса, они сильно изменяются. Таким образом, по-прежнему необходимо искать механизмы поддержания и регенерации спиральной структуры.

Предполагались различные возможности (см. обзор Lin and Lau, 1979; Toomre, 1981): внутренние локальные неустойчивости, внутренние глобальные неустойчивости и внешние воздействия. Внутренние локальные неустойчивости начинаются с ударных волн, сопровождающих вспышки звездообразования или с гравитационных возмущений от больших газовых облаков и шаровых скоплений, движущихся через плоскость галактики, и могут возникать в любом месте диска. Эти явления могут порождать короткие «обрубки» волн и куски спиралей, но они не могут быть согласованными на больших расстояниях. Особенно трудно в этом случае объяснить необычайную глобальную симметрию многих (хотя и меньшей части) наблюдаемых спиральных галактик. Эти локальные неустойчивости, однако, могут быть *результатом* ударных волн, созданных в газе гравитационными возмущениями вдоль спирального рукава. Порождаемые отмеченными процессами звездообразование и осевление рукава являются очень важной проблемой газовой динамики.

Более многообещающую и активную роль локальные неоднородности играют в областях коротации и линдбладовских резонансов. Распространяющиеся по радиусам волны плотности обычно не полностью поглощаются в этих областях, но могут передаваться, отражаться и усиливаться. Чтобы посмотреть, как примерно может происходить усиление, представим себе систему волн плотности, распространяющуюся от центра галактики по направлению к области коротации. На расстоянии меньше радиуса коротации угловая скорость этой структуры меньше, чем скорость вращения диска, и поэтому

момент импульса структуры относительно диска отрицателен. Предположим, что некоторые волны передаются через область коротации; их относительный момент импульса становится положительным. Чтобы сохранился полный момент импульса, волны, отраженные от области коротации внутрь системы, приобретают возросший отрицательный момент импульса и потому должны испытывать усиление. Прирост энергии отраженных волн обеспечивается за счет дифференциального вращения в резонансной области, хотя характерное время и другие детали этого процесса известны не до конца. Такие явления в той или иной форме могут происходить во внутренних и внешних областях линдбладовских резонансов и в галактическом центре.

Следствия отражения и усиления на резонансных радиусах состоят в том, что движущиеся внутрь и наружу волны присутствуют одновременно по всему диску. Регенерация и объединение этих волн могут дать неподвижную спиральную моду, которая квазистационарна в течение времени, намного превышающего время жизни любой одиночной бегущей волны. Поэтому такой механизм требует наличия как неустойчивости, так и обратной связи. Отсутствие того либо другого фактора (возможно, обусловленное вековым переносом наружу момента импульса или эволюцией распределения плотности, которая отодвигает область линдбладовских резонансов) должно подавлять эти глобальные спиральные структуры.

Внутренние глобальные неустойчивости, такие, как перемычки, состоящие из вещества, также могут генерировать спиральные моды. Пример, приведенный на рис. 60, показывает, что эти спирали не могут сохраняться очень долго. Их существование зависит от обратной связи с резонансными областями и усиления в них, от дисперсии хаотических скоростей в диске и от прямых гравитационных вращающихся моментов. Спирали в свою очередь воздействуют на перемычку, изменяя условия резонансов. В этом случае не найдено ни одного самосогласованного стационарного состояния. Их существования и не следует ожидать, поскольку конечные гравитационные системы никогда не бывают термодинамически устойчивыми.

В дополнение к перемычкам могут присутствовать также более утолщенные структуры, подобные линзам. Мы не знаем, возникают ли они в процессе формирования галактики или в результате последующего нагрева диска, возможно, перемычкой. Несимметричные относительно оси неустойчивости в линзе могут стимулировать возникновение спиральной структуры. Но даже симметричные линзы будут изменять рисунок спиральной структуры, изменяя положение и силу резонансов.

Стоит только допустить, что галактики имеют третье измерение, как во взаимодействии со спиралью вступает множество глобальных потерявших устойчивость мод. Известно, что многие галактики, включая и нашу, искривлены. Хотя эти деформации много легче наблюдать в газе, их можно найти также и в распределении звезд. Те области диска, где частота колебаний по вертикали α [см. соотношение (60.11)] равна эпициклической частоте, т. е.

$$\alpha = \kappa, \quad (62.18)$$

особенно склонны к неустойчивости. Локальные неоднородности плотности или распределения скоростей могут параметрически усиливаться в направлении z . В осесимметричных системах этот резонанс возникает по всей системе, приводя к глобальной деформации. Если условие осевой симметрии не выполняется полностью, то может образоваться длинная дуга, протянувшаяся в виде искривленной трехмерной спирали. Подобный же вынужденный резонанс может возникать, когда возвращающая сила в плоскости галактики изменяется периодически со временем, по мере смещения картины распределения плотности:

$$\alpha = m(\omega_p - \omega_s). \quad (62.19)$$

Энергия передается от волны плотности движениям по оси z , что в конце концов подавляет волну плотности. Распространение этих взаимодействий будет зависеть как от анизотропии распределения скоростей, так и от средней дисперсии и амплитуды волны плотности. Эти резонансы важны, хотя деформации могут быть вызваны и другими факторами (такими, например, как асимметричные гало, внешние приливы и свободные колебания).

Внешнее воздействие также может быть важным по крайней мере в некоторых галактиках. Несимметричное гало или спутник могут вызывать приливы, которые затем усиливаются. Эти приливы могут взаимодействовать со спиральной структурой прямо или косвенно, через получившуюся деформацию. В галактиках с существенным дифференциальным вращением, по видимому, всегда есть области, находящиеся в сильном резонансе с орбитой спутника. В центральных областях, где вращение быстрее, «часы уходят вперед» и, как только неустойчивости возникают, они развиваются быстрее при прочих равных условиях (*Toomre, 1981*).

Отдельные галактики с исключительно четкой спиральной структурой обладают большими спутниками. Спутники меньшего размера с низкой поверхностной яркостью трудно обнаружить, но они могут существовать вблизи многих галактик. Детальные условия, при которых спутники генерируют долгоживущие спирали, еще предстоит исследовать. Даже если существует какая-либо одна недолговечная мода, возбуждение от спутника может поддерживать ее.

Спиральная структура действительно представляет собой совокупность симптомов неустойчивости галактик, в которой объединяется множество явлений. В этой главе мы подчеркнули роль тяготения, лишь скользнув по поверхности проблемы. В некоторых местах под этой поверхностью теория продвинулась очень глубоко, но большинство вопросов все еще ждут исследования.

63. ТРЕХОСНЫЕ И НЕСИММЕТРИЧНЫЕ СИСТЕМЫ

И замыслы с размахом и почином
Меняют путь и терпят неуспех.

Шекспир

63. 1. ВВЕДЕНИЕ: ВРАЩАЮЩИЕСЯ ПОЛИТРОПЫ

Продвигаясь в направлении уменьшения симметрии, мы достигли самых нестандартных систем. Ранее мы обсуждали плоские системы, в основном тонкие диски. Однако они не могут представлять широкий класс наблюдаемых эллиптических галактик. Такие галактики обладают умеренным вращением, и потому в них нет столь высокой глобальной когерентности, как в спиральных или невращающихся сферических системах. Давление, вращение и внутренние потоки — все эти факторы объединились здесь, определяя большое разнообразие структур и форм.

Если обратиться к истории, то можно вспомнить, что ряд великих математиков XVIII, XIX и начала XX вв. начали исследовать этот предмет, строго анализируя конкретные простые и узкоспециальные случаи. Успехи этих исследований — а они нередко приводили к важным математическим достижениям — настолько подняли статус определенных моделей, что их важность для астрономии стали сильно переоценивать. Все эти модели были построены для однородной несжимаемой жидкости. Первыми из таких несферических самогравитирующих моделей были сфероиды Маклорена (середина XVIII столетия). Они обладают величественным равномерным вращением без внутренних движений. Тяготение уравнивается несжимаемостью и вращением. Это равновесие может существовать только при определенных значениях отношения (58.1), близких к единице. Два типа сфероидов Маклорена с малым и большим эксцентриситетами могут быть равновесными фигурами.

Результаты Маклорена казались настолько простыми и убедительными, что прошло около ста лет, пока Якоби не обнаружил, что существуют и другие равновесные фигуры — эллипсоиды. Эллипсоиды Якоби также вращаются равномерно и не обладают внутренними движениями. Когда момент импульса сфероиды Маклорена возрастает, он может превратиться в эллипсоид Якоби. Это точка бифуркации последовательности Маклорена. Последовательность Якоби тоже ветвится и образует грушевидные равновесные фигуры, открытые Пуанкаре и исследованные Дарвинном, Ляпуновым, Джинсом и Картаном.

Предположение о возможности внутренних движений в эллипсоидах добавляет новую степень свободы; она была введена Дирихле и исследована Дедекиндом и Риманом. Эллипсоиды Дедекинда вообще не вращаются, а поддерживаются лишь циркуляцией жидкости по эллипсам. Эллипсоиды Римана обладают как вращением, так и внутренней циркуляцией. Чандрасекар (*Chandrasekhar*, 1969, см. библиографию в части I) обобщил и развил эти классические результаты во многих аспектах.

Астрономические системы не являются ни несжимаемыми, ни однородными.

ми, ни эллипсоидальным. Таким образом, хотя классические модели и представляют огромный самостоятельный интерес, использование их может вести в заблуждение. Отказ от основных предположений, свойственных классическим моделям, приводит к более разнообразным и реалистичным, но также и более сложным системам. Чтобы проиллюстрировать возникновение этих сложностей, обобщим политропные модели из гл. 40.

Политропы более точно представляют сферические звездные системы, в которых давление изотропно, чем плоские системы. Как отмечено в разд. 62.3, необходимо ввести дополнительные предположения относительно звездных орбит в плоских системах, чтобы оборвать цепочку уравнений звездной гидродинамики для моментов и получить политропные уравнения. Поскольку здесь преследуются чисто иллюстративные цели, мы выберем простой и стандартный путь, предположив, что имеем дело с системой, состоящей из газа. На таких системах можно показать многие основные свойства их аналогов, состоящих из звезд, когда детали резонансов не важны, но применять этот подход надо с осторожностью.

Чтобы добавить эффекты сжатия и дифференциального вращения, рассмотрим толстый цилиндрический диск. Плотность и потенциал зависят только от r и z , поэтому уравнение Пуассона (59.5) имеет вид

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = -4\pi G \rho(r, z), \quad (63.1)$$

и это первое из ряда упрощений. Уравнение гидростатического равновесия (15.3) имеет вид

$$\frac{1}{\rho} \nabla P = \nabla \phi - \omega \times (\omega \times \mathbf{r}) - 2\omega \times \mathbf{v} \quad (63.2)$$

во вращающейся системе. Второй член справа выражает центробежную силу, а третий — силу Кориолиса, и эти силы действуют на элемент газа, движущийся со скоростью $\mathbf{v}$ во вращающейся системе отсчета. Наше следующее упрощение состоит в предположении, что скорость $\mathbf{v}$ мала по сравнению со скоростью вращения $\omega \times \mathbf{r}$, и, исключении члена, выражающего силу Кориолиса. Тогда в силу гидростатического равновесия в вертикальном и горизонтальном направлениях должны выполняться соотношения

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} = \frac{\partial \phi}{\partial r} + r\omega^2, \quad (63.3)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial \phi}{\partial z}. \quad (63.4)$$

В принципе величина ω может быть функцией высоты, описывающей состояние вертикального сдвига. Однако мы еще больше упростим описание, предположив, что $\omega = \omega(r)$. Такая зависимость представляется хорошим приближением для некоторых наблюдаемых галактик.

Политропное уравнение состояния (40.4) завершает описание:

$$P = K\rho^\gamma. \quad (63.5)$$

Здесь мы пользуемся выражением $\gamma = 1 + 1/n$ вместо показателя политропы n . В цилиндрической системе координат легко исследовать некоторые возможные эффекты анизотропного давления, полагая, что коэффициент K теперь имеет различные значения по вертикальному и радиальному направлениям. Обозначим их через K_z и K_r . Величина γ также может быть анизотропной, но здесь мы будем считать ее неизменной.

Подстановка уравнения (63.5) в (63.3) и (63.4) и последующее исключение потенциала из уравнения (63.1) дает

$$K_r \gamma \rho^{\gamma-2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial r^2} + K_r \gamma (\gamma - 2) \rho^{\gamma-3} \left(\frac{\partial \rho}{\partial r} \right)^2 + K_r \gamma \frac{\rho^{\gamma-2}}{r} \frac{\partial \rho}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{d(r^2 \omega^2)}{dr} + K_z \gamma \rho^{\gamma-2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2} + K_z \gamma (\gamma - 2) \rho^{\gamma-3} \left(\frac{\partial \rho}{\partial z} \right)^2 = -4\pi G \rho(r, z). \quad (63.6)$$

Это обобщение уравнения Эмдена (40.7) на случай цилиндрических вращающихся политроп конечной толщины. Соотношение сильно упрощается, становясь линейным при $\gamma = 2$. Частное значение $\gamma = 2$ обеспечивает удачную иллюстрацию эффектов сжимаемости и близко к ожидаемому значению для таких систем. В полученном уравнении можно разделить переменные, записав

$$\rho(r, z) = R(r) + Z(z), \quad (63.7)$$

что дает

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} + \frac{2\pi G Z}{K_z} = c, \quad (63.8)$$

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \frac{2\pi G}{K_r} R - \frac{1}{2K_r} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r^2 \omega^2) + \frac{K_z}{K_r} c = 0. \quad (63.9)$$

где c — постоянная разделения.

Решение (63.8), удовлетворяющее условию симметрии $\rho(z) = \rho(-z)$, имеет вид

$$Z = A \cos \alpha_z z + \frac{c}{\alpha_z^2}, \quad (63.10)$$

где A — постоянная интегрирования. Мы запишем также

$$\alpha_z^2 \equiv \frac{2\pi G}{K_z}, \alpha_r^2 \equiv \frac{2\pi G}{K_r}. \quad (63.11)$$

Конечное решение при $r = 0$ для однородной части уравнения (63.9) (т. е. для его первых трех членов) есть $B J_0(\alpha_r r)$, поскольку это уравнение Бесселя ну-

левого порядка [см. формулу (59.7)]. Добавление частного решения полного неоднородного уравнения дает общее решение. Ясно, что неоднородная часть зависит от формы кривой вращения $\omega(r)$. Для исследования галактической структуры особенно интересны два случая: твердотельное вращение с $\omega = \text{const}$ и вращение с постоянной скоростью $V_\theta = r\omega = \text{const}$. В обоих случаях частным решением является константа, и мы можем написать

$$R = B J_0(\alpha_r r) - \frac{c}{\alpha_z^2} + \frac{\omega^2}{2\pi G} \quad (63.12)$$

для $\omega = \text{const}$. Формально это соотношение включает и случай $V_\theta = \text{const}$, который можно получить, полагая $\omega = 0$ в (63.12).

Таким образом, распределение плотности записывается как

$$\rho(r, z) = B J_0(\alpha_r r) + A \cos \alpha_z z + \frac{\omega^2}{2\pi G}. \quad (63.13)$$

Видно, что анизотропия давления порождает лишь различие шкал высот по r и z . Заметив это, предположим теперь, что давление изотропно и $\alpha_r = \alpha_z \equiv \alpha$. Более того, введем безразмерные расстояния $r_* = r\alpha$ и $z_* = z\alpha$, так что

$$\rho(r_*, z_*) = B J_0(r_*) + A \cos z_* + \frac{\omega^2}{2\pi G}. \quad (63.14)$$

Связь между r_* и z_* при постоянном значении ρ дает кривые постоянной плотности. Чтобы получить константы A и B , можно задать ρ в двух местах: скажем, в центре, $\rho(0, 0) = \rho_c$, и на конце малой оси, $\rho(0, z_{*e}) = 0$. Однако, чтобы приблизиться к наблюдаемым величинам, мы можем задать ρ на концах как большой так и малой осей: $\rho(r_{*e}, 0) = \rho(0, z_{*e}) = 0$. В последнем случае при твердотельном вращении

$$A = - \frac{[1 - J_0(r_{*e})]}{[1 - J_0(r_{*e}) \cos z_{*e}] 2\pi G} \frac{\omega^2}{2\pi G} \equiv -a \frac{\omega^2}{2\pi G}, \quad (63.15)$$

$$B = - \frac{[1 - \cos z_{*e}]}{[1 - J_0(r_{*e}) \cos z_{*e}] 2\pi G} \frac{\omega^2}{2\pi G} \equiv -b \frac{\omega^2}{2\pi G}, \quad (63.16)$$

где a и b положительны. Подстановка A и B в выражение (63.14) дает особенно простой результат для отношения (58.1):

$$2\pi\sigma^{-2} = \frac{2\pi G \rho}{\omega^2} = 1 - b J_0(r_*) - a \cos z_*. \quad (63.17)$$

Этим определяется отношение локальной гравитационной частоты к частоте вращения, необходимое для равновесия.

Интересно также исследовать форму края политропы. Этот край не цилинд-

дрический, хотя он осесимметричен. Чтобы получить его форму $z_*(r_*)$, положим $\rho = 0$ в соотношении (63.17) и выберем значения r_{*e} и z_{*e} , чтобы определить a и b в выражениях (63.15) и (63.16). Полученный в результате профиль $\arccos(J_0)$ показан на рис. 62. Он может обеспечивать хорошее приближение [в проекции; см. формулу (40.24)] к форме центральных «балджей» в виде «ящиков», которые наблюдаются в некоторых галактиках, таких, как NGC 128, NGC 1381 и NGC 4565. В начале книги изображен очень яркий пример такой галактики, у других профили более плавные.

На основании этих иллюстраций для очень простых асимметричных систем конечной толщины читатель может создать себе начальное представление о дополнительных сложностях, обусловленных уменьшением степени симметрии или полным ее отсутствием. В трехосных системах поддерживается некоторая глобальная когерентность — по крайней мере у них существуют оси. Когда отклонения от правильной формы не слишком велики или достаточно локализованы, могут быть полезны тензорные вириальные уравнения (Binney, 1978). Если эти отклонения возрастают, самосогласованные звездные потоки и анизотропия давления начинают играть решающую роль в поддержании квазистойчивой фигуры. Тогда уравнения звездной гидродинамики, которым подчиняются политропные и тензорные вириальные модели, обрвать последовательно много сложнее.

При несколько более общем подходе (см., например, Vandervoort, 1980; Petrou, 1983) сначала постулируется вероятная форма стационарной одночастичной функции распределения $f(\mathbf{r}, \mathbf{v})$. Как следует из теоремы Джинса (гл. 39), для осесимметричных систем $f = f(E, L_z)$. Вблизи центров таких систем $L_z \rightarrow 0$ и $f \rightarrow f(E)$, поэтому распределение скоростей становится изотропным. Более того, применяя выражение, аналогичное (39.11), мы видим,

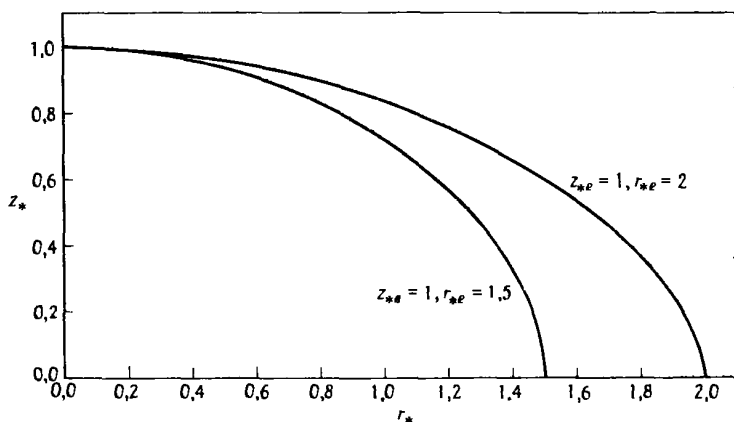


Рис. 62. Профиль $\arccos(J_0)$ для вращающихся политропов с $z_{*e} = 1$, $r_{*e} = 1,5$ и $z_{*e} = 1$, $r_{*e} = 2$.

что чистое вращение v_z зависит только от нечетной по L_z части $f(E, L_z)$. Она не вносит вклада в плотность, поэтому модели с одинаковой плотностью могут вращаться совсем по-разному. Физический смысл можно прояснить обычным приемом — изменяя направление вращения по некоторым орбитам на обратное. Таким образом можно использовать физические свойства системы, чтобы догадаться о форме $f(E, L_z)$. Затем вычисляется получающееся распределение плотности и проверяется, устойчиво ли оно. Подобные исследования устойчивости редко бывают простыми задачами.

Как нетрудно себе представить, распространить исследование с помощью функции распределения на трехосные системы существенно труднее. Лишь в отдельных случаях L_z остается интегралом движения. Мы видели в гл. 60, что длительная устойчивость требует существования третьих интегралов движения. Однако в общем случае мы не можем найти третий интеграл, не зная распределения плотности $\rho(\mathbf{r})$, которое определяет сглаженные орбиты, и мы не можем найти форму распределения плотности $f(E, L_z, I_3)$, не зная третьего интеграла. Для систем, близких к сферическим, мы можем попытаться разубить этот узел, догадавшись, что I_3 зависит от амплитуды L полного момента импульса. Возможно, $I_3 \approx L^2 - L_z^2 = L_\perp^2$ в некоторых простых случаях [см. формулу (39.10)]. Форма третьего интеграла не единственна, поскольку любая функция от E , L_z и I_3 также является третьим интегралом. Однако если правильно угадать форму I_3 , то можно прийти к информативным моделям. Относительно систем, которые не являются ни трехосными, ни почти сферическими, удачные догадки делать труднее. Чтобы исследовать еще более неправильные системы, мы должны обратиться к моделированию задачи N тел с помощью вычислительных машин.

63.2. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Смелые численные эксперименты показали, что многие неправильные галактики могут быть квазиустойчивыми. Достаточно, если квазиустойчивость сохраняется на протяжении примерно 10—20 динамических времен пересечения, что близко к возрасту галактики. Третьи интегралы могут сохраняться не все время, но пока они существуют, они могут быть очень эффективными. Герхард (*Gerhard*, 1983) рассчитал интересный пример. Он нашел его в ансамбле сливающихся галактик. Трехосная фигура, получившаяся в результате предшествующего слияния, сталкивается в лоб с галактикой, состоящей из диска и гало. В результате параболического столкновения галактики сливаются. После нескольких сильных колебательных движений система обретает равновесие. Ее внутренняя область становится вытянутой, внешняя — сплюснутой, а промежуточная переходная область — трехосной. Хотя такая вытянутая — трехосная — сплюснутая галактика не имеет глобальных осей, она оказывается устойчивой, по меньшей мере, в течение 17 времен пересечения. Анизотропия скоростей, меняясь внутри галактики, поддерживает ее неправильную форму. Вращение не играет большой роли, хотя центральная вытянутая область медленно и беспорядочно поворачивается.

Мерой важности вращения может служить отношение скорости вращения к дисперсии скоростей. Этот параметр обычно мал и меняется у моделей неправильной формы, скажем, между 0,05 и 0,5. Его значение в центре иногда сравнимо с наблюдаемым, но эти сравнения неопределенны: дисперсия скоростей в центре характеризует различные динамические процессы в ядрах (гл. 38—53), которые могут быть совершенно независимыми от остальной галактики. Хотя сравнения для всей галактики целиком имеют большую ценность, они искажаются эффектами проекции.

Пример Герхарда иллюстрирует также эти эффекты проекции. Они особенно хорошо видны на закрученных контурах плотности. Эти контуры можно преобразовать в изофоты, сделав простое, но рискованное предположение о постоянстве отношения масса — светимость. Эллиптичность таких изофот сильно зависит от угла зрения наблюдателя. Видимая эллиптичность для данной модели может оставаться постоянной с изменением радиуса, возрастать, уменьшаться или то и другое вместе. Проекция позиционных углов осей изофот также ведут себя по-разному. О форме неправильных галактик трудно судить по двумерной проекции.

Прямые эксперименты по моделированию задачи N тел имеют то преимущество, что они показывают, как модели галактик эволюционируют от своего начального состояния и как долго сохраняется их первоначальная структура. Если галактика достигает квазиустойчивого состояния, то ее сохраняющиеся свойства нетрудно изучить в их взаимосвязи и во всех подробностях. При расчетах автоматически учитываются некоторые неклассические интегралы движения. Недостаток таких экспериментов состоит в том, что в ходе моделирования заранее не известно, каким окажется результат. Таким образом, прямое воспроизведение наблюдаемых или желаемых форм галактик может оказаться сложной задачей. Чтобы ответить на некоторые вопросы о квазиустойчивости данной формы, более удобна другая процедура (Schwarzschild, 1979; Heisler et al. 1982; Richstone, 1982).

В гл. 7 было показано, что решение бесстолкновительного уравнения Больцмана для систем, в которых существенную роль играет только усредненное поле, эквивалентно информации об орбитах всех звезд. Поэтому, вместо того чтобы пытаться строить догадки о форме $f(r, v, t)$ и выяснять, дает ли она квазиустойчивое решение объединенных уравнений Больцмана и Пуассона, мы можем исследовать галактическую структуру, проследивая орбиты при данном глобальном потенциале. Если вся галактика в целом достигает квазиустойчивого состояния, большинство звездных орбит должны быть сами по себе квазиустойчивыми. Чтобы это произошло, орбиты должны быть ограничены неклассическими (например, третьими) интегралами. Но нам не нужен явный вид этих интегралов. Чтобы исследовать, может ли галактика данной формы быть квазиустойчивой, мы можем численно рассчитать орбиты при данном распределении плотности и посмотреть, действительно ли они квазиустойчивы. Сделать это проще, чем осуществить полное моделирование задачи N тел. Расчет орбит для 10^2 — 10^3 периодов должен дать хорошее представление об их устойчивости на протяжении всей жизни галактики, если принять,

что среднее поле существенно не меняется (что может случиться, если основные процессы перераспределяют газ и звезды). За время $\sim 10^3$ периодов кумулятивные эффекты от резонансов очень высокого порядка, по-видимому, не разрушают орбиты (Солнечная система устойчива на протяжении $\sim 10^9$ периодов), поэтому слишком высокая точность обычно не требуется.

Какие орбиты надо исследовать? Нам не следует ожидать многого от орбит, по которым звезды движутся вокруг галактики на большом расстоянии от центра. Бесплезными будут и пучки орбит, если движущиеся по ним звезды создают гравитационный потенциал, отличающийся от требуемого галактического потенциала. Мы должны использовать только орбиты, соответствующие гравитационному потенциалу, который следует из данного распределения плотности. Тогда все они будут самосогласованными. Основная задача — найти такие орбиты.

Существуют многочисленные методы нахождения широких классов приблизительно самосогласованных орбит и использования их для того, чтобы судить о квазиустойчивости (см. последние три ссылки). Отдельные примеры осесимметричных и трехосных систем дают возможность предположить, что квазиустойчивость может быть присуща всем галактикам, похожим на те, что мы наблюдаем. Это предположение согласуется с представлением, создаваемым численными экспериментами. Пока более общие результаты отсутствуют, нам приходится опираться лишь на богатый набор частных примеров.

64. ГРАВИТАЦИОННЫЕ УДАРЫ

Ожидание ощущения короткого резкого удара.

Гилберт и Салливан

Оставив позади свойства одиночной изолированной системы, мы начинаем теперь исследовать случай взаимодействия двух систем. В разд. 48.2 и гл. 58 уже было показано, что приливы могут передавать энергию и момент импульса. Теперь мы исследуем некоторые влияния приливного переноса на внутреннюю структуру звездных систем. Поскольку звездные системы имеют много больше степеней свободы, чем внутренняя структура отдельной звезды, их реакция на внешние силы много более разнообразна. В этой главе описываются основные процессы, которые происходят при быстром прохождении сферического скопления через плоскость галактики. В гл. 65 описываются искажения плоских систем, когда одна из них медленно движется мимо другой.

«Быстро» и «медленно» — понятия относительные. Мы видели в гл. 47, какое значение имеет отношение орбитального периода (или квазипериода) к характерному времени изменения внешних сил. Если это отношение мало, мы можем пользоваться адиабатическими инвариантами, или, в более общем случае, мультипольными разложениями по времени, чтобы исследовать такое явление, как сегрегация орбит. Если это отношение велико, то можно использо-

вать импульсное приближение. Внезапное изменение внешнего поля приводит к гравитационному удару.

Вполне вероятное, а возможно, и общее свойство систем состоит в наличии двух типов орбит, один из которых плавно реагирует на некоторые внешние изменения, а реакция другого является очень резкой. Различные части системы могут неодинаково отвечать на воздействие, что усложняет ее поведение. Например, гало сферического скопления больше подвержено резким возмущениям, чем его ядро.

Когда шаровое скопление движется через галактику, оно воспринимает удары, исходящие из многих источников. Другие шаровые скопления, гигантские газовые облака и усредненное поле самой галактики — все это создает условия, быстро меняющиеся вдоль орбиты скопления. Рассмотрим в качестве иллюстрации сжимающий удар, который происходит, когда шаровое скопление пересекает плоскость галактики (*Ostriker et al.*, 1972).

Этот удар является сжимающим, поскольку, если учесть долгопериодичность орбиты скопления, галактическая плоскость внезапно появляется в центре скопления, а затем так же внезапно исчезает. Результирующие приливные силы немедленно вынуждают скопление сжаться. Затем оно расширяется и начинает колебаться. Перемешивание фаз, затухание Ландау и парная релаксация постепенно перераспределяют энергию этих колебаний по скоплению. Когда скопление вновь придет в спокойное состояние, оно будет иметь новую структуру, определяемую количеством энергии, поглощенной при ударе. Множество последовательных ударов может передать скоплению энергию, достаточную, чтобы ускорить процесс испарения звезд или включить спусковой механизм термодинамических неустойчивостей.

Чтобы оценить величину переданной энергии, предположим, что орбита скопления почти отвесно пересекает галактическую плоскость, так что гравитационное ускорение $g(z)$ зависит только от высоты z . Вертикальная скорость звезды в скоплении относительно его центра, расположенного в точке z_c , есть дифференциальная скорость $v_z = \dot{z} - \dot{z}_c$. Дифференциальное ускорение этой звезды, вызванное дифференциальной (т. е. приливной) гравитационной силой, есть

$$\frac{dv_z}{dt} = g(z) - g(z_c) \approx \left. \frac{dg}{dz} \right|_{z_c} \Delta z \quad (64.1)$$

с точностью до первого порядка, где $\Delta z = z - z_c$. Смысл импульсного приближения состоит в том, что звезда скопления сдвигается очень мало за то время, пока скопление пересекает плоскость галактики, и поэтому $\Delta z \approx \text{const}$. Это время пересечения связано с приблизительно постоянной вертикальной скоростью v_{z_c} скопления соотношением $dz_c = v_{z_c} dt$. Поэтому интеграл от

(64.1) приблизительно равен

$$\Delta v_z \approx \frac{\Delta z}{v_{z_c}} \int_{-g_m}^{g_m} dg(z_c) = \frac{2g_m}{v_{z_c}} \Delta z, \quad (64.2)$$

где g_m — максимальное ускорение выше и ниже плоскости симметрии.

В течение времени пересечения $t_z = 2z_m/v_{zc}$, начавшегося с высоты z_m , где $g = g_m$, изменение Δz , вызванное ударом, т. е. $t_z \Delta v_z$, должно быть существенно меньше Δz . Таким образом, условие, при котором справедливо импульсное приближение, имеет вид $2z_m \Delta v_z \ll v_{zc} \Delta z$, или

$$\frac{1}{2} v_{zc}^2 \gg 2z_m g_m. \quad (64.3)$$

Это соотношение говорит лишь о том, что работа, совершенная галактикой над звездой скопления, должна быть много меньше начальной энергии звезды.

Удар изменяет энергию единицы массы звезды на величину

$$\Delta E = \Delta(\frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = \frac{1}{2} [2\mathbf{v} \cdot \Delta \mathbf{v} + (\Delta v)^2] \quad (64.4)$$

с точностью до членов второго порядка в разложении в ряд Тейлора. Многочисленные пересечения плоскости галактики приведут к тому, что скопление испытает много ударов на протяжении своей истории. Однако, поскольку ни пересечения плоскости галактики, ни орбиты звезд скопления не являются строго периодическими, $\mathbf{v}$ и $\Delta \mathbf{v}$ в общем случае не коррелированы и, таким образом, $\langle \mathbf{v} \cdot \Delta \mathbf{v} \rangle = 0$ при усреднении по многим пересечениям (или по множеству звезд скопления в процессе одного пересечения). Это оставляет $\Delta E = (\Delta v)^2/2$. Время между ударами составляет примерно половину периода P_c орбиты скопления, что дает приблизительную скорость увеличения энергии

$$\frac{dE}{dt} = \frac{(\Delta v)^2/2}{P_c/2} = \frac{4g_m^2(\Delta z)^2}{P_c v_{zc}^2}. \quad (64.5)$$

Чтобы определить характерное время τ_s , за которое удары существенно изменяют структуру скопления, запишем очевидное соотношение $\tau_s dE/dt = T$. Средняя энергия на единицу массы T звезды в скоплении, для которого выполняется теорема вириала, равна $W/2$. Для политропного скопления массы M , радиуса R с показателем политропы n мы можем воспользоваться результатом из разд. 54.1, чтобы получить

$$\tau_s = \frac{3}{8(5-n)} \frac{GMP_c v_{zc}^2}{R(\Delta z)^2 g_m^2}. \quad (64.6)$$

Возрастание концентрации к центру скопления (т. е. возрастание n) затрудняет возмущение звездных орбит. Орбиты в гало с большим средним расстоянием Δz значительно легче поддаются возмущению, чем те орбиты, которые в основном остаются в ядре, что согласуется и с интуитивным предположением.

Чтобы численно оценить τ_s , можно использовать наиболее типичные величины, характеризующие шаровые скопления в большой спиральной галактике (подобной нашей): $n = 3$, $M = 10^6 M_\odot$, $R = 10$ пс, $\Delta z = 5$ пс, $P_c = 10^8$ лет, $v_{zc} = 100$ км/с, $g_m = 10^{-8}$ см/с². Для этих значений формула (64.6) дает оценку $\tau_s = 3 \cdot 10^{11}$ лет. Лишь в редких случаях τ_s будет меньше, чем возраст

галактики. Более того, τ_s обычно также много больше, чем характерное время парной релаксации τ_R (см. разд. 42.3), от которой зависят испарение звезд и внутренняя релаксация. Поэтому гравитационные удары, по всей видимости, доминируют только в исключительных условиях. В более общем случае они будут только усиливать прямое приливное обдирание внешних областей и испарение звезд из гало скопления, соответствующее условиям Фоккера — Планка.

Исходя из наличия гравитермических неустойчивостей, рассмотренных в гл. 43—45, нам следовало бы ожидать, что слабые удары, способствующие испарению из гало, должны также содействовать сжатию ядра. Это сжатие вызывается тем, что испарение звезд из ядра усиливается благодаря парной релаксации, что пополняет население гало. Потеряв звезды с самой высокой энергией, оставшееся ядро приобретает большую отрицательную энергию. Однако сильные удары, которые поставляют энергию прямо в ядро, должны производить противоположный эффект. Они нагревают ядро за более короткое время, чем то, которое характерно для парной релаксации, заставляя ядро расширяться. Сильные удары также способствуют испарению звезд из гало, но этот эффект играет меньшую роль. Численное моделирование (*Spitzer and Chevalier*, 1973) показало, что именно так все и происходит. Когда τ_s много больше τ_R , что справедливо для слабых ударов, ядро сжимается быстрее, чем без ударов. Но, когда τ_s/τ_R становится меньше, ядро перестает сжиматься, и при τ_s , в несколько раз превышающем τ_R , быстрое нагревание ударами вновь приводит к расширению ядра. Точное значение τ_s/τ_R , при котором происходит это изменение, зависит от детальной структуры скопления и от того, по каким критериям в нем выделено ядро.

65. ПРОХОЖДЕНИЕ И СЛИЯНИЕ

Я — часть всего, с чем я встречался.

Альфред Теннисон

Самые грандиозные во Вселенной столкновения случаются, когда галактики проходят друг сквозь друга. Среди обломков, образованных приливным взаимодействием, мы часто находим доказательства столкновений. Иногда внешние части пары галактик бывают так деформированы, что между ними образуются мосты или возникают структуры, напоминающие хвост. Мы находим также большие неправильные галактики с несколькими ядрами, возможно, возникшие в результате слияния.

В течение длительного времени интерес к слиянию галактик подавлялся тем, что прямое вычисление величины $n\sigma vT$ давало очень малую вероятность такого события на протяжении всего хаббловского времени существования Вселенной. Этот результат не сильно зависит от правильности значения постоянной Хаббла. Если бы наблюдаемая величина H была больше, объем стал бы меньше, поэтому наблюдаемая плотность числа частиц $n \propto H^3$,

Предполагая, что сечение слияния приблизительно пропорционально наблюдаемому видимому сечению, получаем $\sigma \propto H^{-2}$. (Возрастание H означает, что галактики расположены ближе друг к другу и имеют меньший видимый линейный диаметр.) Хаббловский возраст $T \approx H^{-1}$. Поэтому получающаяся вероятность остается малой независимо от неопределенности современного значения H .

Однако видимая убедительность этих аргументов проистекает из неоправданного упрощения предположений, лежащих в их основе. Столкновения галактик, приводящие к слиянию, не похожи на случайные столкновения частиц в газе. Большинство слияний внутри групп и скоплений галактик случается среди более массивных объектов, которые имеют тенденцию скапливаться в центре вследствие сегрегации масс (гл. 46). Вблизи центра они движутся по сложным резонансным орбитам, которые определяются взаимодействием нескольких тел; это увеличивает вероятность столкновения. Другое условие, способствующее слиянию, возможно, присутствует в процессе формирования галактик. Если галактики не обладают большими начальными хаотическими скоростями, то близкие соседи по хаббловскому потоку должны притягиваться друг к другу достаточно сильно, чтобы преодолеть свои малые начальные пекулярные скорости. Некоторое число столкновений должно происходить вскоре после образования галактик, но другие могут быть отсрочены, пока не закончится цикл движения по орбитам. Третий стимул к слиянию галактик — это перераспределение орбит, происходящее, когда сольются два скопления. Более того, эффективное сечение слияния галактик, которое может также определяться обширным гало, получается из наблюдений не совсем уверенно.

Около сотни наблюдаемых галактик можно считать слившимися. Но это только оценка по порядку величины, поскольку признаки слияния часто выражены не ясно и при составлении таких списков трудно учитывать эффекты селекции. Мы до сих пор не знаем, какой процент галактик различных типов получается в результате слияний. Не знаем мы и общего влияния соединяющихся галактик на форму, размер и светимость объекта, получающегося после релаксации. Это не только динамическая проблема. В нее входят эффекты звездообразования и вспышек сверхновых наряду с выделением и перераспределением газа и пыли. Здесь мы лишь подведем итог некоторых поддающихся вычислениям, но далеко не полностью исследованных динамических аспектов проблемы. Дальнейшее рассмотрение этого вопроса можно найти в обширном обзоре Алладина и Нарасимхана (*Alladin and Narasimhan*, 1982).

Что определяет динамические результаты столкновения галактик? Ясно, что важнейшим фактором является прицельный параметр. Скорость при столкновении по сравнению со скоростью убегания из галактики — следующая по важности величина. При относительно малых скоростях собственное вращение галактик также становится важным. Особенности формы и распределения плотности обычно играют меньшую, но все-таки значительную роль.

Большинство результатов, полученных при исследовании слияния галактик, сильно зависят от деталей модели или численного эксперимента. Однако существует несколько простых предельных случаев, которые хорошо отража-

ют суть дела. При высоких относительных скоростях и больших прицельных параметрах передача энергии орбитального движения внутрь галактик в основном описывается импульсными приливными ударами, рассмотренными в гл. 64. Примеры таких явлений наблюдаются вблизи центров больших скоплений галактик, где дисперсия скоростей достигает 1000—2000 км/с, что в несколько раз превышает скорость убегания из внешних областей отдельных галактик.

Оценка по порядку величины эффекта далекого прохождения на большой скорости следует прямо из формул (64.2) и (64.4). Если прицельный параметр равен p , максимальное ускорение $g_m \approx GM/p^2$ и $\Delta z \approx r_{\text{гал}}$, то для приращения скорости ΔV , направленного приблизительно перпендикулярно V (что соответствует далекому прохождению), получим

$$\Delta E = \Delta T \approx \frac{1}{2} M \left(\frac{2GM}{p^2 V} \right)^2 r_{\text{гал}}^2. \quad (65.1)$$

Этот результат по существу аналогичен формуле (48.22), поскольку в том предельном случае, когда галактики остаются сферическими, процессы очень похожи на приливные взаимодействия звезд. Отношение $\Delta E/E$ может быть записано в виде

$$\frac{\Delta T}{T} \approx \left(\frac{GM^2}{r_{\text{гал}}} \right)^2 \left(\frac{1}{2} MV^2 \right)^{-2} (r_{\text{гал}}/p)^4 \approx \left(\frac{V_{\text{убег}} r_{\text{гал}}}{Vp} \right)^4. \quad (65.2)$$

Как и следовало ожидать, в этом предельном случае поглощается лишь малая доля орбитальной энергии и слияния не происходит.

Следующий предельный случай — это прохождение на большой скорости с малым прицельным параметром. Импульсное приближение по-прежнему применимо (вспомним, что мы пренебрегли взаимодействиями газа, которые могут иметь впечатляющий вид, но динамически играют подчиненную роль), но теперь $(r_{\text{гал}}/p) \approx 1$. Более того, при почти лобовом столкновении существует возможность, что приливное ускорение будет направлено так же, как и скорость, поэтому нельзя пренебрегать величиной $V \cdot \Delta V$ в течение одного столкновения. Поэтому следует умножить соотношение (65.2) на $2V/\Delta V \approx (MV^2)(GM^2/r_{\text{гал}})^{-1}(p/r_{\text{гал}})^2$. Даже теперь отношение $\Delta T/T$ должно быть порядка $(V_{\text{убег}}/V)^2$, что по-прежнему мало. Очевидно, для слияния требуются как малые скорости, так и малые прицельные параметры.

Однако этот вывод не всегда справедлив. В нем не учитывается важнейшая возможность: связанные орбиты. Случай малой скорости при большом взаимном расстоянии приводит к слиянию благодаря малому, но накапливающемуся и непрерывному взаимодействию при движении по связанным орбитам. Едва ли можно заранее ожидать, что импульсное рассмотрение даст хорошие результаты и в случае связанных орбит. Тем не менее в одной из ранних работ, где рассматривались приливные взаимодействия (Spitzer, 1958), было показано, что импульсное приближение часто оказывается применимым за рамками

первоначальных ограничений и дает при малых скоростях удовлетворительную оценку по порядку величины. Причина частично состоит в том, что два главных неимпульсных эффекта работают в противоположных направлениях, взаимно компенсируя друг друга. Потеря в результате приливного взаимодействия звезд с высокой энергией уменьшает энергию галактики, и она становится ниже той величины, которая соответствует импульсному приближению. С другой стороны, приливные деформации усиливают резонансы в системе и увеличивают энергию, передаваемую галактике, до величины, превосходящей ту, которая требуется для импульсного приближения. В итоге импульсное приближение по результатам часто оказывается близким к более точному численному моделированию. Подробный анализ этого счастливого совпадения остается важной проблемой.

Использование такого совпадения дает простую приблизительную оценку приливных влияний на связанные орбиты (*Alladin and Parthasarathy*, 1978). В случае двух галактик примерно равной массы на почти круговой орбите мы можем подставить радиус орбиты a и период $\tau_{\text{орб}} = \sqrt{2\pi a^3 (GM)^{-1/2}}$ в соотношение (64.6), чтобы получить оценку времени, за которое галактики будут разрушены

$$\tau_d \approx \frac{3\pi}{4(5-n)(GM)^{1/2}R^3} \approx \left(\frac{a}{R}\right)^3 \tau_{\text{орб}}. \quad (65.3)$$

Если галактики обладают разными массами M и M_1 и движутся по орбите, имеющей главную полуось a и эксцентриситет e , то время разрушения галактики с массой M составляет приблизительно величину, полученную по формуле (65.3), умноженную на $(1 - e^2)^3 M^{3/2} (M + M_1)^{1/2} M_1^{-2}$. Эксцентричные орбиты более опасны для галактик.

Как и в случае приливного формирования двойных звезд (разд. 48.2), энергия, полученная галактиками, теряется их общей орбитой. В конце концов уменьшение размера орбиты приводит к соприкосновению галактик. Если галактики не разрушаются полностью, их остатки могут слиться. Легко получить приблизительный критерий, показывающий, когда происходит разрушение, а когда слияние. При обоих процессах передается одно и то же количество энергии, поэтому большая эффективность того или другого процесса определяется отношением энергий связи. Если каждая галактика получает примерно половину приливной энергии, то отношение энергии связи галактики к орбитальной энергии связи дает

$$\eta = \frac{\tau_d}{\tau_{\text{слиян}}} \approx \frac{6}{(5-n)} \frac{a}{R} \frac{M}{M_1}. \quad (65.4)$$

Здесь не принимается в расчет вращение галактики или изменение ее геометрии, и не рассматриваются тонкости определения τ_d и $\tau_{\text{слиян}}$, которые различны в каждом отдельном случае. Однако это соотношение все же показывает, что слияние происходит скорее в тех случаях, когда обе галактики обладают высокой концентрацией к центру и сходными массами.

В дополнение к передаче приливной энергии слиянию могут способствовать два других процесса. Оба они более эффективны для уже связанных орбит. Первый — это рогаточный выброс и его обобщения. Мы можем рассматривать их как сильные резонансы, которые выбрасывают звезды и группы звезд из вращающихся по орбитам галактик. Те звезды, которые отрываются приливными силами от своей галактики, особенно подвержены таким резонансам. Подробности процесса критическим образом зависят от точного распределения плотности и скорости (особенно скорости вращения). В результате происходит потеря орбитальной энергии.

Динамическое трение — это другой процесс, способствующий слиянию. В конце разд. 14.3 уже описан пример, когда динамическое трение заставляет одиночную массивную звезду, первоначально находившуюся на круговой орбите, падать по спирали и сливаться с ядром галактики. Когда галактика — спутник вращается внутри гало более массивной галактики, численное моделирование (см., например, *Lin and Tremaine*, 1983) показывает, что динамическое трение очень хорошо описывается стандартными формулами. Используя оценку времени слияния, приведенную в конце разд. 14.3, получаем

$$\tau_{\text{слиян}} \approx 5 \cdot 10^8 \left(\frac{V_0}{100 \text{ км/с}} \right) \left(\frac{r_0}{50 \text{ кпс}} \right)^2 \left(\frac{10^{11} M_{\odot}}{M} \right) \text{ лет} \quad (65.5)$$

для динамического трения (с логарифмическим множителем, равным единице). Обычно бывают важны также приливные взаимодействия, и требуется полностью самосогласованное моделирование. Поэтому, если массивные галактики имеют массивные гало, нам не следует ожидать, что вблизи них отыщутся спутники. Вопрос о том, действительно ли слияния приводят к образованию массивных галактик, не может быть разрешен рассмотренным здесь простым анализом характерных времен, поскольку для этого требуется много лучше знать начальные условия.

Рассмотрим, наконец, случай прохождения и слияния, когда малы и скорость, и прицельный параметр. Как и следует ожидать из рассмотрения такого предельного случая с применением уравнений (65.2) или (65.3), характерные времена разрушения, вызванного прохождением, и слияния сравнимы между собой. Хотя анализ, лежащий в основе этих уравнений, здесь неприменим, численное моделирование показало, что они приводят к правильному качественному выводу. Это неудивительно, поскольку по существу результат основан на соображениях размерности и получен при экстремальных, но квазиабатических физических условиях. Естественно, что только самосогласованное численное моделирование дает обстоятельное описание.

В ранних работах (см., например, *Toomre and Toomre*, 1972) при моделировании медленного слияния близких галактик каждая галактика рассматривалась как диск, состоящий из невзаимодействующих пробных частиц, которые вращались вокруг центральной точечной массы. Две такие галактики двигались по заранее заданной орбите, и пробные частицы находились под влиянием обеих центральных масс. Такого моделирования было достаточно, чтобы

получить описание сложных слившихся структур со струями, мостами, гребнями и хвостами. Результаты сильно зависят от особенностей начальных условий, а также от проекции. Подобрать все это должным образом, можно смоделировать многие пекулярные структуры, наблюдаемые (а также и ненаблюдаемые!) в тесных парах галактик. Многие из этих структур имеют явно приливное происхождение. Однако в некоторых случаях могут быть важны также галактический ветер, давление излучения и взрывные или компактные выбросы.

Моделирование, при котором согласуется большее число процессов (см., например, *Gerhard*, 1981), показывает, что самогравитация звезд определяет картину слияния. При использовании самосогласованных моделей основная проблема состоит в том, что они подвержены всем внутренним неустойчивостям типа перемычек или спиралей, которые обсуждались в предыдущих главах. Использование малого числа звезд искусственно увеличивает эти внутренние неустойчивости вследствие усиления гравитационной фрагментации. Поэтому необходимо работать с большим числом частиц, даже если при этом время вычислений сильно увеличивается. Результаты самосогласованных численных экспериментов подчеркивают асимметрию и иррегулярность слияния и образующегося остатка. Момент импульса коренным образом перераспределяется под действием вращающих моментов и потери массы. Галактики покидают лишь небольшая часть всех звезд, но они могут уносить до 20—30% полного момента импульса. Оставшееся ядро может быть вытянутым, сплюснутым, трехосным или неправильным, с анизотропным распределением дисперсии скоростей. Все это зависит от вращения и формы галактик. Центральное ядро может прорелаксировать, но внешние области могут достаточно долго сохранять память в начальных условиях, так что у нас есть надежда узнать о них из наблюдений.

66. ЗАДАЧИ И ПРИЛОЖЕНИЯ

66.1. ОДНОРОДНЫЕ ЭЛЛИПСОИДЫ И СФЕРОИДЫ МАКЛОРЕНА

Чтобы исследовать некоторые свойства сфероидов Маклорена, начните с однородного эллипсоида плотности ρ , ограниченного поверхностью

$$\mu \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad (1)$$

при $a \geq b \geq c$. Гравитационный потенциал внутри этого эллипсоида есть

$$\phi(x, y, z) = -\pi G \rho (\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 - \delta), \quad (2)$$

где

$$\alpha = abc \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(a^2 + \lambda)\Delta}, \quad (3a)$$

$$\beta = abc \int_0^{\infty} \frac{d\lambda}{(b^2 + \lambda)\Delta}, \quad (36)$$

$$\gamma = abc \int_0^{\infty} \frac{d\lambda}{(c^2 + \lambda)\Delta}, \quad (3в)$$

$$\delta = abc \int_0^{\infty} \frac{d\lambda}{\Delta}. \quad (3г)$$

и

$$\Delta^2 = (a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda). \quad (4)$$

Покажите, что полная потенциальная энергия этого эллипсоида, если проинтегрировать по его объему τ , есть

$$W = -\frac{1}{2} \int_{\tau} \rho \phi d\tau = -\frac{8}{15} \pi^2 G \rho^2 a^2 b^2 c^2 \int_0^{\infty} \frac{d\lambda}{\Delta}. \quad (5)$$

Если эллипсоид является сфероидом с $a = b$ и эксцентриситетом e , заданным формулой $c^2 = a^2(1 - e^2)$, покажите, что

$$W = -\frac{16}{15} \pi^2 G \rho^2 (abc)^{5/3} (1 - e^2)^{1/6} \frac{\arcsin e}{e}. \quad (6)$$

Чтобы конфигурация, вращаясь с постоянной угловой скоростью ω , находилась в гидростатическом равновесии, в ней должны быть уравновешены давление, сила тяготения и центробежная сила:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial x} + \omega^2 x, \quad (7a)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial y} + \omega^2 y, \quad (76)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial \phi}{\partial z}. \quad (7в)$$

Покажите, что система уравнений (7) имеет решение

$$\frac{P}{\rho} = \phi + \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2) + \text{const}, \quad (8)$$

где постоянная может быть выбрана так, чтобы на поверхности удовлетворялось граничное условие $P = 0$, и поэтому на той же поверхности выражение $\phi + \omega^2(x^2 + y^2)/2$ равно константе. Подстановка уравнения (2) в (8) позволяет определить поверхности равного давления

$$\left(\alpha - \frac{\omega^2}{2\pi G \rho} \right) x^2 + \left(\beta - \frac{\omega^2}{2\pi G \rho} \right) y^2 + \gamma z^2 = \text{const}. \quad (9)$$

Покажите, что для совпадения одной из этих равновесных поверхностей с эллипсоидом (1) при некотором значении ω должно выполняться условие

$$(a^2 - b^2) \int_0^\infty \left\{ \frac{a^2 b^2}{(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)} - \frac{c^2}{c^2 + \lambda} \right\} \frac{d\lambda}{\Delta} = 0. \quad (10)$$

Более того, угловая скорость при этом связана с длиной осей выражением:

$$\begin{aligned} \frac{\omega^2}{2\pi G\rho} &= \frac{a^2\alpha - b^2\beta}{a^2 - b^2} = \frac{b^2\beta - c^2\gamma}{b^2} \\ &= \frac{ac}{b(b^2 - c^2)} \int_0^\infty \frac{\lambda d\lambda}{(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda)\Delta}, \end{aligned} \quad (11)$$

которое представляет собой не что иное, как отношение (58.1).

Существуют два решения уравнения (10). Если $a = b$, мы имеем сфероиды Маклорена. Если $a \neq b$, условие равенства нулю интеграла дает эллипсоиды Якоби. Покажите, что для сфероидов Маклорена

$$\frac{\omega^2}{2\pi G\rho} = \frac{3 - 2e^2}{e^3} (1 - e^2)^{1/2} \arcsin e - \frac{3}{e^2} (1 - e^2), \quad (12)$$

независимо от их размера. Полагая $r = (abc)^{1/3}$, получите полный момент импульса L и кинетическую энергию T сфероида Маклорена с массой $M = 4\pi r a^2 c/3$:

$$\frac{L^2}{GM^3 r} = \frac{6}{252\pi G\rho} \omega^2 (1 - e^2)^{-2,3}, \quad (13)$$

$$T = \frac{3}{10} \frac{a^2}{r^2} \frac{\omega^2}{2\pi G\rho} \frac{GM^2}{r}. \quad (14)$$

Покажите, что максимальная угловая скорость определяется выражением:

$$\frac{\omega^2}{2\pi G\rho} = 0,2247 \quad (15)$$

при $e = 0,9299$ и $a/c = 2,7198$. Покажите также, что кинетическая энергия равна нулю при $e = 0$, возрастает до максимального значения 0,1719 при $e = 0,9912$, а затем обращается в нуль для бесконечного диска (Lyttleton R. A. The Stability of Rotating Liquid Masses. Cambridge: Cambridge University Press, 1953).

66.2. УПРОЩЕННАЯ ЭВОЛЮЦИЯ ПЕРЕМЫЧЕК

Предположим, что перемычка галактики эволюционирует с потерей заметного момента импульса, но практически не теряет массу, причем потери происходят на конце перемычки. Упростите такую модель дальше, рассматривая

постоянную массу, вращающуюся на конце жесткого стержня. Пусть момент импульса меняется на малую величину, причем масса и энергия остаются постоянными, но соответственно меняются длина и угловая скорость вращения стержня. Покажите, что потеря момента импульса приводит к уменьшению длины стержня и возрастанию его угловой скорости. Придумайте другие простые модели такого же типа и посмотрите, как они реагируют на изменения.

66.3. ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

ДЛЯ РАВНОМЕРНО ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ДИСКА,
СОСТОЯЩЕГО ИЗ ЗВЕЗД

Рассмотрите равновесную модель вращающегося диска, состоящего из звезд и имеющего поверхностную плотность (в цилиндрических координатах):

$$S(r) = S_0 [1 - (r/R)^2]^{1/2}, \text{ если } r \leq R, \\ = 0, \text{ если } r > R. \quad (1)$$

Покажите, что его гравитационный потенциал имеет простую форму

$$\phi(r) = \frac{1}{2} \Omega_0^2 r^2 \quad \text{для } r \leq R, z = 0 \quad (2)$$

и что орбиты гармонически осциллируют по осям x и y с частотой Ω_0 , которая связана с центральной плотностью S_0 и полной массой M соотношением

$$\Omega_0^2 = \frac{\pi^2 G S_0}{2R} = \frac{3\pi G M}{4R^3}. \quad (3)$$

Пусть E и J — энергия и момент импульса на единицу массы звезды, и единицы измерения их таковы, что $\Omega_0 = S_0 = R = 1$ и, следовательно, $G = 2\pi^{-2}$. Покажите, что соответствующая функция распределения $f(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ имеет вид*

$$f(E, J) = [2\pi(1 - \Omega^2)^{1/2}]^{-1} [1 - \Omega^2 - 2(E - \Omega J)]^{-1/2}, \quad (4)$$

когда второй сомножитель в квадратных скобках положителен, и $f = 0$ в противном случае. Покажите, что в системе координат, вращающейся с угловой скоростью Ω , распределение скоростей изотропно, и поэтому Ω представляет собой среднюю угловую скорость. Устойчивы ли эти диски? [Kalnajs, *Ap. J.*, 175, 63 (1972).]

66.4. МОДЕЛИ ТОЛСТЫХ ДИСКОВ

Многие модели плоских галактик являются либо бесконечно тонкими дисками (которые характеризуются только поверхностной плотностью), либо имеющими внушительную толщину эллипсоидами. Возможны промежуточ-

* Разумеется, формально в качестве векторных аргументов функции f нельзя ставить скаляры E, J . Запись (4) означает, что f зависит от $\mathbf{x}, \mathbf{v}$ через скаляры $E(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ и $J(\mathbf{x}, \mathbf{v})$. — Прим. перев.

ные модели, причем иногда пользуются моделью диска с экспоненциальным или другим простым распределением плотности по вертикали. Такая модель является диском в том смысле, что градиенты по радиусу много меньше градиентов по вертикали. Чтобы получить такую структуру, мы можем использовать выражение (63.6) для политропного уравнения состояния (вместе со всеми соответствующими предположениями) и пренебречь градиентами по радиусу. Используя центральную плотность ρ_c в плоскости для нормировки

$$\rho_* = \rho / \rho_c \quad (1)$$

и нормируя шкалу по вертикали

$$z_*^2 = \frac{4\pi G}{K\gamma\rho_c^{\gamma-2}} z^2, \quad (2)$$

получаем

$$\rho_* \frac{d^2 \rho_*}{dz_*^2} + (\gamma - 2) \left(\frac{d\rho_*}{dz_*} \right)^2 = -\rho_*^{4-\gamma}. \quad (3)$$

Покажите, что уравнение (3) имеет первый интеграл

$$\left(\frac{d\rho_*}{dz_*} \right)^2 = c_1 \rho_*^{4-2\gamma} - \frac{2}{\gamma} \rho_*^{4-\gamma}. \quad (4)$$

Получите решение для изотермического случая ($\gamma = 1$) с подходящими граничными условиями, чтобы найти плотность

$$\rho_* = \text{sh}^2 \frac{z_*}{\sqrt{2}}. \quad (5)$$

экспоненциально убывающую при больших z_* . Покажите, что для $\gamma = 2$

$$\rho_* = \cos z_* \quad (6)$$

с границей при $z_* = \pi/2$.

Получите решение для вертикальной составляющей силы тяготения в таких дисках и воспользуйтесь им для исследования свойств вертикальных орбит большой амплитуды. Сделайте предположение, что диски произвольным образом ограничены при некотором радиусе. Как будут вести себя в общих чертах орбиты, заключенные в трубки и «ящики»? Будет ли такая система устойчивой?

66.5. ПРОИСХОЖДЕНИЕ ПРОФИЛЕЙ ПЛОТНОСТИ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ГАЛАКТИК

Было сделано много попыток объяснить, почему уравнение (56.2) так хорошо описывает поверхностную яркость эллиптических галактик. Численное моделирование коллапсирующих звездных систем показывает, что одно из важ-

ных требований при выводе уравнения (56.2) состоит в существовании высокого пика в распределении энергии звезд вблизи $E = 0$. Почему это так и какие начальные условия ведут к такому распределению? [Van Albada T. S., MNRAS, 201, 939 (1982).] Такие профили могут наблюдаться у объектов, получившихся в результате слияния галактик. [Schweizer F., p. J., 252, 455 (1982).]

66.6. ОРБИТЫ И АДИАБАТИЧЕСКИЕ ИНВАРИАНТЫ В ТРЕХОСНОЙ ГАЛАКТИКЕ

Аналитическое исследование природы орбит в трехосной системе нередко оказывается успешным, если пользоваться методикой усреднения. При медленном изменении в пространстве нелинейных членов из выражения для потенциала характерное время изменения орбит велико, т. е. его частота мала. Таким образом, пространственные изменения связаны с изменениями во времени, и для исследования орбит можно использовать приемы, связанные с адиабатическими инвариантами, или анализировать два масштаба времени (как в гл. 47). В нашей книге адиабатические инварианты не рассматриваются, поскольку она не посвящена теории орбит. В нашем распоряжении имеется много стандартных способов расчета. Превосходным введением может служить книга Борна (*Born M. The Mechanics of the Atom*, 1924; переиздание F. Ungar Publishing Co., New York). Адиабатические инварианты, впервые введенные в небесной механике, позже стали использоваться в теории строения атома, а теперь имеют важное значение в некоторых исследованиях галактической структуры. Возможно, что здесь судьба слегка иронизирует по поводу того, что произошло с Борном в его студенческие времена, когда он занимался расчетами планетных орбит в обсерватории Бреслау. Занятие это было столь скучным, что побудило его покинуть астрономию и заняться физикой (см. *Born M. Physics in My Generation*, New York: Springer-Verlag, 1969. [Имеется перевод: *Борн М. Физика в жизни моего поколения*. — М.: Мир, 1973.]). Смена поля деятельности пошла на пользу обеим наукам. Возможно применение этих методов и к трехосным галактикам [см. *de Zeeuw and Merritt*, Ap. J., 267, 571 (1983)].

67. НЕРЕШЕННЫЕ ВОПРОСЫ

Следовать познанию, как падающей звезде,
Вне всех пределов человеческой мысли.

Альфред Теннисон

Задав фундаментальный астрономический вопрос, мы имеем мало шансов получить точный ответ. В этой книге о гравитационных системах конец почти каждой главы отмечен знаком незавершенности. Мы только начинаем пони-

мать разнообразие и тонкость структуры систем, компоненты которых взаимодействуют с силой, меняющейся по столь простому закону обратных квадратов. На всех масштабах, от Солнца и планет до скоплений галактик, сгруппировались настоятельные, но не получившие ответа вопросы.

Как долго Солнечная система будет устойчивой? Вековые возмущения, которые растут по мере того, как планеты движутся по своим орбитам, в конце концов могут закончиться резонансом, приводящим к выбросу. Аналитическая теория дает нам некий успокоительный, но неопределенный ответ. Численное моделирование не обеспечивает нужной точности. И если мы будем считать, что сама Солнечная система является аналоговым вычислительным устройством, то вычисление пока не закончено. Мы знаем определенно лишь то, что планеты, движущиеся по орбитам на протяжении миллиардов лет, до сего дня избегали выброса. Но однажды Солнце может не взойти.

Неопределенности обращения планет вокруг Солнца относительно незначительны по сравнению с проблемой движения нескольких тел примерно одинаковой массы. Здесь возрастают возможности для резонанса. Звезда плохо знает, по какому пути ей следовать. Является ли численное моделирование единственным методом предсказания конечного результата при заданных начальных условиях? Как разрушаются ассоциации звезд в нашей Галактике?

Шаровые скопления являются самыми большими группами звезд, которые движутся внутри большинства нормальных галактик. Вопрос об их происхождении — самый безотлагательный и важный из связанных с ними вопросов. Сформировались ли они до образования галактики и тем самым сохранили информацию о ранней Вселенной, или же они возникли уже в галактиках и отражают динамику этих систем на ранней их стадии? А может быть, происходило и то и другое?

По-прежнему остаются загадочными ядра галактик. Долгое время считавшиеся местом, где сосредоточены черные дыры и действуют таинственные силы, они начинают раскрывать некоторые из своих тайн. Насколько сильно сказываются на них динамические свойства галактик, и насколько существенно сами ядра влияют на форму своих галактик?

Галактики очень тесно связаны с остальной Вселенной и могут пролить свет на основные вопросы космологии. До сих пор нет определенных ответов на вопросы, связанные с происхождением галактик. Всегда ли Вселенная содержала неоднородности тех масштабов и амплитуд, которые требуются для развития галактик, или же вначале она была однородной, но испытала влияние малых неустойчивостей, которые наши исследования до сих пор не обнаружили? Если галактики должны развиваться, то каков необходимый для этого минимум информации, содержащейся во Вселенной? Нам известны многие типы начальных условий, которые достаточны для некоторых способов образования галактик, но являются ли они также необходимыми, и действительно ли они создают то разнообразие структур, которое мы наблюдаем в настоящем? Формируется ли большинство галактик путем объединения меньших объектов, или же это происходит путем фрагментации гигантских облаков? Могут ли карликовые галактики служить ключом к этой загадке?

Если галактика сформировалась, то как она эволюционирует? Откуда берется ее момент импульса? Является ли он «врожденным» или возник в результате приливных взаимодействий? Как он перераспределяется на протяжении жизни галактики? Какие свойства галактик обусловлены катастрофическими слияниями на ранних стадиях их эволюции? Как внешнее окружение изменяет внутреннюю динамику галактик? Какие эффекты возникают при падении газа на галактику? Какова роль несветящегося вещества?

Галактики склонны образовывать группы; тяготение побуждает их собираться вместе. Уничтожает ли последующая динамическая диссипация полностью все следы начальных условий? Присутствует ли до сих пор в структуре скоплений ключ к их космогонии? Положения галактик остаются коррелированными даже на масштабах, превосходящих характерные размеры скопления в Волосах Вероники. Их скорости также имеют не вполне случайный характер. Можно ли здесь найти другие ключи к космологии?

Здесь перечислены лишь наиболее типичные из существующих проблем, но их разрешение повлечет за собой новые проблемы. Не следует искать решение только в рамках гравитационной физики, но ее идеи и методы будут играть главную роль в истолковании соответствующих наблюдений. После того как на решение основных вопросов астрофизики затрачены столь большие усилия, может показаться невероятным, что мы пока знаем о них так мало. Но все же, без сомнения, еще более удивительно то, что мы знаем так много.

68. ЛИТЕРАТУРА

ГЛАВА 56

- Arp H. C.* Atlas of peculiar galaxies, *Ap. J. Supp.*, **123**, 1 (1966).
Disney M. J. Visibility of galaxies, *Nature*, **263**, 573 (1976).
Hubble E. P. Distribution of luminosity in elliptical nebulae, *Ap. J.*, **71**, 231 (1930).
Kormendy J. Observations of galaxy structure and dynamics, in *Morphology and Dynamics of Galaxies*, L. Martinet, M. Mayor (eds.) (Savigny: Geneva Observatory), 1982.
Reynolds J. H. The light curve of the Andromeda Nebula (NGC 224), *MNRAS*, **74**, 132 (1913).
Roberts M. S. Galaxies: landmarks of the universe, in *The Emerging Universe*, W. C. Saslaw, K. C. Jacobs (eds.) (Charlottesville: Virginia UP), 1972, p. 90.
Rubin V. C. Systematics of HII rotation curves, in *Internal Kinematics and Dynamics of Galaxies*, IAU Symposium No. 100, E. Athanassoula (ed.) (Dordrecht: Reidel), 1982, p. 3 (see also the papers following this one).
Sandage A. The Hubble Atlas of Galaxies (Washington: Carnegie Institution), 1961.
Saslaw W. C. On the rotation curves of Sb and Sc galaxies, *Ap. J.*, **160**, 11 (1970).
Sersic J. L. *Extragalactic Astronomy* (Dordrecht: Reidel), 1982.
Thuan T. X., Romanishin W. The structure of giant elliptical galaxies in poor clusters of galaxies, *Ap. J.*, **248**, 439 (1981).
de Vaucouleurs G. Researches on the extragalactic nebulae, *Ann. d'Ap.*, **11**, 247 (1948).
de Vaucouleurs G. Classification and morphology of external galaxies, in *Hand. d. Phys.*, Vol. 53 (Berlin: Springer-Verlag), 1959, p. 275—310.

de Vaucouleurs G., de Vaucouleurs A., Crowin H. G., Jr. Second Reference Catalogue of Bright Galaxies (Austin: Texas UP), 1976.

ГЛАВА 57

Lamb H. Hydrodynamics (Cambridge UP), 1932. [Имеется перевод 6-го англ. издания: Ламб Х. Гидродинамика. — М.—Л.: 1948.]

ГЛАВА 58

Efstathiou G., Jones B. T. Angular momentum and the formation of galaxies by gravitational instability, *Comments on Astrophys.*, **8**, 169 (1980).

Harrison E. R. On the origin of galactic rotation, *MNRAS*, **154**, 167 (1971).

Hoyle F. The origin of the rotations of the galaxies, in *Problems of Cosmical Aerodynamics* (Dayton: Central Air Documents Office), 1949, p. 195.

Şaslaw W. C. Rotation curves of turbulent protogalaxies, *MNRAS*, **152**, 341 (1971).

ГЛАВА 59

Burbidge E. M., Burbidge G. R., Prendergast K. The rotation and mass of MGC 2146, *Ap. J.*, **130**, 739 (1959).

Crampin D. J., Hoyle F. On the angular momentum distribution in the disks of spiral galaxies, *Ap. J.*, **140**, 99 (1964).

MacMillan W. D. The Theory of the Potential (New York: Dover), 1958.

Mestel L. On the galactic law of rotation, *MNRAS*, **126**, 553 (1963).

Nordstiek K. H. The angular momentum of spiral galaxies, I. Methods of rotation curve analysis, *Ap. J.*, **184**, 719 (1973).

Toomre A. On the distribution of matter within highly flattened disks, *Ap. J.*, **138**, 385 (1963).

ГЛАВА 60

Aarseth S. J. Third integral of motion for high-velocity stars, *Nature*, **212**, 57 (1966).

Blauw A., Schmidt M. Galactic Structure (Chicago UP), 1965.

Contopoulos G. On the existence of a third integral of motion, *A. J.*, **68**, 1 (1963).

Goldstein H. Classical Mechanics 2nd ed. (Reading, Mass.: Addison-Wesley), 1980. [Имеется перевод: Голдстейн Г. Классическая механика. — М.: Мир, 1975.]

Hénon M., Heiles C. The applicability of the third integral of motion: some numerical experiments, *A. J.*, **69**, 73 (1964).

Mandelbrot B. The Fractal Geometry of Nature (San Francisco: W. H. Freeman and Co.), 1982.

ГЛАВА 61

Athanassoula E. (ed.). Internal Kinematics and Dynamics of Galaxies, *IAU Symp.* 100 (Dordrecht: Reidel), 1983.

Freeman K. C. Structure and evolution of barred spiral galaxies, II, *MNRAS*, **134**, 1 (1966).

- Goldreich P., Lynden-Bell D.* Gravitational stability of uniformly rotating disks, *MNRAS*, **130**, 97 (1965).
- Kalnajs A. J.* The equilibria and oscillations of a family of uniformly rotating stellar disks, *Ap. J.*, **175**, 63 (1972).
- Ostriker J. P., Peebles P. J. E.* A numerical study of the stability of flattened galaxies: or, can cold galaxies survive?, *Ap. J.*, **186**, 467 (1973).
- Sellwood J. A.* Bar instability and rotation curves, *Astron. Astrophys.*, **99**, 362 (1981).
- Toomre A.* On the gravitational instability of a disk of stars, *Ap. J.*, **139**, 1217 (1964).
- Toomre A.* Theories of spiral structure, *Ann. Rev. Astron. Astrophys.*, **15**, 437 (1977).
- Vandervoort P. O.* The dynamical instability of a rotating, axisymmetric galaxy with respect to a deformation into a bar, *Ap. J. Lett.*, **256**, L41 (1982).

ГЛАВА 62

- Bertin G.* On the density wave theory for normal spiral galaxies, *Phys. Rep.*, **61**, 1 (1980).
- Hunter C.* Stellar hydrodynamic equations for a thin disk galaxy, *Studies in App. Maths.*, **49**, 59 (1970).
- Kalnajs A. J.* Dynamics of flat galaxies, I, *Ap. J.*, **166**, 275 (1971).
- Lin C. C., Lau Y. Y.* Density wave theory of spiral structure of galaxies, *Studies in App. Maths.*, **60**, 97 (1979).
- Toomre A.* Group velocity of spiral waves in galactic disks, *Ap. J.*, **158**, 899 (1969).
- Toomre A.* What amplifies the spirals?, in *The Structure and Evolution of Normal Galaxies*, S. M. Fall and D. Lynden-Bell (eds.) (Cambridge UP), 1981.

ГЛАВА 63

- Binney J.* On the rotation of elliptical galaxies, *MNRAS*, **183**, 501 (1978).
- Gerhard O. E.* A quasi-stable stellar system with prolate inner and oblate outer parts, *MNRAS*, **202**, 1159 (1983).
- Heisler J., Merritt D., Schwarzschild M.* Retrograde closed orbits in rotating triaxial potential, *Ap. J.*, **258**, 490 (1982).
- Petrou M.* Models for elliptical galaxies — II. Oblate spheroids with realistic rotation curves, *MNRAS*, **202**, 1209 (1983).
- Richstone D. O.* Scale-free models of galaxies, II. A complete survey of orbits, *Ap. J.*, **252**, 496 (1982).
- Schwarzschild M.* A numerical model for a triaxial stellar system in dynamical equilibrium, *Ap. J.*, **232**, 236 (1979).
- Vandervoort P. O.* The equilibrium of a galactic bar, *Ap. J.*, **240**, 478 (1980).

ГЛАВА 64

- Ostriker J. P., Spitzer L., Jr., Chevalier R. A.* On the evolution of globular clusters, *Ap. J. Lett.*, **176**, L51 (1972).
- Spitzer L., Jr., Chevalier R. A.* Random gravitational encounters and the evolution of spherical systems, V. Gravitational shocks, *Ap. J.*, **183**, 565 (1973).

ГЛАВА 65

- Alladin S. M., Narasimhan K. S. V. S.* Gravitational interactions between galaxies, Phys. Reports, **92**, 341 (1982).
- Alladin S. M., Parthasarathy M.* Tidal disruption and tidal coalescence in binary stellar systems, MNRAS, **184**, 871 (1978).
- Gerhard O. E.* N-body simulations of disk-Halo galaxies: isolated systems, tidal interactions, and merging, MNRAS, **197**, 179 (1981).
- Lin D. N. C., Tremaine S.* Numerical simulations of the decay of satellite galaxy orbits, Ap. J., **264**, 364 (1983).
- Spitzer L.* Disruption of galactic clusters, Ap. J., **127**, 17 (1958).
- Toomre A., Toomre J.* Galactic bridges and tails, Ap. J., **178**, 623 (1972).

Оглавление

Предисловие редактора перевода	5
Предисловие	7
Введение	10
Часть I. Идеализированные однородные системы — основные понятия и медленная релаксация	14
1. Средние и флуктуирующие гравитационные поля	14
2. Медленная релаксация: характерные времена	18
3. Динамика случайных мгновенных сил	25
4. Общие свойства фоккер-планковской эволюции	33
5. Фоккер-планковское описание гравитирующих систем	42
6. Динамические системы с памятью: немарковская эво- люция	47
7. Уравнение Больцмана	51
8. Некоторые свойства уравнения Больцмана	57
9. Теорема вириала	62
10. Общее описание: уравнение Лиувилля и энтропия	68
11. Получение информации: цепочка уравнений ББГКИ ...	81
12. Получение информации из уравнения Лиувилля: ряд Фурье	86
13. Коллективные эффекты: грексоны	90
14. Коллективное рассеяние	94
14.1. Вероятность рассеяния	94

14.2. Флуктуации, корреляции, формфакторы и правило f -сумм для звездных систем	104
14.3. Угол отклонения, снова динамическое трение и численный эксперимент	109
15. Линейный отклик и дисперсионные соотношения	115
15.1. Основной результат	115
15.2. Газообразные системы	116
15.3. Звездные системы	121
16. Затухание и распад	127
16.1. Физическое описание	127
16.2. Расчет скорости затухания Ландау	129
16.3. Другие механизмы затухания	138
17. Взаимодействие звезд с газом	141
17.1. Газодинамические процессы	141
17.2. Аккреция и уменьшение импульса	144
17.3. Джинсовская и двухпотоковая неустойчивости	151
18. Задачи и приложения	153
18.1. Приближение точечной массы	153
18.2. Модель Пламмера	154
18.3. Решения основного кинетического уравнения	155
18.4. Автомодельные бесстолкновительные уравнения Большмана	155
18.5. Распространение волн в неоднородной системе ...	157
18.6. Аккреция газа на звезды	158
19. Литература	158
Часть II. Бесконечные неоднородные системы и сгущивание галактик	162
20. Как материя заполняет Вселенную?	162
20.1. Общие замечания	162
20.2. Количественный подход к объяснению наблюдаемого распределения	170
20.3. Построение двухточечной корреляционной функции для галактик	174
21. Гравитационная неустойчивость бесконечного расширяющегося газа	178
22. Гравитационная фрагментация приводит к сгущиванию	186
23. Рост двухточечной корреляционной функции	190
24. Энергия и первоначальный масштаб сгущивания	199
25. Последующая эволюция энергии космических корреляций	203
25.1. Уравнение космической энергии	203
25.2. Устойчивость соотношения $\xi(r) \propto r^{-2}$	206
26. Моделирование задачи N тел	209

27. Эволюционирующее пространственное распределение	213
28. Эволюционирующее распределение скоростей	223
29. Краткий обзор основ термодинамики	229
29.1. Общие положения	229
29.2. Внутренние связи	234
29.3. Связи с кинетической теорией и статистической механикой	238
29.4. Флуктуации и фазовые переходы	241
30. Гравитация и термодинамика	243
30.1. Статистико-механический подход	243
30.2. Кинетическое приближение	247
30.3. Модельное приближение	249
31. Гравитермодинамическая неустойчивость	250
31.1. Обращение в нуль скорости звука	250
31.2. Пространственные флуктуации	255
31.3. Флуктуации во времени	257
31.4. Гравитационные фазовые переходы	260
32. Термодинамика и сгущивание галактик: $\xi(r) \propto r^{-2}$...	262
33. Эффективность гравитационного сгущивания	267
34. Нелинейная теория корреляций высокого порядка	275
34.1. Уравнение состояния	275
34.2. Функции распределения $f(N)$	279
35. Задачи и приложения	286
35.1. Гравитационная неустойчивость в многокомпонентных системах	286
35.2. «Блины»	286
35.3. Флуктуации и полуинварианты	287
36. Литература	289
 Часть III. Конечные сферические системы: скопления галактик, галактические ядра и шаровые звездные скопления	 293
37. Обособление	294
38. Бурная релаксация	299
38.1. Введение и основные физические понятия	299
38.2. Бесстолкновительная функция распределения	301
38.3. Критерии бурной релаксации	307
38.4. Затухание и численное моделирование	311
38.5. Распределение в столкновительных системах	312
39. Симметрия и теорема Джинса	318
40. Квазиравновесные модели	322
40.1. Политропы и изотермические сферы	322
40.2. Утяжеленные политропы	327
40.3. Модели Фоккера — Планка	332
41. Применение теоремы вириала	336

42.	Наблюдаемые динамические свойства скоплений	347
42.1.	Скопления галактик	348
42.2.	Ядра галактик	352
42.3.	Шаровые звездные скопления	355
43.	Гравитермическая неустойчивость	357
44.	Перенос в автомодельных системах	365
45.	Испарение и убегание	373
46.	Сегрегация масс и <u>равнораспределение</u> энергии	378
47.	Сегрегация орбит	384
48.	Образование двойных звезд и эволюция скоплений	391
48.1.	Образование двойных, при взаимодействии не- скольких тел	391
48.2.	Образование двойных вследствие диссипации внут- ренней энергии звезд: приливный перенос энергии	396
48.3.	Влияние на эволюцию скопления	404
49.	«Рогаточный» выброс	407
50.	Роль центральной сингулярности	411
51.	Роль распределенного фона	417
52.	Физические столкновения звезд	420
53.	Еще о взаимодействии звезд с газом	425
53.1.	Галактический ветер	425
53.2.	Центральный диск и образование звезд	430
53.3.	Звезды в плотном газе	432
54.	Задачи и приложения	433
54.1.	Потенциальная энергия политропы	433
54.2.	Несоответствие между вириальной и светящейся массами в системе с потерей массы	433
54.3.	Влияние момента импульса на сжатие звездной системы	434
54.4.	Расчет результатов рогаточного выброса	434
55.	Литература	435
Часть IV.	Конечные плоские системы — галактики	441
56.	Наблюдаемая динамика галактик	441
57.	Кинематика движения	448
57.1.	Общая кинематика	448
57.2.	Движения в галактических координатах	453
58.	Перенос момента импульса	457
59.	Кривые вращения и масса галактики	464
60.	Орбиты и третьи интегралы	471
61.	Неустойчивости систем с осевой симметрией и систем с перемычкой	483
62.	Спиральные неустойчивости	492
62.1.	Введение	492
62.2.	Основные свойства спиральной структуры	494

62.3. Самосогласованные спиральные структуры	498
62.4. Поддержание спирали	500
63. Трехосные и несимметричные системы	504
63.1. Введение: вращающиеся политропы	504
63.2. Численное моделирование	509
64. Гравитационные удары	511
65. Прохождение и слияние	514
66. Задачи и приложения	519
66.1. Однородные эллипсоиды и сфероиды Маклорена	519
66.2. Упрощенная эволюция перемычек	521
66.3. Функция распределения для равномерно вращающегося диска, состоящего из звезд	522
66.4. Модели толстых дисков	522
66.5. Происхождение профилей плотности эллиптических галактик	523
66.6. Орбиты и адиабатические инварианты в трехосной галактике	524
67. Нерешенные вопросы	524
68. Литература	525
Предметный указатель	530